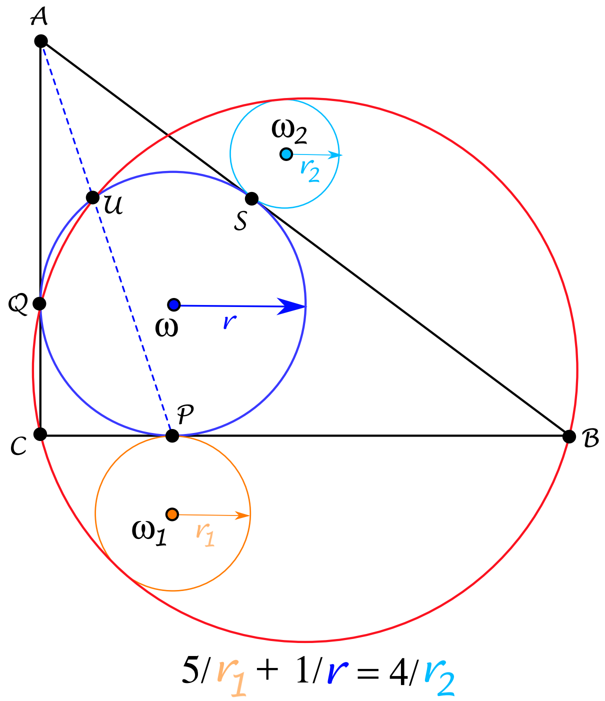
Le triangle 3-4-5 en embuscade.

Géry Huvent

17 juillet 2025

1 Position du problème



Soit ABC un triangle rectangle en C et $\mathcal{C}(\omega, r)$ son cerlce inscrit. Soit $P = (BC) \cap \mathcal{C}(\omega, r)$, $Q = (AC) \cap \mathcal{C}(\omega, r)$ et $U = (AP) \cap \mathcal{C}(\omega, r)$. On suppose que ABC est tel que B, C, Q et U sont cocycliques. On construit alors les cercles $\mathcal{C}_1(\omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\omega_2, r_2)$ tels qu'indiqués sur la figure. Montrer que

$$\frac{1}{r} + \frac{5}{r_1} - \frac{4}{r_2} = 0$$

2 Le triangle (ABC) est un triangle $3-4-5$

On se place dans le repère d'origine C, d'axes (BC) et (AC). Si $a = BC$, $b = AC$ alors $A = (0, b)$ et $B = (a, 0)$, $P = (r, 0)$ et $Q = (0, r)$. Une équation de $\mathcal{C}(\omega, r)$ est $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ et une équation de (AB) est $\dfrac{x}{r} + \dfrac{y}{b} = 1$. Les coordonnées de U vérifient donc

$$\left\{\begin{array}{c} (x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \\ \dfrac{x}{r} + \dfrac{y}{b} = 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{c} (x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \\ x - r = -\dfrac{r}{b} y \end{array}\right.$$

d'où $\frac{r^2}{b^2}y^2 + y^2 - 2ry = 0$ qui donne $y = \frac{2rb^2}{r^2+b^2}$ puis $x = r - \frac{2r^2b}{r^2+b^2} = \frac{r\left(b-r\right)^2}{r^2+b^2}$. Ainsi

$$U = \left(\frac{r\left(b-r\right)^2}{r^2+b^2}, \frac{2rb^2}{r^2+b^2}\right)$$

Puisque BCQ est rectangle en C, le cercle circonscrit à BCQ est le cercle de diamètre $[B,Q]$. Ainsi B,C,Q et U sont cocycliques si et seulement si BQU est rectangle en U donc si et seulement si

$$\overrightarrow{QU} \cdot \overrightarrow{BU} = 0$$

On a $\overrightarrow{QU} = \left(\frac{r\left(b-r\right)^2}{r^2+b^2}, \frac{2rb^2}{r^2+b^2} - r\right) = \frac{r\left(b-r\right)}{r^2+b^2} \times (b-r, b+r)$ et $\overrightarrow{BU} = \left(\frac{r\left(b-r\right)^2}{r^2+b^2} - a, \frac{2rb^2}{r^2+b^2}\right)$. On sait que $r = \frac{a+b-c}{2}$, ce qui donne $c^2 = \left(2r-a-b\right)^2$ d'où, en développant,

$$a = \frac{2r\left(b-r\right)}{b-2r} \qquad (E_a)$$

Ainsi

$$\frac{r\left(b-r\right)^2}{r^2+b^2} - a = \frac{r\left(b-r\right)^2}{r^2+b^2} - \frac{2r\left(b-r\right)}{b-2r} = -\frac{r\left(b-r\right)\left(b+3r\right)}{\left(r^2+b^2\right)\left(b-2r\right)}$$

et

$$\overrightarrow{BU} = \frac{br}{\left(r^2+b^2\right)\left(b-2r\right)} \times \left(-\left(b+3r\right)\left(b-r\right), 2b\left(b-2r\right)\right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QU} \cdot \overrightarrow{BU} &= 0 \Longleftrightarrow -\left(b+3r\right)\left(b-r\right) \times \left(b-r\right) + 2b\left(b-2r\right) \times \left(b+r\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 2\left(b-3r\right)\left(b^2+r^2\right) = 0 \Longleftrightarrow b = 3r \end{aligned}$$

On remplace dans (E_a) pour avoir

$$a = \frac{2r\left(b-r\right)}{b-2r} = \frac{2r\left(3r-r\right)}{3r-2r} = 4r$$

Conclusion : ABC est un triangle «$3-4-5$».

3 Analyse de la figure.

On vient de montrer que $a = 3r$, $b = 4r$, $c = 5r$. Soit R le rayon du cercle de diamètre $[BQ]$, puisque $\overrightarrow{BQ} = (4r, -r)$, on a $R = \frac{\sqrt{17}}{2}r$ et le centre de ce cercle, noté O a pour coordonnées $\left(2r, \frac{r}{2}\right)$.
Les coordonnées de ω_1 sont $(r, -r_1)$ et $O\omega_1^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2} + r_1\right)^2 = \left(R - r_1\right)^2$ donne

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\sqrt{17}+1}{3}$$

Puis $S = A + \frac{\overrightarrow{AB}}{5} \times 2r = \left(\frac{8r}{5}, \frac{9r}{5}\right)$, $\omega_2 = S + r_2 \times \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{3r_2}{5} + \frac{8r}{5}, \frac{4r_2}{5} + \frac{9r}{5}\right)$ (car $\overrightarrow{AB} = (4r, -3r)$) et $\overrightarrow{OS} = \left(\frac{3r_2}{5} - \frac{2r}{5}, \frac{4r_2}{5} + \frac{13r}{10}\right)$. De $OS^2 = \left(\frac{3r_2}{5} - \frac{2r}{5}\right)^2 + \left(\frac{4r_2}{5} + \frac{13r}{10}\right)^2 = \left(R - r_2\right)^2$, on tire alors

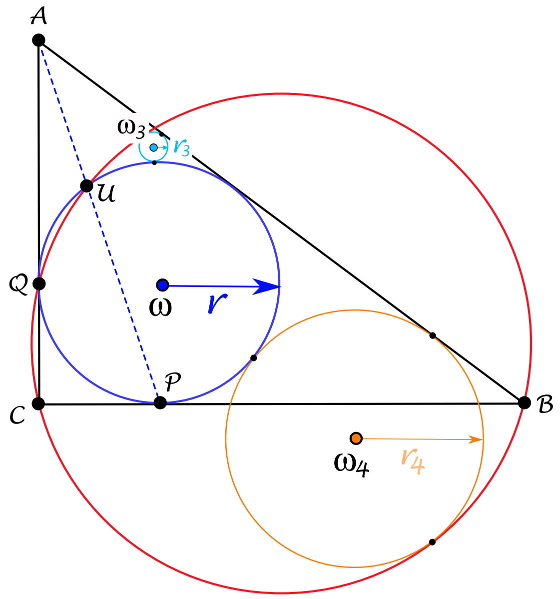
$$\frac{r}{r_2} = \frac{8+5\sqrt{17}}{12}$$

On conclut par une simple vérification numérique

$$1 + 5 \times \frac{\sqrt{17}+1}{3} - 4 \times \frac{8+5\sqrt{17}}{12} = 0$$

donne $1 + \frac{5r}{r_1} - \frac{4r}{r_2} = 0$, ce qui est la relation demandée.

4 Un sangaku (création personnelle)



$$\sqrt{\frac{r}{r_3}} - \sqrt{\frac{r}{r_4}} = ?$$

On se place dans la configuration précédente, et on considère les cercles $\mathcal{C}(\omega_3, r_4)$ et $\mathcal{C}(\omega_4, r_4)$ tangents extérieurement à $\mathcal{C}(\omega, r)$, intérieurement à $\mathcal{C}([B, Q])$ et au côté (AB). Soit $\Gamma(\gamma, \rho)$ un tel cercle (on sait déjà que $C_2(\omega_2, r_2)$ en est un). Si (α, β) sont les coordonnées du centre γ de Γ, et ρ son rayon alors on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (E_1) \quad (\alpha - r)^2 + (\beta - r)^2 - (r+\rho)^2 &= 0 \text{ (tangence entre } \Gamma \text{ et } \mathcal{C}(\omega, r)) \\ (E_2) \quad (\alpha - 2r)^2 + \left(\beta - \frac{r}{2}\right)^2 - (R-\rho)^2 &= 0 \text{ (tangence entre } \Gamma \text{ et } \mathcal{C}([B, Q])) \end{aligned}$$

Une équation de (AB) est alors $\frac{x}{4r} + \frac{y}{3r} - 1 = 0$ ou bien $3x + 4y - 12r = 0$ ainsi, en calculant la distance de γ à (AB),

$$\frac{|3\alpha + 4\beta - 12r|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \rho$$

ce qui donne

$$(E_3) \quad (3\alpha + 4\beta - 12r)^2 - 25\rho^2 = 0$$

4.1 La résolution

Les calculs qui suivent ont été réalisés avec un logiciel de calcul formel (Maple en l'occurence).

$(E_1) - (E_2)$ donne, avec $R = \frac{\sqrt{17}}{2} r$

$$2\alpha - \beta + r - \left(\sqrt{17} + 2\right)\rho = 0$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{17}+2}{2}\rho$$

On reporte dans $(E_2) - \frac{5}{121}(E_3)$ pour avoir (le coefficient est choisi pour « éliminer » le terme en β^2)

$$\beta\left(\frac{29}{11}r - \frac{4}{11}\rho - \frac{2}{11}\rho\sqrt{17}\right) + \frac{403}{121}\rho^2 - \frac{639}{121}r^2 - \frac{200}{121}r\rho + \frac{21}{121}r\rho\sqrt{17} + \frac{76}{121}\rho^2\sqrt{17} = 0$$

d'où

$$\beta = \frac{\left(76\sqrt{17}+403\right)\rho^2 + r\rho\left(21\sqrt{17}-200\right) - 639r^2}{11\left(\left(2\sqrt{17}+4\right)\rho - 29r\right)}$$

On reporte dans α l'expression trouvée pour β, puis dans (E_3) les expressions de α et β pour avoir, en ne considérant que le numérateur,

$$\left(\left(-1787\sqrt{17}-6036\right)\rho + \left(528\sqrt{17}+3444\right)r\right)^2 \times \left(r\rho\left(1836\sqrt{17}+3032\right) + r^2\left(576-432\sqrt{17}\right) + \rho^2\left(-1227\sqrt{17}-3844\right)\right) = 0$$

On a deux possibilités :
Ou bien

$$\left(-1787\sqrt{17}-6036\right)\rho + \left(528\sqrt{17}+3444\right)r = 0$$

qui donne

$$\frac{r}{\rho} = \frac{8+5\sqrt{17}}{12}$$

Ouf ! C'est la solution que l'on connaît déjà, qui donne une racine double et correspond à $\mathcal{C}\left(\omega_2, r_2\right)$.
Ou bien, en posant $x = \dfrac{r}{\rho}$

$$\left(576-432\sqrt{17}\right)x^2 + \left(1836\sqrt{17}+3032\right)x + \left(-1227\sqrt{17}-3844\right) = 0$$

et conduit à deux solutions

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{5}{12}\sqrt{17} + \frac{193}{72} - \frac{11}{12}\sqrt{5} - \frac{11}{72}\sqrt{5}\sqrt{17} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{12}\sqrt{5}\sqrt{17} - \frac{11}{12}\right)^2 \\ \text{et } x_4 &= \frac{5}{12}\sqrt{17} + \frac{193}{72} + \frac{11}{12}\sqrt{5} + \frac{11}{72}\sqrt{5}\sqrt{17} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{12}\sqrt{5}\sqrt{17} + \frac{11}{12}\right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que

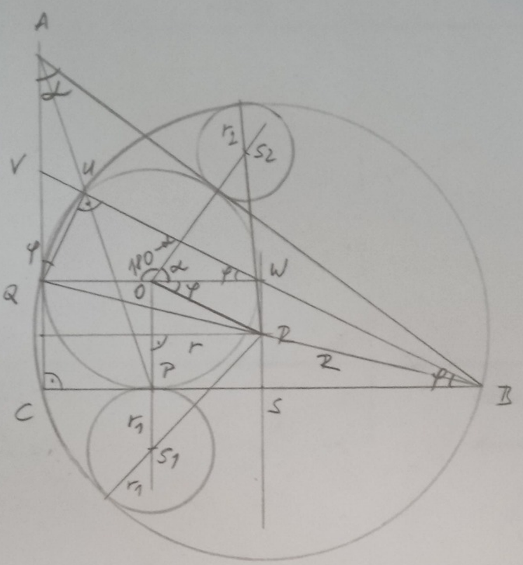
$$\sqrt{x_3} - \sqrt{x_4} = \frac{11}{6}$$

ce qui s'écrit

$$\frac{6}{\sqrt{r_3}} - \frac{6}{\sqrt{r_4}} = \frac{11}{\sqrt{r}}$$

5 Une solution de Marcela Löflerová

Les deux problèmes ont été posés sur le groupe Facebook « I love geometry » et voici les solutions données par Marcela Löflerová



$QW \parallel BC$, $\measuredangle QUW = 90^\circ \Rightarrow \triangle CBV \sim \triangle WQV \sim \triangle WUQ$

$(=2r)$

$\measuredangle BCQ = 90^\circ \Rightarrow BQ = 2R$, $\triangle CBQ \sim \triangle SBR$

$\Rightarrow RS = \frac{1}{2} CQ = \frac{1}{2} r \Rightarrow CSWQ$ is rectangle

$\Rightarrow CB = 2 \cdot QW = 4r$

$\frac{CV}{CB} = \frac{SW}{BS} \Rightarrow CV = \frac{r}{2r} \cdot 4r = 2r$, $BV = \sqrt{(4r)^2 + (2r)^2} = 2r\sqrt{5}$

$$r = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{4r + b - \sqrt{16r^2 + b^2}}{2}$$

$16r^2 + b^2 = 4r^2 + 4rb + b^2 \Rightarrow b = 3r$, $c = AB = 5r$

$R^2 = \sqrt{4r^2 + (\frac{1}{2} r)^2} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{17}$

(1) $r^2 + (\frac{r}{2} + r_1)^2 = (R - r_1)^2 \Rightarrow r^2 + \frac{r^2}{4} + rr_1 + r_1^2 = \frac{17}{4} r^2 - \sqrt{17} rr_1 + r_1^2$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos(\alpha + \varphi) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$

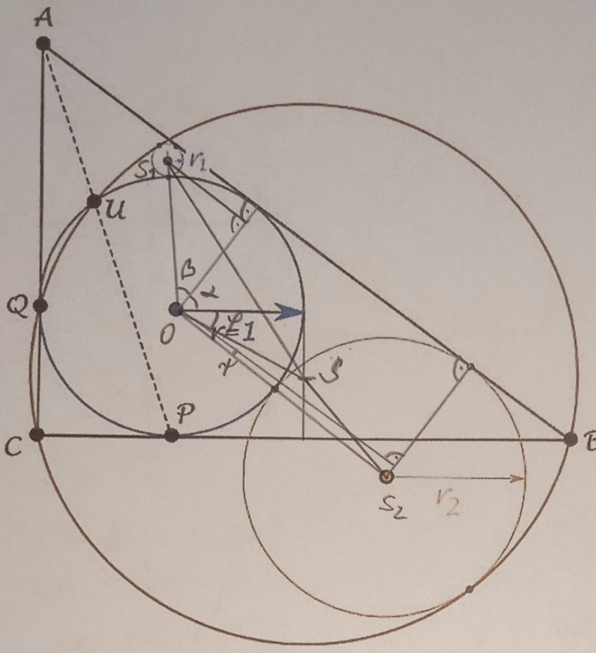
from $\triangle ORS_2$:

$(\frac{\sqrt{5}}{2} r)^2 + (r + r_2)^2 - \sqrt{5} r \cdot (r + r_2) \cdot \frac{2}{5\sqrt{5}}$ $\cancel{\Rightarrow \frac{5}{4} r^2 + 2rr_2 + r_2^2 - \frac{2}{5} r^2 - \frac{2}{5} rr_2}$ $= (R - r_2)^2$

(2) $\Rightarrow \frac{5}{4} r^2 + r^2 + 2rr_2 + r_2^2 - \frac{2}{5} r^2 - \frac{2}{5} rr_2 = \frac{17}{4} r^2 - \sqrt{17} rr_2 + r_2^2$

(1), (2) $\frac{3r^2}{r_1} - r = \sqrt{17} r = \frac{12}{5} \cdot \frac{r^2}{r_2} - \frac{8}{5} r \;/ : 3r^2 ; \cdot 5$

$$\frac{5}{r_1} + \frac{1}{r} = \frac{4}{r_2}$$



$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{\sqrt{r_2}} = ?$$

From previous problem: $BC = 4r = 4$, $AC = 3r = 3$, $OS = \frac{\sqrt{5}}{2}r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos(\alpha+\varphi) = \frac{2}{5\sqrt{5}}$, $R = \frac{\sqrt{17}}{2}r = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\sin\psi = \frac{r_2-1}{r_2+1}$, $\cos\left(\psi + \frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha\right) = \sin(\alpha + \varphi - \psi)$

$$= \frac{11}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{r_2}}{r_2+1} - \frac{2}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{r_2-1}{r_2+1}$$

from $\Delta\, OS_2S$: $(2-r_2)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (1+r_2)^2 - \sqrt{5}\cdot(1+r_2)\cdot\frac{2(11\sqrt{r_2}-r_2+1)}{5\sqrt{5}(r_2+1)}$

$$\frac{17}{4} - \sqrt{17}r_2 + r_2^2 = \frac{9}{4} + 2r_2 + r_2^2 - \frac{22}{5}\sqrt{r_2} + \frac{2}{5}r_2 - \frac{2}{5} \quad / : r_2$$

$$(1) \quad \frac{12}{5r_2} - \frac{12}{5} + \frac{22}{5\cdot\sqrt{r_2}} = \sqrt{17}$$

$\cos\beta = \frac{1-r_1}{1+r_1}$, $\cos(\beta+\alpha+\varphi) = \frac{1-r_1}{1+r_1}\cdot\frac{2}{5\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{r_1}}{1+r_1}\cdot\frac{11}{5\sqrt{5}}$

from $\Delta\, OSS_1$: $(2-r_1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (1+r_1)^2 - \sqrt{5}(1+r_1)\cdot\frac{2(1-r_1-\sqrt{r_1}\cdot 11)}{5\sqrt{5}(1+r_1)}$

$$\frac{17}{4} - \sqrt{17}r_1 + r_1^2 = \frac{9}{4} + 2r_1 + r_1^2 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5}r_1 + \frac{22}{5}\sqrt{r_1} \quad / : r_1$$

$$(2) \quad \frac{12}{5r_1} - \frac{12}{5} - \frac{22}{5\sqrt{r_1}} = \sqrt{17}$$

$(1)-(2)$: $\frac{12}{5}\cdot\frac{r_1-r_2}{r_1r_2} + \frac{22}{5}\cdot\frac{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1r_2}} = 0 \quad / : (\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})\,;\ \cdot\sqrt{r_1r_2}\,;\ \cdot\frac{5}{2}$

$$6\cdot\frac{\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1r_2}} = 11 \iff \frac{1}{\sqrt{r_1}} - \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{11}{6}$$