

Exercices posés en khôlle (2022-2025)

* * * * *

G.HUVENT

17 juillet 2025

0	Le pivot.	7
1	Calculus.	14
1.1	Calcul de sommes.	14
1.2	Injections, surjections, bijections.	33
1.3	Coefficients du binôme et al.	37
1.4	La récurrence.	51
2	Trigonométrie et complexes.	69
2.1	Trigonométrie élémentaire ou pas!	69
2.2	Calculs simples dans $\mathbb{C}$	74
2.3	Inégalités (triangulaire et autres)	76
2.4	L'ensemble $\mathbb{U}$	80
2.5	Pafnouti Tchebychev et al.	83
2.6	Calculs complexes.	86
2.7	Le second degré et plus.	92
2.8	Les racines énièmes.	98
2.9	Géométrie des complexes (images directes et réciproques cachées).	108
3	Généralités sur les réels, les fonctions, IAF	116
3.1	Inégalités	116
3.2	Calcul de dérivées	124
3.3	IAF	125
3.4	Suites $u_{n+1} = f(u_n)$	127
4	Fonctions usuelles	133
4.1	Inégalités et sommes (encore!)	133
4.2	Manipulations (avec des sommes et des produits)	139
4.3	Encore l'IAF mais avec de nouvelles fonctions	145
4.4	Hyperbolique	147
4.5	Un arc en ciel d'égalités et d'équations	152
4.6	Dériver pour simplifier	163
5	Décomposition en éléments simples	172
5.1	Simple décomposition (yoda a dit)	172
5.2	Encore des sommes!	174

6	Intégration I	180
6.1	Intégrales usuelles	180
6.2	IPP	185
6.3	Le changement c'est maintenant	191
6.4	Le TFA	204
6.5	Suites et intégrales	209
6.6	Un peu de tout	218
7	Analyse asymptotique	227
7.1	Equivalents (et qui va loin)	227
7.2	Prolongement par continuité, position par rapport à la tangente	231
7.3	Calculs de DL et applications	235
7.4	Etude de fonction	245
8	EDL1	247
8.1	Sans second membre	247
8.2	Avec second membre	250
8.3	Un (faux-)raccord Michel?	253
8.4	Au bord du programme	258
9	EDL 2	264
9.1	Simple application du cours	264
9.2	Avec un paramètre	267
9.3	Et si on change de fonctions ou de variable?	267
9.4	Des questions bien étranges	271
10	Enter the matrix	278
10.1	Sur les définitions	278
10.2	Calcul matriciel	280
10.3	Le binôme (encore!)	297
10.4	Un peu de tout (et même des déterminants)	299
10.5	Plus théorique	305
11	Déterminants	309
11.1	Calculs directs	309
11.2	Avec une relation de récurrence	322
11.3	Tout Cramer	328
11.4	Du bon usage du déterminant	329
12	Réels, partie entière et suites classiques	337
12.1	Tout cela n'est pas bien rationnel	337
12.2	Borne supérieure et inférieure	339
12.3	La partie entière	340
12.4	Suites classiques	352
12.5	Un peu de tout	364
12.6	Topologie et densité	369
13	Suites réelles	371
13.1	Suites extraites	371
13.2	John Montagu (4 ^e comte de Sandwich)	373
13.3	La vie est un long fleuve monotone	376
13.4	Tout est dans le non-dit	386
13.5	Adjacentes, ensembles, ells convergent	399

14 Limites et continuité.	407
14.1 Le critère séquentiel en action	407
14.2 Continue ou pas ?	409
14.3 Le TLM	413
14.4 Des équations fonctionnelles	415
14.5 Les grands théorèmes	419
15 Dérivation	425
15.1 Etude de dérivabilité	425
15.2 Equations fonctionnelle et dérivation	430
15.3 Questions plus théoriques	432
15.4 Dérivées énièmes	433
15.5 Leibniz en action	440
15.6 TAF et T'Rolle	445
15.7 Le théorème limite de la dérivée	459
15.8 Convexité	460
16 Ensemble, dénombrement, arithmétique	479
16.1 Fonction indicatrice	479
16.2 Dénombrement basique	481
16.3 Dénombrement technique	491
16.4 Encore et toujours le binôme	503
16.5 En fin de khôlle, pour le plaisir (mais pas si dur)	504
17 Polynômes	507
17.1 Calcul de coefficients	507
17.2 Divisibilité et division euclidienne	511
17.3 Equations dont l'inconnue est un polynôme	515
17.4 Histoire de racines	520
17.5 Relations coefficients-racines	524
17.6 Fear factor (isation)	530
17.7 Racines multiples	533
18 Espaces vectoriels	539
18.1 Sous-espace vectoriel	539
18.2 Supplémentaires et projections	545
18.3 Somme de sous-espaces vectoriels (exercices théoriques)	553
18.4 Familles libres, liées, génératrices	554
19 Applications linéaires	565
19.1 Linéarité, noyau, image	565
19.2 Plus théoriques (des noyaux qui posent des pépins et des images)	583
19.3 Hyperplans	590
19.4 Projecteurs : cas pratiques	590
19.5 Projecteurs : cas théoriques	601
20 Intégration II (Le retour)	610
20.1 Des inégalités	610
20.2 Le TFA, encore et encore	612
20.3 SDR (Sommes de Riemann)	618
20.4 Comparaison série-intégrale	632
20.5 Suites définies par une intégrale	633
20.6 Taylor avec un reste intégral(e)	637
20.7 Un peu d'analyse fonctionnelle	642

21 Théorie de la dimension	645
21.1 Application directe du cours (un beau mélange)	645
21.2 Le théorème du rang en action	651
21.3 Un peu plus théorique	654
22 Matrix reloaded	667
22.1 Matrice d'une AL	667
22.2 Matrices semblables	679
22.3 Changement de bases (simple)	681
22.4 Le changement de bases est notre seul espoir	691
22.5 Déterminant d'un endomorphisme, usage et application !	696
23 Probabilités	698
23.1 Des manipulations	698
23.2 Formule de probabilités composées (mais pas que ...)	702
23.3 Un peu de tout	706
23.4 Chaîne de Markov	714
23.5 Le 04 Juillet	719
23.6 Pour les guerriers	722
24 Espaces euclidiens (dont le silence éternel m'effraie)	725
24.1 Alors c'est-y un produit scalaire ou pas ?	725
24.2 Orthogonalité et projections orthogonales	727
24.3 Cauchy, Schwarz et al	736
24.4 Un p'tit compliqué pour la fin ?	740
25 Variables aléatoires	745
25.1 Loi d'une variable aléatoire	745

Abréviations utiles :

OB :	Objectif brevet.
IT :	Inégalité triangulaire.
PAL :	Passage à la limite.
CC :	Croissances comparées.
TFA :	Théorème fondamental de l'analyse.
IPP :	Intégration par parties.
DES :	Décomposition en éléments simples.
TVI :	Théorème des valeurs intermédiaires.
TAF :	Théorème des accroissements finis.
IAF :	Inégalité des accroissements finis.
TLM :	Théorème de la limite monotone.
FI :	Forme indéterminée.
APCR :	A partir d'un certain rang.
DL :	Développement limité.
DA :	Développement asymptotique.
SDR :	Somme de Riemann.
SEV :	Sous espace vectoriel.
FDR :	Formule du rang.
SCE :	Système complet d'événements.
f.b.s :	Forme bilinéaire symétrique.
G-S :	Gram-Schmidt.
C-S :	Cauchy-Schwarz.

CHAPITRE 0

LE PIVOT.

Exercice de khôlle 1

On considère le système suivant d'inconnues x, y, z et de paramètre α

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + \alpha z &= 2 \\ 2x + \alpha y + 2z &= 3 \end{cases}$$

1. Montrer que, sauf deux cas particuliers, la solution est unique.
2. Etudier les cas particuliers.

Solution :

1. On fait un pivot

$$(\mathcal{S}) \xLeftrightarrow[L_2 - L_1]{L_3 - 2L_1} \begin{cases} \boxed{1}x + y - z &= 1 \\ \boxed{1}y + (\alpha + 1)z &= 1 \\ (\alpha - 2)y + 4z &= 1 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 - (\alpha - 2)L_1]{L_2 - L_1} \begin{cases} \boxed{1}x + y - z &= 1 \\ \boxed{1}y + (\alpha + 1)z &= 1 \\ \boxed{(-\alpha^2 + \alpha + 6)}z &= 3 - \alpha \end{cases}$$

Puisque $(-\alpha^2 + \alpha + 6) = (\alpha + 2)(3 - \alpha)$, si $\alpha \notin \{-2, 3\}$ on a 3 pivots et 3 inconnues donc une unique solution.

2. Si $\alpha = -2$ on a

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + y - z &= 1 \\ \boxed{1}y - z &= 1 \\ 0 &= 5 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solutions d'où $S = \emptyset$.

Si $\alpha = 3$, a

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{1}x + y - z &= 1 \\ \boxed{1}y + 4z &= 1 \end{cases}$$

les solutions sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z \\ 1 - 4z \\ z \end{pmatrix}$ d'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice de khôlle 2

Résoudre $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$ où λ est un paramètre réel.

Solution : Par le pivot de Gauss

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{1}x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1] \begin{cases} \boxed{1}x + \lambda y + z = \lambda \\ (1 - \lambda^2)y + (1 - \lambda)z = 1 - \lambda^2 \\ (1 - \lambda)y + (\lambda - 1)z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Premier cas $\lambda = 1$

Le système se réduit à $x + y + z = 1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. d'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Si $\lambda \neq 1$, on peut simplifier et obtenir

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda \\ (1 + \lambda)y + z = 1 + \lambda \\ y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{1}x + \lambda y + z = \lambda \\ \boxed{1}y - z = 1 \\ (1 + \lambda)y + z = 1 + \lambda \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (1 + \lambda)L_2] \begin{cases} \boxed{1}x + \lambda y + z = \lambda \\ \boxed{1}y - z = 1 \\ (2 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq -2$ et $\lambda \neq 1$, on obtient

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Enfin si $\lambda = -2$, le système devient

$$\begin{cases} \boxed{1}x - 2y + z = -2 \\ \boxed{1}y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 1 + z \\ z = z \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Autre stratégie possible :

$$\begin{cases} \lambda x + \boxed{1}y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1] \begin{cases} \lambda x + \boxed{1}y + z = 1 \\ (1 - \lambda^2)x + (1 - \lambda)z = 0 \\ (1 - \lambda)x + (\lambda - 1)z = 0 \end{cases}$$

On traite à part le cas $\lambda = 1$ comme précédemment, sinon on divise par $\lambda - 1$ pour obtenir

$$\begin{cases} \lambda x + \boxed{1}y + z = 1 \\ (1 + \lambda)x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x + \boxed{1}y + z = 1 \\ (2 + \lambda)x = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

ce qui amène bien au cas $\lambda = -2 \dots$

Exercice de khôlle 3

Discuter en fonction du paramètre m le nombre de solutions

$$\begin{cases} x + my &= 2m \\ mx + (2 - m)y &= 2m \end{cases}$$

Solution : On applique le Pivot de Gauß

$$\begin{cases} \boxed{1}x + my &= 2m \\ mx + (2 - m)y &= 2m \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1} \begin{cases} \boxed{1}x + my &= 2m \\ \boxed{(2 - m - m^2)}y &= m(2 - 2m) \end{cases}$$

On factorise $2 - m - m^2 = (m + 2)(1 - m)$ pour distinguer trois cas.

Cas ① : $m \notin \{-2, 1\}$, il y a deux pivots, deux équations, deux inconnues, le système est de Cramer. Le système admet une unique solution.

Cas ② : $m = 1$, le système équivaut à

$$\begin{cases} \boxed{1}x + y &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

il y a une infinité de solutions.

Cas ③ : $m = -2$, le système équivaut à

$$\begin{cases} \boxed{1}x + 2y &= 4 \\ 0 &= -12 \end{cases}$$

Il n'y a aucune solution.

Exercice de khôlle 4

Discuter, en fonction du paramètre β , le nombre de solutions du système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t &= 4 \\ x + \beta y + z + t &= 4 \\ x + y + \beta z + (3 - \beta)t &= 6 \\ 2x + y + 2z + \beta t &= 6 \end{cases}$$

S'il existe un cas pour lequel (S) a une infinité de solutions, préciser l'ensemble des solutions.

Solution : On applique le Pivot de Gauß (quelle surprise !)

$$(S) \xLeftrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}} \begin{cases} \boxed{1}x + y + z + t &= 4 \\ (\beta - 1)y &= 0 \\ (\beta - 1)z + (2 - \beta)t &= 2 \\ -y + (\beta - 2)t &= -2 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 + (\beta - 1)L_2 \end{matrix}} \begin{cases} \boxed{1}x + y + z + t &= 4 \\ \boxed{-1}y + (\beta - 2)t &= -2 \\ \boxed{(\beta - 1)}z + (2 - \beta)t &= 2 \\ + \boxed{(\beta - 1)(\beta - 2)}t &= -2(\beta - 1) \end{cases}$$

Un pivot n'est jamais nul, on a donc plusieurs cas.

① $\beta \notin \{1, 2\}$, $(\beta - 1)(\beta - 2) \neq 0$ et $\beta - 1 \neq 0$. Il y a 4 pivots et 4 inconnues, le système admet une unique solution (on dit qu'il est de Cramer). On ne demande pas le calcul de cette solution !

② $\beta = 2$, le système équivaut à

$$\begin{cases} \boxed{1}x + y + z + t = 4 \\ \boxed{-1}y + z + (\beta - 2)t = -2 \\ \boxed{1}z = 2 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Il est incompatible, il n'y a aucune solution.

③ $\beta = 1$, le système équivaut à

$$\begin{cases} \boxed{1}x + y + z + t = 4 \\ \boxed{-1}y + z - t = -2 \\ + \boxed{1}t = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On a trois pivots, on exprime alors x, y et t en fonction de z qui prend toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$. Il y a donc une infinité de solutions et

$$(S) \iff \begin{pmatrix} x = 2 - z \\ y = 0 \\ z = z \\ t = 2 \end{pmatrix} \text{ et l'ensemble des solutions est } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice de khôlle 5

Résoudre le système linéaire d'inconnues x, y, z et de paramètre $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 3mz = 2 \\ mx + y - z = m \end{cases}$$

Solution : On applique le Pivot de Gauß. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 3mz = 2 \\ mx + y - z = m \end{cases} & \xLeftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{matrix} \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ \boxed{y} - (3m + 2)z = 0 \\ (1 - m)y - (1 + m)z = 0 \end{cases} \\ & \xLeftrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_2} \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ \boxed{y} - (3m + 2)z = 0 \\ \boxed{(1 - 3m^2)z} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc deux cas :

Cas ① : $m^2 = \frac{1}{3}$, le système équivaut à

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ \boxed{y} - (3m + 2)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - 3(m + 1)z \\ y = (3m + 2)z \\ z = z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3(m + 1) \\ 3m + 2 \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Cas ② : $m^2 \neq \frac{1}{3}$, on a 3 équations, 3 inconnues et 3 pivots, la solution est unique et immédiate.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice de khôlle 6

Résoudre et discuter en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + my + mz = m \\ mx + y + mz = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases}$$

Solution : Méthode ① : On applique le pivot de Gauß sans se poser de questions. On a

$$(\mathcal{S}) \begin{array}{l} \xleftrightarrow{\quad} \\ L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array} \begin{cases} \boxed{1}x + my + mz = m \\ (1 - m^2)y + m(1 - m)z = 1 - m^2 \\ m(1 - m)y + (1 - m^2)z = m(1 - m) \end{cases} \quad (*)$$

On a problème pour le second Pivot. Le plus simple est de procéder ainsi :

Cas 1 : $1 + m \neq 0$, on peut alors multiplier la troisième ligne par $1 + m$ puis écrire que

$$(\mathcal{S}) \begin{array}{l} \xleftrightarrow{\quad} \\ L_3 \leftarrow (1+m)L_3 \\ \xleftrightarrow{\quad} \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_2 \\ \xleftrightarrow{\quad} \end{array} \begin{cases} \boxed{1}x + my + mz = m \\ \boxed{(1 - m^2)}y + m(1 - m)z = 1 - m^2 \\ m(1 - m^2)y + (1 + m)(1 - m^2)z = m(1 - m^2) \\ \boxed{1}x + my + mz = m \\ \boxed{(1 - m^2)}y + m(1 - m)z = 1 - m^2 \\ ((1 + m)(1 - m^2) - m^2(1 - m))z = 0 \\ \boxed{1}x + my + mz = m \\ \boxed{(1 - m^2)}y + m(1 - m)z = 1 - m^2 \\ \boxed{(2m + 1)(1 - m)}z = 0 \end{cases} \quad (**)$$

On a trois sous cas.

Premier sous cas : $m \notin \left\{-1, 1, -\frac{1}{2}\right\}$. On a trois pivots qui donne, trois inconnues, une unique solution qui est $z = 0$,

$$y = 1 \text{ et } x = 0. \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Deuxième sous cas : $m = 1$. On a alors (on remplace dans (**))

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} \boxed{1}x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où l'ensemble de solutions, } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Troisième sous cas : $m = -\frac{1}{2}$. On a

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} \boxed{1}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ \boxed{\frac{3}{4}}y - \frac{3}{4}z = \frac{3}{4} \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 1 + z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

d'où l'ensemble de solutions, $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Cas 2 : $m = -1$. On revient au système (*) pour avoir

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} \boxed{1}x - y - z = -1 \\ \boxed{-2}z = 0 \\ \boxed{-2}y = -2 \end{cases}$$

ce qui donne une unique solution et $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (on retrouve le résultat du premier sous cas).

Méthode ② : On s'écarte un peu du pivot et on commence par sommer toutes les lignes pour avoir

$$(\mathcal{S}) \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{cases} (1+2m)(x+y+z) = 1+2m \\ mx+y+mz = 1 \\ mx+my+z = m \end{cases} \quad (***)$$

Cas 1 : $m \neq -\frac{1}{2}$, on peut « diviser » la première ligne par $1+2m$ pour avoir

$$(\mathcal{S}) \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{1+2m}L_1} \begin{cases} \boxed{1}x + y + z = 1 \\ mx + y + mz = 1 \\ mx + my + z = m \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1, L_3 \leftarrow L_3 - mL_1} \begin{cases} \boxed{1}x + y + z = 1 \\ \boxed{(1-m)}y = 1-m \\ \boxed{(1-m)}z = 0 \end{cases}$$

Premier sous cas : $m \notin \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$. On a trois pivots, on obtient $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Second sous cas : $m = 1$, on a

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} \boxed{1}x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Cas 2 : $m = -\frac{1}{2}$, (***) donne

$$(\mathcal{S}) \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{cases} 0 = 0 \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 1 \\ -\frac{1}{2}x + -\frac{1}{2}y + z = -\frac{1}{2} \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{cases} \boxed{1}x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \boxed{1}x - 2y + z = -2 \\ \boxed{3}y - 3z = 3 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x = z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

d'où l'ensemble de solutions, $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarque : On retrouve bien les mêmes solutions. La première méthode conduit à un « faux » cas particulier. On comprendra comment être plus rapide lorsque l'on aura le déterminant.

Exercice de khôlle 7

Soit x, y et z des réels tels que

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xyz^2 = 2 \\ xy^2z^3 = 3 \end{cases}$$

Déterminer le signe de x, y et z puis leur valeur (indication : $\ln$!).

Solution : Avant tout, x, y et z sont non nuls (sinon les produits le seraient). Puisque $z^2 > 0$, on a $xy = \frac{2}{z^2} > 0$ puis $z = \frac{1}{xy} > 0$ et ainsi $x = \frac{1}{y^2z^3} > 0$ et enfin $y > 0$ aussi. En passant au $\ln$, on a

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xyz^2 = 2 \\ xy^2z^3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) + \ln(y) + \ln(z) = \ln 1 = 0 \\ \ln(x) + \ln(y) + 2\ln(z) = \ln 2 \\ \ln(x) + 2\ln(y) + 3\ln(z) = \ln 3 \end{cases}$$

On pose $X = \ln x$, $Y = \ln y$ et $Z = \ln z$ pour avoir le système

$$\begin{cases} X + Y + Z = 0 \\ X + Y + 2Z = \ln 2 \\ X + 2Y + 3Z = \ln 3 \end{cases} \begin{matrix} \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \begin{cases} X + Y + Z = 0 \\ Y + 2Z = \ln 3 \\ Z = \ln 2 \end{cases} \iff \begin{cases} X = \ln 2 - \ln 3 \\ Y = \ln 3 - 2\ln 2 \\ Z = \ln 2 \end{cases}$$

Il y a une unique solution qui est $x = e^{\ln 2 - \ln 3} = \frac{2}{3}$, $y = e^{\ln 3 - 2\ln 2} = \frac{3}{4}$ et $z = e^{\ln 2} = 2$.

CHAPITRE 1

CALCULUS.

1.1 Calcul de sommes.

Exercice de khôlle 8

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=2}^n k(1-k) \quad \textcircled{2} \quad \sum_{k=0}^{3n} 2 \left(k - \frac{1}{2} \right) \quad \textcircled{3} \quad \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n} \right) \quad \textcircled{4} \quad \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+2}{k} \right)$$

Solution : $\textcircled{1}$ Puisque $0 \times (1-0) = 1 \times (1-1) = 0$, on a

$$\sum_{k=2}^n k(1-k) = \sum_{k=0}^n k(1-k) = \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n k^2 = -\frac{n(n^2-1)}{3} \text{ (ouf c'est négatif)}$$

$\textcircled{2}$

$$\sum_{k=0}^{3n} 2 \left(k - \frac{1}{2} \right) = 2 \sum_{k=0}^{3n} k - \sum_{k=0}^{3n} 1 = 2 \times \frac{3n(3n+1)}{2} - 2(3n+1) = 9n^2 - 1$$

$\textcircled{3}$

$$\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (n-k) \underset{i=n-k}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i = \frac{n+1}{2}$$

On peut aussi écrire que $\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n} \right) = \sum_{k=0}^n 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k = (n+1) - \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.

$\textcircled{4}$, trois méthodes

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+2}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\ &= \sum_{i=k+2}^{n+2} \ln(i) - \sum_{k=1}^n \ln(k) \\ &= \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(2) - \ln(1) = \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right) \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+2}{k} \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} \right) = \ln \frac{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times \cdots \times n} = \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)$$

Si on veut le rédiger proprement

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+2)}{\prod_{k=1}^n k} \stackrel{i=k+2}{=} \frac{\prod_{k=3}^{n+2} i}{n!} = \frac{1}{1 \times 2} \times \frac{\prod_{k=1}^{n+2} i}{n!} = \frac{(n+2)!}{2n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Méthode 3 : On écrit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+2}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1) + \ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) + \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \end{aligned}$$

chaque somme est télescopique

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) &= \ln(n+2) - \ln 2 \\ \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) &= \ln(n+1) - \ln 1 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice de khôlle 9

Simplifier $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)$.

Solution : On a $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$ mais $\sum_{j=1}^n (i+j) = ni + \frac{n(n+1)}{2}$ d'où

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) = n \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2} = n \sum_{i=1}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= n \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times n = n^2(n+1) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 10

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{3k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^n \frac{3k+4}{k(k+1)(k+2)}$.

Solution : On réduit au même dénominateur.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}$$

On résout $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 3 \\ 2a = 4 \end{cases}$ d'où $a = 2, b = -1, c = -1$ et ainsi

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}$$

Méthode ① : On change les indices

$$\begin{aligned} S &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}}_{i=k} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}}_{i=k+2} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{i} \right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

Méthode ② : on écrit

$$S = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

sommes telescopiques d'où

$$S = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1}$$

Exercice de khôlle 11

Calculer $\sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \frac{k}{i+1}$

Solution : On a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \frac{k}{i+1} &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \frac{k}{i+1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^i k \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i+1} \times \frac{i(i+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 12

Calculer $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}$

Solution : On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i^2 \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j(j+1)} \times \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n j + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n 1 = \frac{n(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 13

Calculer $\sum_{k=2}^n \frac{4k-2}{k(k^2-1)}$ (on cherchera $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\frac{4k-2}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k}$).

Solution : On réduit au même dénominateur

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k} = \frac{(a+b+c)k^2 + (a-b)k - c}{k(k^2-1)}$$

il suffit de prendre (a, b, c) solution de $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b=4 \\ -c=-2 \end{cases}$. On trouve $a=1, b=-3, c=2$ ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{4k-2}{k(k^2-1)} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{3}{k+1} + \frac{2}{k} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - 3 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} + 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - 3 \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i} - 3 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i} \right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 3 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{5}{2} - \frac{3}{n+1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 14

Calculer $\sum_{0 \leq p \leq q \leq n} \binom{n}{p} 2^q$

Solution : On a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq p \leq q \leq n} \binom{n}{p} 2^q &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=p}^n \binom{n}{p} 2^q = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \left(\sum_{q=p}^n 2^q \right) \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \left(2^p \times \frac{2^{n-p+1} - 1}{2 - 1} \right) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (2^{n+1} - 2^p) \\ &= 2^{n+1} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} - \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p \\ &= 2^{n+1} \times 2^n - (2+1)^n = 2 \times 4^n - 3^n \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 15

Calculer $P = \prod_{k=1}^n \frac{k^2 + 4k + 3}{k^2 + 4k + 4}$.

Solution : On a $k^2 + 4k + 3 = (k + 3)(k + 1)$ et $k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2$ donc

$$P = \frac{\left(\prod_{k=1}^n (k + 3) \right) \left(\prod_{k=1}^n (k + 1) \right)}{\left(\prod_{k=1}^n (k + 2) \right)^2}$$

Mais

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (k + 1) &= \prod_{i=k+1}^{n+1} i = (n + 1)! \\ \prod_{k=1}^n (k + 3) &= \prod_{i=k+3}^{n+3} i = \frac{1}{2 \times 3} \prod_{i=1}^{n+3} i = \frac{1}{6} (n + 3)! \\ \prod_{k=1}^n (k + 2) &= \prod_{i=k+2}^{n+2} i = \frac{1}{2} \prod_{i=2}^{n+2} i = \frac{1}{2} (n + 2)! \end{aligned}$$

d'où

$$P = \frac{\frac{1}{6} (n + 3)! \times (n + 1)!}{\left(\frac{1}{2} (n + 2)! \right)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{(n + 3)!}{(n + 2)!} \times \frac{(n + 1)!}{(n + 2)!} = \frac{2}{3} \frac{n + 3}{n + 2}$$

Exercice de khôlle 16

Calculer $P = \prod_{k=1}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$ puis $Q = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

Solution : Pour le premier, c'est évident $P = 0$ car $1^3 - 1 = 0$. Pour l'autre, on a

$$\begin{aligned} k^3 - 1 &= (k - 1)(k^2 + k + 1) \\ k^3 + 1 &= (k + 1)(k^2 - k + 1) \end{aligned}$$

donc

$$Q = \frac{\prod_{k=2}^n (k - 1)}{\prod_{k=2}^n (k + 1)} \times \frac{\prod_{k=2}^n (k^2 + k + 1)}{\prod_{k=2}^n (k^2 - k + 1)}$$

On a $\prod_{k=2}^n (k - 1) = \prod_{i=k-1}^{n-1} i = (n - 1)!$ et $\prod_{k=2}^n (k + 1) = \prod_{i=k+1}^{n+1} i = \frac{1}{2} \prod_{i=2}^{n+1} i = \frac{(n + 1)!}{2}$ donc

$$\frac{\prod_{k=2}^n (k - 1)}{\prod_{k=2}^n (k + 1)} = \frac{2(n - 1)!}{(n + 1)!} = \frac{2}{n(n + 1)}$$

Ensuite, il faut de l'inspiration ou savoir que

$$(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$$

donc que

$$\prod_{k=2}^n (k^2 - k + 1) = \prod_{k=i+1}^{n-1} ((i+1)^2 - (i+1) + 1) = \prod_{i=1}^{n-1} (i^2 + i + 1)$$

donc

$$\frac{\prod_{k=2}^n (k^2 + k + 1)}{\prod_{k=2}^n (k^2 - k + 1)} = \frac{\prod_{i=2}^n (i^2 + i + 1)}{\prod_{i=1}^{n-1} (i^2 + i + 1)} = \frac{n^2 + n + 1}{1^2 + 1 + 1}$$

Conclusion

$$P_2 = \frac{2}{3} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3n(n+1)}$$

Exercice de khôlle 17

(TAMU i.e. Texas A&M University HS Mathematics Contest)

Soit $A = \sqrt{\underbrace{1 \cdots 1}_{2n \llcorner 1} - \underbrace{2 \cdots 2}_{n \llcorner 2}}$, montrer que $A \in \mathbb{N}$.

Solution : On a $\underbrace{1 \cdots 1}_{2n \llcorner 1} = \sum_{k=0}^{2n-1} 10^k = \frac{10^{2n} - 1}{9}$ et $\underbrace{2 \cdots 2}_{n \llcorner 1} = 2 \times \sum_{k=0}^{n-1} 10^k = 2 \times \frac{10^n - 1}{9}$ donc

$$\underbrace{1 \cdots 1}_{2n \llcorner 1} - \underbrace{2 \cdots 2}_{n \llcorner 2} = \frac{10^{2n} - 1}{9} - 2 \times \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{2n} - 2 \times 10^n + 1}{9} = \left(\frac{10^n - 1}{3} \right)^2$$

donc

$$A = \frac{10^n - 1}{3} = 3 \times \sum_{k=0}^{n-1} 10^k = \underbrace{3 \cdots 3}_{n \llcorner 3}$$

Exercice de khôlle 18

$$\sum_{k=1}^6 k = 21, \quad \sum_{k=1}^{66} k = 2211, \quad \sum_{k=1}^{666} k = 222\,111 \quad \dots$$

Généralisez et expliquez !

Solution : Soit $N = 6 \cdots 6$ où il y a «n» 6 alors $N = \sum_{k=0}^{n-1} 6 \times 10^k = 6 \times \sum_{k=0}^{n-1} 10^k = 6 \times \frac{10^n - 1}{9}$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k &= \frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{10^n - 1}{9} \times \left(6 \times \frac{10^n - 1}{9} + 1 \right) \\ &= \frac{10^n - 1}{9} \times \left(3 \times \left(6 \times \frac{10^n - 1}{9} + 1 \right) \right) = \frac{10^n - 1}{9} \times (2 \times 10^n + 1) \end{aligned}$$

puis si $A = 2 \cdots 2 \cdot 1 \cdots 1$ où il y a «n» 2 et «n» 1, on a

$$2 \cdots 2 = 2 \times \frac{10^n - 1}{9} \text{ et } 1 \cdots 1 = \frac{10^n - 1}{9}$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdots 2 \times 10^n + 1 \cdots 1 = 2 \times \frac{10^n - 1}{9} \times 10^n + \frac{10^n - 1}{9} \\ &= (2 \times 10^n + 1) \times \frac{10^n - 1}{9} \end{aligned}$$

Et c'est bon !

Exercice de khôlle 19

Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k^2} + 1}$

Solution : On a $\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k^2} + 1 = \frac{(k^2 + k + 1)^2}{k^2 (k+1)^2}$, puisque $x^2 + x + 1 \geq 0$, on en déduit que

$$\sqrt{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k^2} + 1} = \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + 1$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k^2} + 1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + 1 \right) = 1 - \frac{1}{n+1} + n = n + \frac{n}{n+1}$$

Exercice de khôlle 20

On remarque que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3+5} &= \frac{1}{8} \\ \frac{1+3}{(5+7)+(9+11)} &= \frac{1}{8} \\ \frac{1+3+5}{(7+9+11)+(13+15+17)} &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Généraliser et prouver !

Solution : On écrit le numérateur sous la forme $\sum_{k=0}^n (2k+1)$, somme qui contient $n+1$ termes.

Le dénominateur est alors une somme de la forme $\sum_{k=n+1}^p (2k+1)$. En effet, le plus petit terme du dénominateur est l'entier impair successeur du plus grand terme dans le numérateur. Reste à déterminer p . La somme du dénominateur a $p+1$ termes et doit en avoir deux fois plus que celle du numérateur, ainsi

$$p - (n+1) + 1 = 2(n+1) \text{ doù } p = 3n+2$$

Il s'agit donc de prouver que

$$\frac{\sum_{k=0}^n (2k+1)}{\sum_{k=n+1}^{3n+2} (2k+1)} = \frac{1}{8}$$

On peut le vérifier avec $n = 1$ qui donne

$$\frac{\sum_{k=0}^1 (2k+1)}{\sum_{k=2}^5 (2k+1)} = \frac{1+3}{5+7+9+11} \text{ ouf!}$$

Pour finir, si on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (2k+1)$ alors

$$S_n = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{3n+2} (2k+1) &= \sum_{k=0}^{3n+2} (2k+1) - \sum_{k=0}^n (2k+1) = S_{3n+2} - S_n \\ &= (3n+3)^2 - (n+1)^2 = 8(n+1)^2 \end{aligned}$$

et c'est fini.

Exercice de khôlle 21

On remarque que

$$\begin{aligned} \frac{2}{6} &= \frac{1}{3} \\ \frac{2+4}{8+10} &= \frac{1}{3} \\ \frac{2+4+6}{10+12+14} &= \frac{1}{3} \\ \frac{2+4+6+8}{12+14+16+18} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Généraliser et prouver !

Solution : Il s'agit de prouver que

$$\frac{\sum_{k=1}^n 2k}{\sum_{k=n+2}^{2n+1} 2k} = \frac{1}{3}$$

Ce qui revient à prouver que $\frac{\sum_{k=1}^n k}{2n+1} = \frac{1}{3}$. On pose $N(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $D(n) = \sum_{k=n+2}^{2n+1} k$. On a alors

$$S(n) + n + 1 + D(n) = \sum_{k=1}^n k + (n+1) + \sum_{k=n+2}^{2n+1} k = S(2n+1) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)(2n+1)$$

d'où

$$\begin{aligned} D(n) &= (n+1)(2n+1) - (n+1) - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1) \left(2n+1 - 1 - \frac{n}{2} \right) = 3 \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{N(n)}{D(n)} = \frac{1}{3}$.

Exercice de khôlle 22

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

1. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{2k+3}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2} + \frac{c}{k+3}$.
2. En déduire la valeur de S_n en fonction de n .

Solution :

1. On a (simple calcul)

$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2} + \frac{c}{k+3} = \frac{(a+b+c)k^2 + (5a+4b+3c)k + (6a+3b+2c)}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Il suffit de déterminer a, b et c solutions de

$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 5a+4b+3c=2 \\ 6a+3b+2c=3 \end{cases}$$

On applique le pivot

$$(S) \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1 \end{array} \iff \begin{cases} \boxed{1}a + b + c = 0 \\ \boxed{-1}b - 2c = 2 \\ -3b - 4c = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{cases} \boxed{1}a + b + c = 0 \\ \boxed{-1}b - 2c = 2 \\ \boxed{2}c = -3 \end{cases}$$

ce qui donne $c = -\frac{3}{2}$, puis $b = -2 - 2c = 1$ et $a = -c - b = \frac{1}{2}$.

2. On a alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\frac{1}{2}}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{\frac{3}{2}}{k+3} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+2} - \frac{3}{k+3} \right)$$

Méthode ① : On change les indices

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}}_{i=k+1} + 2 \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2}}_{i=k+2} - 3 \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+3}}_{i=k+3} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{i} + 2 \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{i} - 3 \sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{i} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{i} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+2} \right) - 3 \left(\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \right) - 3 \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}
 \end{aligned}$$

Méthode ② : Je suis un pirate

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \left(\frac{3}{k+2} - \frac{3}{k+3} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + 3 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+2} \right) + 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \right) \right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}
 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 23

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, u_1 = \frac{3}{2} \text{ et pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n$$

- On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - 2u_n$, montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire v_n en fonction de n .
- Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \frac{v_k}{2^{k+1}}$ de deux manières et en déduire u_n en fonction de n .
- Justifier que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{2^n}} = \frac{1}{2^{2^n} - 1} - \frac{1}{2^{2^{n+1}} - 1}$ et calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_{2^k}}$ ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Solution :

- On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n - 2u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - 2u_n) = \frac{v_n}{2}.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - 2u_0 = \frac{3}{2}$. On en déduit que

$$v_n = \frac{3}{2^{n+1}}$$

2. On a

$$\sum_{k=0}^n \frac{v_k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{3}{2^{2k+2}} = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} = \frac{3}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4^{n+1}}$$

Mais on a également (télescopage)

$$\sum_{k=0}^n \frac{v_k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{u_{k+1} - 2u_k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{u_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{u_k}{2^k} \right) = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{u_0}{2^0} = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) = 2^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

On en déduit (par décalage d'indice) que pour $n \geq 1$, $u_n = 2^n - \frac{1}{2^n}$ et c'est encore vrai si $n = 0$.

3. On a donc

$$\frac{1}{u_{2^n}} = \frac{1}{2^{2^n} - \frac{1}{2^{2^n}}} = \frac{2^{2^n}}{(2^{2^n})^2 - 1} = \frac{2^{2^n}}{2^{2 \times 2^n} - 1} = \frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}} - 1}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2^n} - 1} - \frac{1}{2^{2^{n+1}} - 1} &= \frac{1}{2^{2^n} - 1} - \frac{1}{(2^{2^n})^2 - 1} = \frac{1}{2^{2^n} - 1} - \frac{1}{(2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)} \\ &= \frac{(2^{2^n} + 1) - 1}{(2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)} = \frac{2^{2^n}}{2^{2^{n+1}} - 1} \text{ ouf!} \end{aligned}$$

Mais alors (télescopage)

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2^{2^k} - 1} - \frac{1}{2^{2^{k+1}} - 1} \right) = \frac{1}{2^{2^0} - 1} - \frac{1}{2^{2^{n+1}} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Exercice de khôlle 24

Calculer $S_1 = \sum_{i=0}^n 2^{2^i}$ puis $S_2 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j}$ puis en déduire $S_3 = \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{i+j}$. Vérifier le calcul avec $n = 2$.

Solution : On a

$$S_1 = \sum_{i=0}^n 4^i = \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{2^{2n+2} - 1}{3}$$

:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j 2^{i+j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j 2^i \times 2^j = \sum_{j=0}^n 2^j \left(\sum_{i=0}^j 2^i \right) \\ &= \sum_{j=0}^n 2^j \left(\sum_{i=0}^j 2^i \right) = \sum_{j=0}^n 2^j \left(\frac{2^{j+1} - 1}{2 - 1} \right) = \sum_{j=0}^n 2^j \times 2^{j+1} - \sum_{j=0}^n 2^j \\ &= 2 \sum_{j=0}^n 2^{2j} - \sum_{j=0}^n 2^j = 2S_1 - \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2 \times \left(\frac{2^{2n+2} - 1}{3} \right) - \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\ &= \frac{2^{2n+3} + 1}{3} - 2^{n+1} \end{aligned}$$

Enfin

$$S_3 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} + \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} 2^{i+j} - \sum_{0 \leq i=j \leq n} 2^{i+j}$$

(Somme sur le triangle du haut et du bas à laquelle on enlève la diagonale qui est comptée deux fois). Et

$$\sum_{0 \leq j \leq i \leq n} 2^{i+j} = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} \text{ (rôles symétriques)}$$

d'où

$$S_3 = 2S_2 - S_1 = 2 \left(\frac{2^{2n+3}}{3} - 2^{n-1} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{2^{2n+2}}{3} - \frac{1}{3} \right) = 2^{2n+2} - 2^n + 1$$

Avec $n = 2$, cela revient à considérer le tableau suivant

$j = 0$			$j = 1$	$j = 2$	soit	1	2	4
$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	2^{0+0}	2^{0+1}		2	4	8
			2^{1+0}	2^{1+1}		4	8	16
			2^{2+0}	2^{2+1}		8	16	32

La somme S_1 est égale à la somme des termes sur la diagonale, à savoir $1 + 4 + 16 = 21$, ce qui vaut bien $\frac{2^{2 \times 2 + 2} - 1}{3} = \frac{2^6 - 1}{3} = \frac{64 - 1}{3} = 21$.

La somme S_2 vaut la somme sur le triangle supérieur (avec des doubles lignes) donc est égale à $1 + 2 + 4 + 4 + 8 + 16 = 35$ et vaut bien $\frac{2^{2 \times 2 + 3} + 1}{3} - 2^{2+1} = \frac{2^7 + 1}{3} - 8 = \frac{129}{3} - 8 = 35$.

Exercice de khôlle 25

On note, pour $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ le n ème nombre harmonique.

- Calculer $S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i \frac{k}{i+1} \right)$.
- Pour $k \geq 1$, exprimer $\sum_{i=k}^n \frac{1}{i+1}$ comme la différence de deux termes de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est le n ème nombre harmonique.
- En écrivant S comme une somme double que l'on calculera d'une autre manière, en déduire que $\sum_{k=1}^n k H_k = \frac{n(n+1)}{2} \left(H_{n+1} - \frac{1}{2} \right)$.

Solution :

- On a $S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i \frac{k}{i+1} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i+1} \sum_{k=1}^i k \right) = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$
- $\sum_{i=k}^n \frac{1}{i+1} = \sum_{j=i+1}^{n+1} \frac{1}{j} = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) = H_{n+1} - H_k$.
Plus rigoureusement, on a (somme par paquets)

$$H_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{1}{j} = H_k + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{1}{j}$$

3. On calcule S en intervertissant les deux signes sommes.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1 \leq k \leq i \leq n} \frac{k}{i+1} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \frac{k}{i+1} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \frac{k}{i+1} \\ &= \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{i=k}^n \frac{1}{i+1} \right) = \sum_{k=1}^n k (H_{n+1} - H_k) = \frac{n(n+1)}{2} H_{n+1} - \sum_{k=1}^n k H_k. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice de khôlle 26

Soit $n \geq 2$ un entier, calculer les sommes et produits suivants

$$\textcircled{1} \sum_{p=2}^{n^2} (3p + 2^{p+1}) \quad \textcircled{2} \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} \quad \textcircled{3} \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \quad \textcircled{4} \sum_{k=1}^n k(k+1) \quad \textcircled{5} \sum_{k=0}^n ((k+2)^3 - k^3)$$

Solution : $\textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{n^2} (3p + 2^{p+1}) &= 3 \sum_{p=2}^{n^2} p + \sum_{p=2}^{n^2} 2^{p+1} = 3 \left(-1 + \sum_{p=1}^{n^2} p \right) + 2^3 \sum_{p=2}^{n^2} 2^{p-2} \\ &= 3 \left(-1 + \frac{n^2(n^2+1)}{2} \right) + 8 \sum_{i=0}^{n^2-2} 2^i \text{ avec } i = p-2 \\ &= 3 \left(-1 + \frac{n^2(n^2+1)}{2} \right) + 8 \times \left(\frac{2^{n^2-2+1} - 1}{2-1} \right) \\ &= \frac{3n^2(n^2+1)}{2} + 2^{n^2+2} - 11 \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ Deux possibilités (mais qui, au final, sont les mêmes).

Méthode $\textcircled{1}$: On utilise $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$, ainsi

$$2^{n+1} - 3^{n+1} = (2-3) \times \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} \text{ d'où } \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

Méthode $\textcircled{1}$: on a

$$\sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^n 2^k \frac{3^n}{3^k} = 3^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3} \right)^k = 3^n \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

$\textcircled{3}$

$$\begin{aligned} \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) &= \prod_{p=2}^n \frac{p^2-1}{p^2} = \prod_{p=2}^n \frac{(p-1)(p+1)}{p^2} = \prod_{p=2}^n \frac{p-1}{p} \prod_{p=2}^n \frac{p+1}{p} \\ &= \end{aligned}$$

chaque produit est télescopique, $\prod_{p=2}^n \frac{p-1}{p} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ et $\prod_{p=2}^n \frac{p+1}{p} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$

d'où $\prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$. On peut aussi écrire que

$$\prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{\prod_{p=2}^n (p-1) \prod_{p=2}^n (p+1)}{\left(\prod_{p=2}^n p\right)^2}$$

Mais $\prod_{p=2}^n (p-1) = \prod_{i=p-1}^{n-1} i = (n-1)!$, $\prod_{p=2}^n (p+1) = \prod_{i=p+1}^{n+1} i = \frac{(n+1)!}{2}$ et $\prod_{p=2}^n p = n!$ d'où

$$\prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{(n-1)! \times (n+1)!}{2 \times n! \times n!} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

⑤ On bien on écrit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left((k+2)^3 - k^3\right) &= \sum_{k=0}^n (6k^2 + 12k + 8) = 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 12 \sum_{k=0}^n k + 8 \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 12 \times \frac{n(n+1)}{2} + 8(n+1) \\ &= (n+1) \times (n(2n+7) + 8) = (n+1) \times (2n^2 + 7n + 8) \end{aligned}$$

Ou bien on écrit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left((k+2)^3 - k^3\right) &= \sum_{k=0}^n \left((k+2)^3 - (k+1)^3 + (k+1)^3 - k^3\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left((k+2)^3 - (k+1)^3\right) + \sum_{k=0}^n \left((k+1)^3 - k^3\right) \\ &= (n+2)^3 - 1^3 + (n+1)^3 - 0^3 \text{ (Pirate!)} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 27

Calculer $S = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} \frac{i 2^k}{k(k+1)}$.

Solution : On a

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k \frac{i 2^k}{k(k+1)} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2^k}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k i \right)$$

mais $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$ d'où

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2^k}{k(k+1)} \times \frac{k(k+1)}{2} \right) = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \sum_{j=k-1}^{n-1} 2^j = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Exercice de khôlle 28

Calculer $S = \sum_{k=1}^n k(n+1-k)$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n ((n+1)k - k^2) = (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left((n+1) - \frac{2n+1}{3} \right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 29

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^n (4k-2) = \prod_{k=1}^n (n+k)$.

Solution : On pose $A = \prod_{k=1}^n (4k-2)$ et $B = \prod_{k=1}^n (n+k)$.

Idée ① : Une récurrence sur n . Soit $\mathcal{P}(n) = \ll \prod_{k=1}^n (4k-2) = \prod_{k=1}^n (n+k) \gg$. On a $\mathcal{P}(0)$ vraie car $1 = 1$ (les deux produits sont vides). On peut vérifier que $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $\prod_{k=1}^1 (4k-2) = 4-2 = 2$ et $\prod_{k=1}^1 (1+k) = 1+1 = 2$. Puis on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} (4k-2) &= \left(\prod_{k=1}^n (4k-2) \right) \times (4(n+1)-2) = \left(\prod_{k=1}^n (4k-2) \right) \times (4n+2) \\ \prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) &= (n+2)(n+3) \cdots (2n)(2n+1)(2n+2) \text{ et } \prod_{k=1}^n (n+k) = (n+1)(n+2) \cdots (2n) \\ \text{d'où } \prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) &= \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right) \times \frac{1}{n+1} \times (2n+1)(2n+2) = \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right) \times (4n+2) \end{aligned}$$

Si $\prod_{k=1}^n (4k-2) = \prod_{k=1}^n (n+k)$, on en déduit que $\prod_{k=1}^{n+1} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k)$.

Remarque : Si on veut le faire plus proprement, pour le produit $\prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k)$, on peut poser $i = k+1$ pour avoir

$$\prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) = \prod_{i=2}^{n+2} (n+i) = \prod_{i=1}^n (n+i) \times \frac{1}{n+1} \times (2n+1)(2n+2)$$

Idée ② : La factorielle ! On a

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = \prod_{i=n+1}^{2n} i = \frac{\prod_{i=1}^{2n} i}{\prod_{i=1}^n i} = \frac{(2n)!}{n!}$$

et

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (4k-2) &= \prod_{k=1}^n (2 \times (2k-1)) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) = 2^n \times (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)) \\ &= 2^n \times [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)] \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \\ &= \frac{2 \times 2 \times \dots \times 2}{(2 \times 1) \times (2 \times 2) \times \dots \times (2 \times n)} \times [1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) \times 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)] \\ &= \frac{(2n)!}{n!} \end{aligned}$$

Si on veut l'écrire proprement, on a

$$\begin{aligned} (2n)! &= \prod_{i=1}^{2n} i = \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq 2n \\ i \text{ pair}}} i \right) \times \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq 2n \\ i \text{ impair}}} i \right) = \left(\prod_{k=1}^n (2k) \right) \times \left(\prod_{k=1}^n (2k-1) \right) \\ &= \left(2^n \prod_{k=1}^n k \right) \times \left(\prod_{k=1}^n (2k-1) \right) = 2^n n! \times \prod_{k=1}^n (2k-1) \text{ d'où } \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 30

On se propose (avez-vous le choix ?) de calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^n k^2 (k+1)!$$

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que si on pose $P(X) = X^2 + aX + b$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$k^2 (k+1)! = ((k+1)P(k+1) - P(k)) \times k!$$

2. En déduire S .

Solution :

1. En simplifiant par $k!$ (et avec $(k+1)! = (k+1) \times k!$) on cherche a et b réels tels que

$$k^2 (k+1) = (k+1) \left((k+1)^2 + a(k+1) + b \right) - (k^2 + ak + b)$$

ce qui équivaut à

$$k^2 (k+1) - (k+1)^3 + k^2 = a(k+1)^2 + b(k+1) - ak - b$$

Avec

$$\begin{aligned} k^2 (k+1) - (k+1)^3 + k^2 &= k^3 + k^2 - (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + k^2 \\ &= -k^2 - 3k - 1 \end{aligned}$$

et

$$a(k+1)^2 + b(k+1) - ak - b = ak^2 + (a+b)k + a$$

Il suffit de prendre $a = -1$ et $b = -2$ (on « identifie les coefficients »).

2. On a alors

$$k^2 (k+1)! = (k+1)! P(k+1) - k! P(k)$$

et la somme $\sum_{k=0}^n k^2 (k+1)!$ devient télescopique ! On obtient ainsi

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n ((k+1)! P(k+1) - k! P(k)) = (n+1)! P(n+1) - 0! P(0) \\ &= (n+1)! \times ((n+1)^2 - (n+1) - 2) + 2 \\ &= (n+1)! \times (n^2 + n - 2) + 2 = (n+1)! \times ((n+2)(n-1)) + 2 \\ &= (n-1)(n+2)! + 2 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 31

Calculer $A = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i 2^j}{j(j+1)}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{i 2^j}{j(j+1)} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2^j}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{2^j}{j(j+1)} \times \frac{j(j+1)}{2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n 2^{j-1} = \sum_{k=j-1}^{n-1} 2^k = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 32

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $A = \sum_{k=-n}^{2n+1} k^2$.

Solution : On sait que $\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On écrit que

$$A = \sum_{k=-n}^0 k^2 + \sum_{k=1}^{2n+1} k^2$$

Mais $\sum_{k=-n}^0 k^2 \underset{i=-k}{=} \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{2n+1} k^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(2 \times (2n+1) + 1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3}$
d'où

$$\begin{aligned} A &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} (n+2 \times (4n+3)) = \frac{(n+1)(2n+1)(3n+2)}{2} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 33

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $A = \prod_{p=0}^n \sum_{k=0}^p 2^{k \times p!}$, simplifier A .

Solution : On a $2^{k \times p!} = (2^{p!})^k$ d'où

$$\sum_{k=0}^p 2^{k \times p!} = \sum_{k=0}^p (2^{p!})^k = \frac{(2^{p!})^{p+1} - 1}{2^{p!} - 1} = \frac{2^{p! \times (p+1)} - 1}{2^{p!} - 1} = \frac{2^{(p+1)!} - 1}{2^{p!} - 1}$$

Oh oh, Pirate multiplicatif! En effet, en posant $a_p = 2^{p!} - 1$, on a

$$\prod_{p=0}^n \frac{2^{(p+1)!} - 1}{2^{p!} - 1} = \prod_{p=0}^n \frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{a_{n+1}}{a_0} = \frac{2^{(n+1)!} - 1}{2^{0!} - 1} = 2^{(n+1)!} - 1$$

Exercice de khôlle 34

Pour $n \geq 1$, on définit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Déterminer a et b réels tels que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$.
- En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$
- Exprimer $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{H_k}{k(k-1)}$ à l'aide de H_n et de n . Indication : quelle relation simple relie H_k et H_{k-1} ?
- Quelle est la limite de S_n ? Indication : On donne $H_9 = \frac{7129}{2520}$, montrer que $H_n \leq \sqrt{n}$ si $n \geq 9$.

Solution :

- On réduit au même dénominateur pour avoir $\frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} = \frac{(a+b)k - a}{k(k-1)}$. Il suffit de choisir a et b tels que $-a = 1$ et $a+b=0$ pour avoir

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

- On a alors (je suis un pirate)

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

- On a pour $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{H_k}{k(k-1)} &= \frac{H_k}{k-1} - \frac{H_k}{k} = \frac{(H_{k-1} + \frac{1}{k})}{k-1} - \frac{H_k}{k} \text{ car } H_k = H_{k-1} + \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{H_{k-1}}{k-1} - \frac{H_k}{k} \right) + \frac{1}{k(k-1)} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \frac{H_k}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{H_{k-1}}{k-1} - \frac{H_k}{k} \right) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \stackrel{\text{Pirate!}}{=} \frac{H_1}{1} - \frac{H_n}{n} + 1 - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} - \frac{H_n}{n}\end{aligned}$$

Remarque : Avec $H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$, on a $\frac{H_n}{n} = \frac{H_{n+1}}{n} - \frac{1}{(n+1)n} = \frac{H_{n+1}}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ d'où

$$\sum_{k=2}^n \frac{H_k}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{H_{n+1}}{n}$$

4. Montrons que $H_n \leq \sqrt{n}$ par récurrence pour $n \geq 9$. C'est vrai si $n = 9$ car $H_9 = \frac{7129}{2520} \leq \sqrt{9} = 3$ équivaut à $7129 \leq 3 \times 2520 = 7560$. Puis si c'est vrai au rang $n \geq 9$, on a alors

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \stackrel{HR_n}{\leq} \sqrt{n} + \frac{1}{n+1}$$

Il suffit donc de montrer que $\sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1}$. Mais cette inégalité s'écrit aussi

$$\frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Par passage à l'inverse (les nombres sont positifs), cela équivaut à

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq n+1$$

Et puisque $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$, il suffit de montrer que $2\sqrt{n+1} \leq n+1$. Mais après élévation au carré

$$2\sqrt{n+1} \leq n+1 \iff 4(n+1) \leq (n+1)^2 \iff 0 \leq (n+1)(n+1-4) = (n+1)(n-3)$$

ce qui est vrai à partir de $n = 3$ donc pour $n \geq 9$. On a donc, pour $n \geq 9$, $\frac{H_n}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui

permet d'affirmer que $\lim S_n = \lim \left(2 - \frac{1}{n+1} - \frac{H_{n+1}}{n} \right) = 2$.

Exercice de khôlle 35

- Pour $k \in \mathbb{N}$, factoriser $(k+1)! + k!$ et $(k+1)! - k!$.
- Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{(2! + 1!)(3! + 2!) \cdots ((n+1)! + n!)}{(2! - 1!)(3! - 2!) \cdots ((n+1)! - n!)}$$

Solution :

- Avec $(k+1) = (k+1) \times k!$, on a $(k+1)! + k! = (k+2) \times k!$ et $(k+1)! - k! = k \times k!$.
- Le produit donné s'écrit et se simplifie en

$$\prod_{k=1}^n \frac{(k+1)! + k!}{(k+1)! - k!} = \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} = \frac{3 \times 4 \times \cdots \times n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

1.2 Injections, surjections, bijections.

Exercice de khôlle 36

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 3x - y + z \\ 2x + z \end{pmatrix}$

Est-elle injective, surjective, bijective ? Préciser $\text{Im } f$.

Solution : Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im } f$, on cherche le nombre de solutions de $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Cela revient à résoudre

$$\begin{cases} \boxed{1}x + y + z = a \\ 3x - y + z = b \\ 2x + z = c \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 - 3L_1]{L_3 - 2L_1} \begin{cases} \boxed{1}x + y + z = a \\ -4y - 2z = b - 3a \\ -2y - z = c - 2a \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 - 2L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} \boxed{1}x + y + z = a \\ \boxed{-2}y - z = c - 2a \\ 0 = a + b - 2c \end{cases}$$

Si $a + b - 2c \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent donc f n'est pas surjective (par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent)

Si $a + b - 2c = 0$, alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une infinité d'antécédents (on obtient x et y en fonction de z qui prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$). Donc f n'est pas injective (par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a plus d'un antécédent).

De plus $\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, a + b - 2c = 0 \right\}$ (car c'est l'ensemble des éléments ayant au moins un antécédent).

Bien sûr f n'est pas bijective.

Exercice de khôlle 37

Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - e^{-x} + 1$ est une bijection et calculer $f^{-1}(y)$ où $y \in \mathbb{R}$.

Solution : Soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $y = f(x)$. On pose $X = e^x$ ainsi $e^x = \frac{1}{X}$, ce qui conduit à

$$X - \frac{1}{X} + 1 = y \text{ où } X > 0$$

Soit

$$X^2 + (1 - y)X - 1 = 0$$

On a $\Delta = (1 - y)^2 + 4 > 0$, le produit des racines est $-1 < 0$, donc une des racines est strictement positive (la plus grand) l'autre strictement négative. Comme la plus grand racine est $\frac{y - 1 + \sqrt{(1 - y)^2 + 4}}{2}$ on a

$$X = e^x = \frac{y - 1 + \sqrt{(1 - y)^2 + 4}}{2}$$

d'où

$$x = \ln \left(\frac{y - 1 + \sqrt{(1 - y)^2 + 4}}{2} \right)$$

Bref, on a toujours une unique solution, ainsi f est une bijection et $f^{-1}(y) = \ln \left(\frac{y-1 + \sqrt{(1-y)^2 + 4}}{2} \right)$

Exercice de khôlle 38

(★) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ et $g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

1. Montrer que f est à valeurs dans $]-1, 1[$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ déterminer $g(f(x))$ puis montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. Que vaut f^{-1} ?

Solution :

1. On veut montrer que $-1 \leq f(x) \leq 1$, mais

$$-1 < f(x) < 1 \iff -1 - |x| < x < 1 + |x|$$

car $1 + |x| > 0$. Ceci est encore équivalent à $\begin{cases} 0 < 1 + |x| + x \\ \text{et} \\ 0 < 1 + |x| - x \end{cases}$. Puisque $-|x| \leq x \leq |x|$ on a $0 \leq |x| + x$ et $0 \leq |x| - x$. Ainsi f est bien à valeurs dans $]-1, 1[$

2. On a

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{1-|f(x)|}$$

Mais $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+|x|} \right| = \frac{|x|}{1+|x|}$ car $1+|x| \geq 0$ donc

$$g(f(x)) = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1 - \frac{|x|}{1+|x|}} = x$$

On vérifie ensuite que si $y \in]-1, 1[$

$$f(g(y)) = \frac{g(y)}{1+|g(y)|} = y$$

ce qui est facile car $|g(y)| = \left| \frac{y}{1-|y|} \right| = \frac{|y|}{1-|y|}$ car si $y \in]-1, 1[$, on a $|y| < 1$ donc $1 - |y| > 0$. Puis

$$\frac{g(y)}{1+|g(y)|} = \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1 + \frac{|y|}{1-|y|}} = y$$

Ainsi $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$ et $f \circ g = Id_{]-1, 1[}$ d'où f et g sont bijectives, et $f^{-1} = g$.

Exercice de khôlle 39

Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (m+1)y \\ mx + (m+4)y \end{pmatrix}$.

1. Discuter, en fonction de m , l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f .
2. Pour m positif tel que f ne soit pas surjective, déterminer $\text{Im } f$.
3. Pour $m = 0$, déterminer $f^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Solution :

1. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on cherche le nombre d'antécédents de Y . Cela revient à résoudre l'équation $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, soit à résoudre $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + (m+1)y = a \\ mx + (m+4)y = b \end{cases}$. Par le pivot, on a

$$(\mathcal{S}) \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - mL_1] \begin{cases} \boxed{1}x + (m+1)y = a \\ \boxed{(4-m^2)}y = b - ma \end{cases} \quad \text{car } (m+4) - m(m+1) = 4 - m^2$$

Si $m^2 \neq 4$, on a 2 pivots, 2 équations, 2 inconnues, le système est de Cramer donc admet une unique solution. Ainsi Y a toujours un unique antécédent, cela signifie que f est bijective donc injective et surjective.

Si $m^2 = 4$, alors

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} \boxed{1}x + (m+1)y = a \\ 0 = b - ma \end{cases}$$

Si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est tel que $b - ma \neq 0$, il n'y a pas de solution, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédents. Ainsi f n'est pas injective.

Si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est tel que $b - ma = 0$, il y a une infinité de solutions (paramétrées par y), ainsi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une infinité d'antécédents. Conclusion f n'est pas surjective.

2. Pour $m = 2$, la condition de compatibilité s'écrit $b - 2a = 0$ d'où $\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, b - 2a = 0 \right\}$

3. Pour $m = 0$, le système $(\mathcal{S})$ équivaut à $\begin{cases} \boxed{1}x + y = a \\ \boxed{4}y = b \end{cases}$ soit à $\begin{cases} x = a - \frac{b}{4} \\ y = \frac{b}{4} \end{cases}$ d'où

$$f^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{b}{4} \\ \frac{b}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 40

Soit $E = \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $A = \{2, 4, 6\}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E (i.e. $B \in \mathcal{P}(E) \iff B \subset E$). Soit $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par si $B \subset E$ alors $f(B) = A \cap B$.

1. Quels sont les antécédents de $\emptyset$? L'ensemble E est-il dans l'espace image?
2. Que pensez vous de l'injectivité et de la surjectivité de f ?
3. Quel est l'espace image de f ?

Solution :

1. On a $f(B) = \emptyset$ si et seulement si $B \cap A = \emptyset$. Les antécédents de $\emptyset$ sont les parties de E n'ayant aucun élément dans A . Donc les parties de $\{1, 3, 5\}$. On peut les lister : $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$.
On ne peut avoir $E \in \text{Im } f$ sinon il existe $B \subset E$ tel que $B \cap A = E$. Absurde car $B \cap A \subset A \neq E$.
2. D'après ce qui précède, $\emptyset$ a plus d'un antécédent, donc f est non injective. Et E n'a pas d'antécédent, donc f non surjective.
3. Pour $B \in E$ on a $f(B) \subset A$ donc $\text{Im } f \subset \mathcal{P}(A)$. Réciproquement si $C \subset A$ alors $f(C) = C$, et ainsi $C \in \text{Im } f$.

Exercice de khôlle 41

Soit f et g définies par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Montrer que f n'est pas injective mais que g l'est.

Solution : Entre f et g , seul l'espace de départ est modifié (en fait g est la restriction de f à $\mathbb{Q}$).

Pour f , on a $f(0) = f(\pi)$ et $0 \neq \pi$ donc f n'est pas injective (l'élément $0 \in \mathbb{R}$ a deux antécédents au moins).

Pour g , soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$ (attention à l'espace de départ) tels que $f(x_1) = f(x_2)$ alors $\sin(x_1) = \sin(x_2)$ d'où

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{1} & x_1 = x_2 \quad (2\pi) \\ \text{ou} & \\ \textcircled{2} & x_1 = \pi - x_2 \quad (2\pi) \end{array} \right.$$

Le cas $\textcircled{1}$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1 = x_2 + 2k\pi$. Si $k \neq 0$ on en déduit que

$$\pi = \frac{x_1 - x_2}{2k} \in \mathbb{Q} \text{ car } x_1, x_2 \text{ sont dans } \mathbb{Q} \text{ et } k \in \mathbb{Z}^*$$

Absurde, sous réserve d'admettre que π est un nombre irrationnel (résultat que l'on montrera sans doute en DNS...).

Donc $k = 0$ et $x_1 = x_2$.

Pour le cas $\textcircled{2}$, de même, cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1 = \pi - x_2 + 2k\pi$. On en déduit que

$$\pi = \frac{x_1 + x_2}{2k + 1} \in \mathbb{Q} \text{ car } x_1, x_2 \text{ sont dans } \mathbb{Q} \text{ et } k \in \mathbb{Z}^*$$

Absurde ! Conclusion $x_1 = x_2$ et ceci prouve l'injectivité de g .

Exercice de khôlle 42

Soit $m \in \mathbb{R}$, on définit f sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + my \\ mx - my \end{pmatrix}$$

1. Discuter l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f .
2. Pour $m = -1$, préciser $\text{Im}(f)$.
3. Pour $m = 1$, donner l'expression de $f^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$.

Solution :

1. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on détermine les éventuels antécédents de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en résolvant le système $(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x + my = a \\ mx - my = b \end{cases}$.
On a

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{array}{c} \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1} \\ \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1}x + my = a \\ \boxed{m(m+1)}y = b - ma \end{array} \right. \end{array}$$

Si $m \notin \{0, -1\}$, le système admet toujours une unique solution. Ainsi f est bijective car tout élément de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent.

Si $m = 0$ ou $m = -1$, ou bien $b - ma \neq 0$ et le système n'a pas de solution, l'élément $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent.

On peut affirmer que f n'est pas surjective. Si $b - ma = 0$, le système admet une infinité de solution, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une infinité d'antécédent, f n'est pas injective. A fortiori, f n'est pas bijective.

2. Dans ce cas $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Im } f \iff b + a = 0$, ainsi

$$\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, a + b = 0 \right\}$$

3. Dans ce cas

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{1}x + y = a \\ \boxed{2}y = b - a \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - \frac{b-a}{2} = \frac{3a-b}{2} \\ y = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

Ainsi

$$f^{-1} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{3a-b}{2} \\ \frac{b-a}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 43

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x + y \end{pmatrix}$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f .

Solution : Ce qui est facile c'est f non surjective, en effet $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent (par exemple). En effet, sinon il existe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x^2 + y^2 = -1 \\ x + y = 0 \end{cases}$, absurde car $x^2 + y^2 \geq 0$.

Pour l'injectivité, soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ayant au moins un antécédent noté $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (on fait l'analyse du problème). On a alors $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ce qui donne

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}$$

Ce n'est pas un système linéaire ! Mais on en déduit que $y = b - x$ et ainsi $x^2 + (b - x)^2 - a = 0$. Ceci prouve que x est solutions de $2x^2 - 2bx - a + b^2 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4b^2 - 8(b^2 - a) = 8a - 4b^2$. Ceci montre qu'en général, il y a deux valeurs pour x et donc pour y . Un élément ayant un antécédent en aura deux (sauf cas particulier). Par exemple, pour $b = 0$ et $a = 2$ on a $\Delta = 16$ et $x \in \{-1, 1\}$ puis $y = -x$. Synthèse : on vérifie que $f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve qu'un élément au moins au deux antécédents. Conclusion f n'est pas injective (ni surjective).

1.3 Coefficients du binôme et al.

Exercice de khôlle 44

Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Solution : Avec la formule du pion, on a pour $k \geq 1$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

puisque pour $k = 0$, on a $k \binom{n}{k} = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\ &\stackrel{i=k-1}{=} n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 45

Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k-2}$.

Solution : On pose $S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k-2}$, ainsi

$$S = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k \right) = \frac{1}{4} \left(-\binom{n}{0} 2^0 - \binom{n}{n} 2^n + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \right) = \frac{3^n - 2^n - 1}{4}$$

Exercice de khôlle 46

(★) Une estimation asymptotique.

1. Soit $n \geq 1$, $x \in]0, 1]$ et $k \in [[0, n]]$, montrer que

$$\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}$$

2. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1+x \leq e^x$.

3. En déduire que

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k} \right)^k$$

Montrer que cette estimation n'a d'intérêt que si $k \leq \frac{n}{2}$.

Solution :

1. On a, avec le binôme

$$\frac{(1+x)^n}{x^k} = \frac{1}{x^k} \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k} + x \binom{n}{k+1} + \cdots + x^{n-k} \binom{n}{n}$$

or $x > 0$ donc $x \binom{n}{k+1} + \cdots + x^{n-k} \binom{n}{n} \geq 0$ d'où

$$\frac{1}{x^k} \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{n}{i}}{x^{k-i}} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}$$

mais puisque $x \in]0, 1]$, on a $\frac{1}{x^{k-i}} \geq 1$, ainsi

$$\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{k} \leq \frac{1}{x^k} \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}$$

2. C'est une inégalité de convexité (la courbe de $\exp$ est au dessus de sa tangente à l'origine). Sinon on pose $f(x) = e^x - 1 - x$, et on étudie la fonction f qui est dérivable avec $f'(x) = e^x - 1$. On a donc un minimum en $x = 0$ d'où $f(x) \geq f(0) = 0$ ce qui donne le résultat.

3. Pour $x = \frac{k}{n}$, on a donc

$$\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{k} \leq \frac{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n}{\left(\frac{k}{n}\right)^k}$$

mais $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{k}{n}}\right)^n = e^k$ d'où

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

Si on pose $f(x) = \frac{(1+x)^n}{x^k}$, une étude simple montre que $\min_{]0,1]} f(x) = f\left(\frac{k}{n-k}\right)$.

Si $\frac{k}{n-k} \geq 1 \iff k \geq \frac{n}{2}$, alors

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{k} \leq f(1) = 2^n \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ainsi pour $k \geq \frac{n}{2}$, l'inégalité $\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ est sans intérêt car

$$\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{k} \leq \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Remarque : Pour $k \leq \frac{n}{2}$, ce qui est suffisant pour estimer $\binom{n}{k}$ (car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), on a

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{k} \leq f\left(\frac{k}{n-k}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{n-k}\right) &= \frac{\left(1 + \frac{k}{n-k}\right)^n}{\left(\frac{k}{n-k}\right)^k} = \frac{\left(\frac{n}{n-k}\right)^n}{\left(\frac{k}{n-k}\right)^k} \text{ car } 1 + \frac{k}{n-k} = \frac{n}{n-k} \\ &= \frac{n^n}{k^k} \times \frac{1}{(n-k)^{n-k}} = \frac{n^n}{k^k} \times \frac{1}{n^{n-k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k}} = \left(\frac{n}{k}\right)^k \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k}} \end{aligned}$$

Mais il faudrait une bonne majoration de $\frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k}}$ (meilleure que $\frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k}} \leq e^k \dots$).

Exercice de khôlle 47

Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (n-1)^{n-k}$.

Solution : On a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ si $n \geq 1$ (Formule du pion) donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (n-1)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (n-1)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} (n-1)^{n-k} \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (n-1)^{n-1-i} 1^i = n \times (n-1+1)^{n-1} = n^n \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 48

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P_k(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$.

Solution : On a pour $x \neq 1$, $P_k(x) = \frac{x^k - 1}{x - 1}$, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) &= \frac{1}{x-1} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) \\ &= \frac{1}{x-1} \left(\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k - 1 \right) - \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{(x+1)^n - 2^n}{x-1} \end{aligned}$$

et

$$2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2^{n-1} \frac{\left(\frac{1+x}{2}\right)^n - 1}{\frac{1+x}{2} - 1} = \frac{(x+1)^n - 2^n}{x-1}$$

L'égalité est donc vraie pour $x \neq 1$, mais avec $x = 1$, on a

$$P_k(1) = k \text{ et } \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

Avec la formule du pion, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ d'où

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \underset{i=k-1}{=} n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1}$$

et

$$2^{n-1} P_n\left(\frac{1+1}{2}\right) = 2^{n-1} P_n(1) = n 2^{n-1}$$

le résultat obtenu est donc aussi valable si $x = 1$.

Remarque : Deux autres manières de procéder :

① Soit $Q(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) - 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$, alors Q est un polynôme nul sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ qui est infini donc nul partout. En particulier en $x = 1$.

② Les fonctions $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x)$ et $g : x \mapsto 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$ sont continues (ce sont des polynômes) en $x = 1$ ainsi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = f(1) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} g(x) = g(1)$$

mais si $x \neq 1$, on a $f(x) = g(x)$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} g(x)$ et ainsi $f(1) = g(1)$.

Exercice de khôlle 49

Calcul de $S = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}$. Soit k un entier naturel.

1. Montrer que

$$(k+1) \binom{2(k+1)}{k+1} - 2 \binom{2k}{k} - 4k \binom{2k}{k} = 0$$

2. On pose $u_k = \frac{k}{4^k} \binom{2k}{k}$, simplifier $u_{k+1} - u_k$.

3. En déduire la valeur de S en fonction de n .

4. (*) En calculant $A = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i}$ de deux manières, en déduire que la valeur de

$$\sum_{j=0}^n \frac{j}{2^{2j}} \binom{2j}{j}$$

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} (k+1) \binom{2(k+1)}{k+1} &= \frac{(k+1) (2k+2)!}{(k+1)! (k+1)!} = \frac{(2k+2)!}{k! (k+1)!} \\ &= \frac{(2k+2) (2k+1)!}{(k+1)! k!} = \frac{2 (2k+1)!}{k! k!} \\ &= 2 (2k+1) \times \frac{(2k)!}{k! k!} = (4k+2) \binom{2k}{k} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. En divisant par $\frac{1}{4^{k+1}}$ la relation précédente, on obtient

$$\frac{1}{4^{k+1}} (k+1) \binom{2(k+1)}{k+1} - \frac{1}{4^k} k \binom{2k}{k} - \frac{1}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k} = 0$$

On en déduit que

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k}$$

3. En sommant (bande de pirates!) de 0 à n entier naturel

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k}$$

d'où (avec $u_0 = 0$)

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} = u_{n+1} = \frac{2}{4^{n+1}} (n+1) \binom{2n+2}{n+1}$$

4. On a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} = \sum_{j=0}^n \frac{2}{4^{j+1}} (j+1) \binom{2j+2}{j+1} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{4^k} \binom{2k}{k} = 2 \left(B + \frac{n+1}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} \right) \end{aligned}$$

mais on a aussi

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} = \sum_{i=0}^n (n+1-i) \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \\ &= (n+1) \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} - \sum_{i=0}^n \frac{i}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \\ &= (n+1) \times \frac{2}{4^{n+1}} (n+1) \binom{2n+2}{n+1} - B \end{aligned}$$

d'où

$$3T = (n+1) \times \frac{2}{4^{n+1}} (n+1) \binom{2n+2}{n+1} - 2 \frac{n+1}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1}$$

soit

$$\sum_{j=0}^n \frac{j}{2^{2j}} \binom{2j}{j} = \frac{2n(n+1)}{3 \times 4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1}$$

Exercice de khôlle 50

(★) Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}}$ définie par

$$\begin{aligned} a_{1,j} &= a_{i,1} = 1 \\ a_{i,j} &= a_{i-1,j} + a_{i,j-1} + n \end{aligned}$$

Montrer que

$$a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1} (n+1) - n$$

Indication : Faire une récurrence sur $p = i + j$.

Solution : Puisque $(i, j) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a $i + j \geq 2$. On définit donc, pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$

$$\mathcal{P}(p) = \ll \forall (i, j) \in \mathbb{N}^{*2}, i + j = p, a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1} (n+1) - n \gg$$

Initialisation : Si $p = 2$ alors $i = j = 1$ et

$$a_{1,1} = 1, \binom{i+j-2}{i-1} (n+1) - n = \binom{2-2}{1-1} (n+1) - n = 1$$

Ce qui prouve que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour un rang $p \geq 2$. Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $i + j = p + 1$ alors, par définition de la suite

$$a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1} + n$$

Mais $i - 1 + j = i + j - 1 = p$, on peut appliquer $\mathcal{P}(p)$, ce qui donne $a_{i-1,j} = \binom{i+j-3}{i-2}(n+1) - n$ et $a_{i,j-1} = \binom{i+j-3}{i-1}(n+1) - n$. D'où

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \binom{i+j-3}{i-2}(n+1) - n + \binom{i+j-3}{i-1}(n+1) - n + n \\ &= \left(\binom{i+j-3}{i-2} + \binom{i+j-3}{i-1} \right) (n+1) - n \end{aligned}$$

Mais d'après Pascal,

$$\binom{i+j-3}{i-2} + \binom{i+j-3}{i-1} = \binom{i+j-2}{i-1}$$

d'où

$$a_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}(n+1) - n$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(p+1)$.

Exercice de khôlle 51

On considère la suite de Fibonacci définie par $F_{-1} = 1$, $F_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$$

On pourra faire une récurrence double sur m .

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fibofactorielle notée $n_{F!}$ par

$$n_{F!} = \prod_{i=1}^n F_i \text{ (ainsi par convention du produit vide } 0_{F!} = 1)$$

et pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le coefficient fibonomial

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n_{F!}}{k_{F!} \times (n-k)_{F!}}$$

Par convention, on pose $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ lorsque $k < 0$ ou $k > n$.

(a) Que valent $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$?

(b) Si on écrit, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{F_n \times \cdots \times F_p}{F_1 \times \cdots \times F_q}$$

Que valent p et q ?

(c) Montrer la relation du triangle de fibopascal

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = F_{k+1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + F_{n-k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Solution :

1. Comme indiqué, on pose $\mathcal{P}(m) = \langle \langle \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \rangle \rangle$.

Initialisation : Pour $\mathcal{P}(0)$ s'écrit ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{0+n} = F_{0+1}F_n + F_0F_{n-1}$$

ce qui est vrai car $F_1 = 1$ et $F_0 = 0$.

Puis $\mathcal{P}(1)$ s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{1+n} = F_{1+1}F_n + F_1F_{n-1}$$

avec $F_1 = F_2$, c'est vrai car cela devient $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, ce qui découle de la définition de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Hérédité : Supposons, à $m \geq 0$ fixé, que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies. Il s'agit de prouver que, sous l'hypothèse de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{m+2+n} = F_{m+3}F_n + F_{m+2}F_{n-1}$$

Par définition de la suite, on a, pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} F_{m+3}F_n + F_{m+2}F_{n-1} &= (F_{m+2} + F_{m+1})F_n + (F_{m+1} + F_m)F_{n-1} \\ &= (F_{m+2}F_n + F_{m+1}F_{n-1}) + (F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}) \end{aligned}$$

Mais HR_m permet d'écrire $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} = F_{m+n}$ et HR_{m+1} que $F_{m+2}F_n + F_{m+1}F_{n-1} = F_{(m+1)+n}$. On en déduit que

$$F_{m+3}F_n + F_{m+2}F_{n-1} = F_{m+1+n} + F_{m+n} = F_{m+n+2} \text{ (définition de } (F_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$.

2.

(a) On a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{n_{F!}}{0_{F!} \times (n-0)_{F!}} = 1 \\ \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{n_{F!}}{1_{F!} \times (n-1)_{F!}} \text{ or } 1_{F!} = F_1 = 1 \text{ et } n_{F!} = F_n \times (n-1)_{F!} \text{ d'où } \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = F_n \\ \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ n-n \end{bmatrix} = 1 \text{ car il est évident que } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) C'est comme avec les coefficients binômiaux,

$$\begin{aligned} \frac{n_{F!}}{(n-k)_{F!}} &= \frac{\prod_{i=1}^n F_i}{\prod_{i=1}^{n-k} F_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n-k} F_i \times \prod_{i=n-k+1}^n F_i}{\prod_{i=1}^{n-k} F_i} = \prod_{i=n-k+1}^n F_i = F_n \times \cdots \times F_{n-k+1} \\ \text{et } k_{F!} &= F_1 \cdots F_k \text{ d'où } q = k \text{ et } p = n - k + 1 \end{aligned}$$

(c) Si on écrit, pour $k \geq 1$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{F_n \times \cdots \times F_p}{F_1 \times \cdots \times F_q}$$

Que valent p et q ?

(d) C'est le même problème que pour la relation de Pascal, il faut gérer les effets de bord !

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = F_{k+1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + F_{n-k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Si $k > n$ alors $k > n-1$ et $k-1 > n-1$, les trois termes sont nuls, de même si $k < 0$.

Si $k = 1$ alors $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = F_n$, $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} = F_{n-1}$ et $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. La relation demandée s'écrit, dans ce cas,

$$F_n = F_2 \times F_{n-1} + F_{n-2} \times 1 = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ce qui est vrai car $n - 2 \geq -1$. La relation est vraie.

Si $k = n$ alors $1 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = F_{k+1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + F_{n-k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = F_{n+1} \times 0 + F_{-1} \times 1 = 1$. La relation est vraie.

Enfin si $2 \leq k \leq n-1$ alors en utilisant pour $n \geq 1$, $n_{F!} = F_n \times (n-1)_{F!}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= \frac{n_{F!}}{k_{F!} \times (n-k)_{F!}} = \frac{F_n \times (n-1)_{F!}}{F_k \times (k-1)_{F!} \times F_{n-k} \times (n-1-k)_{F!}} \\ &= \frac{F_n}{F_k \times F_{n-k}} \frac{(n-1)_{F!}}{(k-1)_{F!} (n-1-k)_{F!}} \\ \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} &= \frac{(n-1)_{F!}}{k_{F!} \times (n-1-k)_{F!}} = \frac{1}{F_k} \times \frac{(n-1)_{F!}}{(k-1)_{F!} (n-1-k)_{F!}} \\ \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} &= \frac{(n-1)_{F!}}{(k-1)_{F!} \times (n-k)_{F!}} = \frac{1}{F_{n-k}} \times \frac{(n-1)_{F!}}{(k-1)_{F!} (n-1-k)_{F!}} \end{aligned}$$

la relation demandée équivaut, après division par $\frac{(n-1)_{F!}}{(k-1)_{F!} (n-1-k)_{F!}} \neq 0$

$$\frac{F_n}{F_k \times F_{n-k}} = \frac{F_{k+1}}{F_k} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}$$

soit (en multipliant par $F_k \times F_{n-k}$) à

$$F_n = F_{k+1} F_{n-k} + F_k F_{n-k-1}$$

Ce qui est vrai en utilisant la question 1 (remplacer m par k et n par $n-k$).

La généralisation des coefficients du binôme que l'on vient de voir est un cas particulier des coefficients de Fontené-Ward. Georges Fontené était né à Rousies (Nord) en 1848, il fut successivement professeur à Belfort, à Douai, à Rouen et enfin au Collège (aujourd'hui Lycée) Rollin. Il est mort en 1923 à Paris. Il a proposé une généralisation des coefficients binômiaux en 1915 dans la revue «NOUVELLES ANNALES MATHÉMATIQUES».

Exercice de khôlle 52

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et P_k définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, P_k(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

Solution : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, pour $x \neq 1$, on a $P_k(x) = \frac{x^k - 1}{x - 1}$, ainsi

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = \frac{1}{x-1} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right)$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k &= -\binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = -1 + (1+x)^n \\ \text{d'où avec } x &= 1, \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = \frac{1}{x-1} ((1+x)^n - 2^n)$$

D'autre part, si $x \neq 1$, on a $\frac{1+x}{2} \neq 1$, ce qui permet d'affirmer que

$$2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2^{n-1} \frac{\left(\frac{1+x}{2}\right)^n - 1}{\frac{1+x}{2} - 1} = 2^{n-1} \frac{(1+x)^n - 2^n}{\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{x-1} ((1+x)^n - 2^n)$$

Pour finir, il reste à considérer le cas où $x = 1$

Méthode ① (Calcul) : On a $P_k(1) = k$ et $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$. Avec la formule du capitaine, on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ si $k \geq 1$ d'où $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n2^{n-1}$. Et pour finir $2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2^{n-1}P_n(1) = n2^{n-1}$.

Méthode ② (Malin) : Soit $A(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x)$ et $B(x) = 2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$, en tant que polynômes, A et B sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} A(x) = A(1) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} B(x) = B(1)$$

Mais sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $A(x) = B(x)$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} A(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} B(x)$, ce qui prouve que $A(1) = B(1)$. Au passage, cela

donne un moyen rapide de calculer $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

Remarque : Dans le cours, on montrera que si deux polynômes sont égaux sur une partie infinie, ils le sont partout.

Ici $A(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x)$ et $B(x) = 2^{n-1}P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$ sont égaux sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ qui est une partie infinie, donc sont égaux partout, en particulier en $x = 1$ (et on peut même remplacer x par un complexe!).

Exercice de khôlle 53

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Solution : La formule du capitaine s'écrit $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ pour $0 \leq p \leq n$. Avec $p = k+1$ et $n+1$ à la place de n , on obtient

$$(k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \binom{n}{k} \text{ d'où } \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(-\binom{n+1}{0} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \right) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \text{ car } \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} = 2^N \end{aligned}$$

Remarque : Il y a une autre méthode (que l'on verra plus tard). Soit $f(x) = (1+x)^n$ alors $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ d'où

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (1+t)^n dt = \left[\frac{1}{n+1} (1+t)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

mais par linéarité

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$\text{car } \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1} [t^{k+1}]_0^1 = \frac{1}{k+1} \text{ si } k \in \mathbb{N}$$

d'où le résultat.

Exercice de khôlle 54

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0 ; 2n \rrbracket$.

1. On pose, pour $p \geq 2n$, $\alpha_{p,k} = \frac{\binom{p}{k}}{\binom{p+1}{k+1}}$, simplifier $\alpha_{n,k}$.
2. En déduire une expression simple de $\frac{\binom{2n+2}{k+1} \binom{2n}{k}}{\binom{2n+1}{k} \binom{2n+1}{k+1}}$.
3. Justifier que $\frac{1}{\binom{2n}{k}} = \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{1}{\binom{2n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{2n+1}{k+1}} \right)$.
4. En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n}{k}}$$

Solution :

1.

$$\alpha_{p,k} = \frac{\binom{p}{k}}{\binom{p+1}{k+1}} = \frac{p!}{k! (p-k)!} \times \frac{(k+1)! (p-k)!}{(p+1)!} = \frac{k+1}{p+1}$$

2. On a

$$\frac{\binom{2n+2}{k+1} \binom{2n}{k}}{\binom{2n+1}{k} \binom{2n+1}{k+1}} = \frac{\alpha_{2n,k}}{\alpha_{2n+1,k}} = \frac{k+1}{2n+1} \times \frac{2n+2}{k+1} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$3. \text{ On a } \frac{1}{\binom{2n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{2n+1}{k+1}} = \frac{\binom{2n+1}{k} + \binom{2n+1}{k+1}}{\binom{2n+1}{k} \binom{2n+1}{k+1}} = \frac{\binom{2n+2}{k+1}}{\binom{2n+1}{k} \binom{2n+1}{k+1}} \text{ d'après Pascal. d'où}$$

$$\binom{2n}{k} \times \left(\frac{1}{\binom{2n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{2n+1}{k+1}} \right) = \frac{\binom{2n+2}{k+1} \binom{2n}{k}}{\binom{2n+1}{k} \binom{2n+1}{k+1}} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

ce qui donne bien le résultat demandé!

4. On a donc

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{2n+1}{2n+2} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{\binom{2n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{2n+1}{k+1}} \right) \\
 &= \frac{2n+1}{2n+2} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n+1}{k}} + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n+1}{k+1}} \right) \\
 &= \frac{2n+1}{2n+2} \left(\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\binom{2n+1}{k}} - \frac{(-1)^{k+1-1}}{\binom{2n+1}{k+1}} \right)
 \end{aligned}$$

Eh eh, le pirate! Bref

$$S_n = \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{(-1)^{1-1}}{\binom{2n+1}{1}} - \frac{(-1)^{2n-1}}{\binom{2n+1}{2n}} \right) = \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{-1}{2n+1} \right) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice de khôlle 55

1. Montrer que pour $x \in]0, +\infty[$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

Solution :

1. Plein de méthodes, dont l'étude de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, mais qui semble compliquée lorsque l'on a remarqué que

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

2. On a

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \right)
 \end{aligned}$$

Mais avec 1 appliquée à $x = \left(\frac{a}{b}\right)^k$, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \geq 2$ d'où

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 2 = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

Exercice de khôlle 56

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le n ème nombre triangulaire par $t_n = \binom{n+1}{2}$ et pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on définit les coefficients triangulaires par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\left(\prod_{i=1}^k t_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-k} t_i\right)}$$

Dans toutes les questions k et n sont des entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

1. Que valent $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$?
2. Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}$.
3. Comparer $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$.
4. Montrer que

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k} \binom{n+2}{k+1} - \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}$$

5. En déduire que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \in \mathbb{N}$.

Solution :

$$1. \text{ On a } \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\left(\prod_{i=1}^0 t_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)} = \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)} = 1 \text{ par convention du produit vide. Puis } \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\left(\prod_{i=1}^1 t_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} t_i\right)} = \frac{t_n \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} t_i\right)}{t_1 \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} t_i\right)} = \frac{t_n}{t_1} = \frac{\binom{n+1}{2}}{\binom{2}{2}} = \frac{n+1}{2}.$$

2. On a, pour $1 \leq p \leq n$

$$\prod_{i=1}^p t_i = \prod_{i=1}^p \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2^p} \left(\prod_{i=1}^p i\right) \left(\prod_{i=1}^p (i+1)\right) = \frac{p!(p+1)!}{2^p}$$

$$\text{car } \prod_{i=1}^p (i+1) = \prod_{j=i+1}^{p+1} j = \prod_{j=1}^{p+1} j = (p+1)!$$

et compte tenu de ce qui précède, on vérifie que

$$1 = \prod_{i=1}^0 t_i = \frac{0!(0+1)!}{2^0}$$

L'égalité $\prod_{i=1}^p t_i = \frac{p!(p+1)!}{2^p}$ est donc vraie si $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On en déduit que

$$\left(\prod_{i=1}^k t_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-k} t_i\right) = \frac{k!(k+1)!}{2^k} \times \frac{(n-k)!(n-k+1)!}{2^{n-k}} = \frac{k!(k+1)!(n-k)!(n-k+1)!}{2^n}$$

d'où

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= \frac{\frac{n!(n+1)!}{2^n}}{k!(k+1)!(n-k)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \times \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &\stackrel{(n+1)! = (n+1) \times n!}{=} \frac{1}{(n+1)} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \times \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

3. On se dit qu'ils doivent être égaux ! C'est bien le cas car

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\left(\prod_{i=1}^k t_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n-k} t_i\right)} \text{ et } \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \frac{\prod_{i=1}^n t_i}{\left(\prod_{i=1}^{n-k} t_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^k t_i\right)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

4. Cela revient à montrer que $\left(\frac{1}{n+1} + 1\right) \binom{n+1}{k+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} \binom{n+2}{k+1}$ donc à prouver que

$$(n+2) \binom{n+1}{k+1} \binom{n+1}{k} = (n+1) \binom{n}{k} \binom{n+2}{k+1}$$

Mais avec la formule du capitaine (qui s'écrit $N \binom{N-1}{p-1} = p \binom{N}{p}$ si $N \geq 1$), on a

$$\begin{aligned} (n+2) \binom{n+1}{k} &= (k+1) \binom{n+2}{k+1} \quad (N = n+2 \text{ et } p = k) \\ (n+1) \binom{n}{k} &= (k+1) \binom{n+1}{k+1} \quad (N = n+1 \text{ et } p = k+1) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

5. On constate donc que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est la différence de deux entiers, donc est dans $\mathbb{Z}$, mais l'égalité $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}$ montre qu'il s'agit d'un nombre positif donc c'est un entier !

Exercice de khôlle 57

(★) Formule d'inversion de Pascal.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, on définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$$

1. Pour prend $x_n = a^n$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Que vaut y_n ?
2. Montrer que $\forall (k, p) \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq p \leq n$ on a

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \binom{p}{k}$$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} y_p$.
4. Vérifier le résultat avec l'exemple où $x_n = a^n$.

Solution :

1. Dans ce cas on a $y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n$ d'après la formule du binôme.
2. Puisque $0 \leq k \leq p \leq n$, les quatre coefficients du binôme qui sont en jeu peuvent s'écrire à l'aide de factorielles.
On a alors

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-k-(p-k))!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!} \\ \binom{n}{p} \binom{p}{k} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{n!}{k!(n-p)!(p-k)!} \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité.

3. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $y_p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x_k$ d'où en posant $S_n = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} y_p$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^n \left((-1)^{n-p} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x_k \right) = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} x_k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq p \leq n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \binom{p}{k} x_k = \sum_{0 \leq k \leq p \leq n} (-1)^{n-p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} x_k \text{ car } \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \binom{p}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=k}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} x_k = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} x_k \sum_{p=k}^n (-1)^{n-p} \binom{n-k}{p-k} \right) \end{aligned}$$

Le changement d'indice $j = p - k$ (et donc $k = p - j$) donne

$$\sum_{p=k}^n (-1)^{n-p} \binom{n-k}{p-k} = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n-k-j} \binom{n-k}{j} = (1-1)^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Conclusion

$$S_n = \binom{n}{n} x_n = x_n$$

Remarque : Cette formule porte le nom de formule d'inversion de Pascal.

1.4 La récurrence.

Exercice de khôlle 58

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{2\sqrt{n+1}}}$ (récurrence)

Solution : Par récurrence, soit $\mathcal{P}(n) = \left\langle \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{2\sqrt{n+1}}} \right\rangle$. Initialisation : $\binom{2}{1} = 2 \leq \frac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie. Hérédité, puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \binom{2n}{n}$$

Si on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, on en déduit que

$$\binom{2n+2}{n+1} \leq \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{4^n}{\sqrt{2\sqrt{n+1}}}$$

Il suffit de prouver que

$$\frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{4^n}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}} \leq \frac{4^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n+2}}$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{4^n}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}} &\leq \frac{4^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n+2}} \iff \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{4}{\sqrt{n+2}} \\ &\iff (2n+1)\sqrt{n+2} \leq 2\sqrt{n+1}(n+1) \text{ (nombres positifs)} \\ &\iff (2n+1)^2(n+2) \leq 4(n+1)(n+1)^2 \\ &\iff \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leq \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{4n+3}{(2n+1)^2} \\ &\iff (2n+1)^2 \leq (4n+3)(n+1) \\ &\iff 4n^2 + 4n + 1 \leq 4n^2 + 7n + 3 \\ &\iff 0 \leq 3n + 2 \text{ vrai} \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$ vraie et ceci termine la récurrence.

Remarque : On a utilisé le fait que si a et b sont des réels positifs, alors $a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$.

Exercice de khôlle 59

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 3 \\ v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)$.

Solution : Par récurrence à deux termes. On définit, pour tout entier n , la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)$ »

Initialisation :

$\mathcal{P}(0)$ vraie car $v_0 = 2^0 \left(1 + \frac{0}{2}\right) = 1$ et $\mathcal{P}(1)$ vraie car $v_1 = 2^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$

Hérédité : On suppose, à n fixé, $n \geq 0$, que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.

Ainsi par hypothèse de récurrence, on a $v_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)$ et $v_{n+1} = 2^{n+1} \left(1 + \frac{n+1}{2}\right)$.

Par définition de la suite $(v_n)_n$, on a $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$.

Ainsi $v_{n+2} = 4 \times 2^{n+1} \left(1 + \frac{n+1}{2}\right) - 4 \times 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right) = 4 \times (2^{n+1} - 2^n) + 4 \left(2^{n+1} \times \frac{n+1}{2} - 2^n \times \frac{n}{2}\right)$
 $= 4 \times 2^n + 4 \left((2^{n+1} - 2^n) \frac{n}{2} + 2^{n+1} \times \frac{1}{2}\right) = 4 \times 2^n + 4 \left(2^n \times \frac{n}{2} + 2^n \times \frac{2}{2}\right) = 4 \times 2^n \left(1 + \frac{n+2}{2}\right)$ ainsi on a $v_{n+2} = 2^{n+2} \left(1 + \frac{n+2}{2}\right)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Exercice de khôlle 60

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$$

Montrer par récurrence forte que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Solution : On définit pour $n \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ = « $u_n = 2^{n-1}$ ». On a $\mathcal{P}(1)$ vraie car $u_1 = 2^0 = 1$. On suppose à $n \geq 1$ fixé que $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$. Ainsi par récurrence forte, on a $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \geq 1$.

Remarque : Pour $n \geq 1$, on a $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ or $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$ donc $u_{n+1} = 2u_n$ ainsi la suite est géométrique de raison 2 à partir du rang 1. On retrouve bien $u_n = 2^{n-1}u_1$ si $n \geq 1$.

Exercice de khôlle 61

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$.

Solution : Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \left\langle \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}} \right\rangle$. Init : $\binom{0}{0} = 1 \leq \frac{4^0}{\sqrt{1}} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

Hérédité :

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n}$$

Donc si on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, on a

$$\binom{2n+2}{n+1} \leq \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$$

Il suffit de montrer que

$$\frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{4^{n+1}}{\sqrt{3n+4}}$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}} &\leq \frac{4^{n+1}}{\sqrt{3n+4}} \iff \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{4}{\sqrt{3n+4}} \\ &\iff (2n+1)\sqrt{3n+4} \leq 2(n+1)\sqrt{3n+1} \text{ (nombres positifs)} \\ &\iff (2n+1)^2(3n+4) \leq 4(n+1)^2(3n+1) \\ &\iff \frac{3n+4}{3n+1} = 1 + \frac{3}{3n+1} \leq \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{4n+3}{(2n+1)^2} \\ &\iff 3(2n+1)^2 \leq (3n+1)(4n+3) \\ &\iff 12n^2 + 12n + 3 \leq 12n^2 + 13n + 3 \text{ vrai} \end{aligned}$$

$$: \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{3n+1}}(4n+2) \leq \frac{4^{n+1}}{n+1} \frac{4n+2}{\sqrt{3n+1}\sqrt{3n+4}} \leq \frac{4}{\sqrt{3n+4}} \iff (2n+1)\sqrt{3n+4} \leq 4n + 8n^2(n+1)\sqrt{3n+1} + 1 \iff$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$ et cela termine la récurrence.

Exercice de khôlle 62

Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$

Solution : Simplement par récurrence, on pose $\mathcal{P}(n) = \left\langle \sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)! \right\rangle$.

Init : pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^0 k! = 0! = 1 \leq (0+1)!$.

Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! = \sum_{k=0}^n k! + (n+1)! \underset{HR_n}{\leq} (n+1)! + (n+1)! = 2(n+1)!$$

Il suffit de prouver que $2(n+1)! \leq (n+2)!$ soit en divisant par $(n+1)! > 0$ (donc ne change pas le sens de l'inégalité) que

$$2 \leq n+2 \text{ ce qui est vrai dès que } n \geq 0$$

Ceci termine la récurrence.

Remarque : On peut aussi se la jouer futé en se souvenant d'un des exercices de la fiche d'exos ! En écrivant que

$$\sum_{k=1}^n kk! = \sum_{k=1}^n (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$$

d'où

$$1 + \sum_{k=1}^n kk! \leq (n+1)!$$

mais pour $k \geq 1$, on a $k! \leq k \times k!$ donc $\sum_{k=1}^n k! \leq \sum_{k=1}^n kk!$ et ainsi

$$1 + \sum_{k=1}^n k! = \sum_{k=0}^n k! \leq 1 + \sum_{k=1}^n kk! \leq (n+1)!$$

Exercice de khôlle 63

(★) Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer qu'il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Que vaut alors $a_n - b_n\sqrt{2}$?
- Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_n + 1}$

Solution :

- Méthode ① : On peut le prouver par récurrence, on pose $\mathcal{P}(n) = \langle \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, (1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \rangle$. C'est vrai si $n = 0$ avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Puis si $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où a_n et b_n sont dans $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^{n+1} &= (1 + \sqrt{2})^n \times (1 + \sqrt{2}) = (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

On pose alors $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ qui sont bien des entiers car a_n et b_n le sont (ne pas oublier de le préciser). Ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

Puis on se dit que si $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, il est fort probable que $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$. Ce que l'on prouve par récurrence. L'initialisation est immédiate et puis si $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2} &= (a_n + 2b_n) - (a_n + b_n)\sqrt{2} = (a_n - b_n\sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) \\ &\stackrel{H.R_n}{=} (1 - \sqrt{2})^n \times (1 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

d'où $a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^{n+1}$.

Méthode ③ : par le binôme

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (\sqrt{2})^{2p} + \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} (\sqrt{2})^{2p+1} \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p + \left(\sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p \right) \sqrt{2} \end{aligned}$$

On pose $a_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p$ et $b_n = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p$ qui sont entiers naturels en tant que somme de produits d'entiers naturels. Puis

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\sqrt{2})^k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} (-\sqrt{2})^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} (-\sqrt{2})^k \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (-\sqrt{2})^{2p} + \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} (-\sqrt{2})^{2p+1} \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p - \left(\sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p \right) \sqrt{2} = a_n - b_n \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. On a alors $a_n^2 - 2b_n^2 \underset{OB}{=} (a_n + \sqrt{2}b_n)(a_n - \sqrt{2}b_n) = (1 + \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^n = (1 - 2)^n = (-1)^n$.

Donc

$$a_n^2 = 2b_n^2 + (-1)^n$$

Si n est impair, on a $a_n^2 - 2b_n^2 = -1$ d'où $a_n^2 + 1 = 2b_n^2$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n^2 + 1} &= \sqrt{2} \sqrt{b_n^2} = \sqrt{2} b_n \text{ et } \sqrt{a_n^2} = a_n \\ \text{car } (a_n, b_n) &\in \mathbb{N}^2 \text{ donc sont positifs} \end{aligned}$$

et ainsi avec $\alpha_n = a_n^2 \in \mathbb{N}$, on a $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_n + 1}$.

Puis si n est pair, on a $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ d'où $a_n^2 = 2b_n^2 + 1$. On pose alors $\alpha_n = 2b_n^2$ ainsi $\sqrt{\alpha_n + 1} = a_n$ et $\sqrt{\alpha_n} = \sqrt{2}b_n$ et c'est gagné.

Exercice de khôlle 64

(★) Soit f définie sur $\mathbb{N}^2$ par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, f(i, 0) = f(0, j) = 1 \text{ et pour } i \times j \neq 0, f(i, j) = f(i-1, j) + f(i, j-1)$$

Montrer par récurrence sur $n = i + j$ que $f(i, j) = \binom{i+j}{i}$

Solution : On ne demande pas de justifier que f est bien définie. On définit

$$\mathcal{P}(n) = \ll \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } i + j = n, f(i, j) = \binom{i+j}{i} \gg$$

Init : Pour $n = 0$, si $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ sont tels que $i + j = 0$ alors $i = j = 0$ et ainsi

$$f(i, j) = f(0, 0) = 1$$

Hérédité : Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang n fixé. Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j = n + 1$. On a trois cas :

Cas ① : $i = 0$ donc $j = n + 1$ et $f(i, j) = f(0, n + 1) = 1 = \binom{n+1}{0}$

Cas ② : $j = 0$ donc $i = n + 1$ et $f(i, j) = f(n + 1, 0) = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ (on peut aussi dire que i et j ont des rôles symétriques et que $\binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j}$).

Cas ③ : $i \times j \neq 0$, dans ce cas

$$f(i, j) = f(i-1, j) + f(i, j-1)$$

Par HR_n puisque $i - 1 + j = i + j - 1$ (et que $i - 1 \geq 0$ et $j - 1 \geq 0$), on a

$$f(i - 1, j) = \binom{i + j - 1}{i - 1} \text{ et } f(i, j - 1) = \binom{i + j - 1}{i}$$

D'après la relation de Pascal, on a

$$\binom{i + j - 1}{i - 1} + \binom{i + j - 1}{i} = \binom{i + j}{i}$$

ce qui prouve que $f(i, j) = \binom{i + j}{i}$.

On a donc prouvé que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie et ceci termine la récurrence.

Exercice de khôlle 65

(★) Montrer que $\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n + 1)!)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : Par récurrence sur n , on montre $\mathcal{P}(n) = \ll \prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n + 1)!)^n \gg$.

Init : c'est vrai si $n = 1$ car $\prod_{k=1}^1 (2k)! = (2 \times 1)! = 2 \geq ((1 + 1)!)^1 = 2$ (en fait c'est même vrai si $n = 0$ car un produit vide vaut 1 et $((0 + 1)!)^0 = 1$).

Hérédité : si $\mathcal{P}(n)$ est vrai au rang n , alors $\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n + 1)!)^n$, puisque

$$\prod_{k=1}^{n+1} (2k)! = \left(\prod_{k=1}^n (2k)! \right) \times (2(n + 1))! \text{ et que } (2(n + 1))! \geq 0$$

on en déduit que

$$\prod_{k=1}^{n+1} (2k)! \geq ((n + 1)!)^n \times (2(n + 1))!$$

Il suffit donc de prouver que

$$((n + 1)!)^n \times (2(n + 1))! \geq ((n + 2)!)^{n+1}$$

Donc en divisant par $((n + 2)!)^{n+1} > 0$ que

$$A = \frac{((n + 1)!)^n \times (2(n + 1))!}{((n + 2)!)^{n+1}} \geq 1$$

Mais $(n + 2)! = (n + 2) \times (n + 1)!$ donc

$$A = \frac{((n + 1)!)^n \times (2(n + 1))!}{((n + 2) \times (n + 1)!)^{n+1}} = \frac{((n + 1)!)^n}{((n + 1)!)^{n+1}} \frac{(2n + 2)!}{(n + 2)^{n+1}} = \frac{(2n + 2)!}{(n + 1)(n + 2)^{n+1}}$$

Regardons un peu ce que vaut ce dernier terme

$$\begin{aligned} \frac{(2n + 2)!}{(n + 1)(n + 2)^{n+1}} &= \frac{(2n + 2)(2n + 1)(2n) \cdots (n + 3)(n + 2) \times (n + 1) \times n \times \cdots \times 2 \times 1}{(n + 1)(n + 2)(n + 2) \cdots (n + 2)} \\ &= \frac{(2n + 2)(2n + 1)(2n) \cdots (n + 3)(n + 2) \times n \times \cdots \times 2 \times 1}{(n + 2)(n + 2) \cdots (n + 2)} \end{aligned}$$

où le dénominateur a $n + 1$ termes

Mais entre $n+2$ et $2n+2$, il y a $(2n+2) - (n+2) + 1 = n+1$ termes, on peut donc écrire

$$A = \frac{2n+2}{n+2} \times \frac{2n}{n+2} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+2} \times n!$$

Puisque $\frac{2n+2}{n+2} \geq 1, \dots, \frac{n+2}{n+2} = 1 \geq 1$, et que $n! \geq 1$, on a le résultat (à savoir $A \geq 1$).

Remarque : Si on veut écrire plus proprement tout cela, on écrit que

$$\begin{aligned} \frac{(2n+2)!}{(n+1)(n+2)^{n+1}} &= \frac{\prod_{k=1}^{2n+2} k}{(n+1)(n+2)^{n+1}} = \frac{\prod_{k=n+2}^{2n+2} k \times (n+1) \times \prod_{k=1}^n k}{(n+1)(n+2)^{n+1}} \\ &= \left(\prod_{k=n+2}^{2n+2} \frac{k}{n+2} \right) \times n! \end{aligned}$$

Puis si $k \geq n+2$, $\frac{k}{n+2} \geq 1$ donc $\prod_{k=n+2}^{2n+2} \frac{k}{n+2} \geq 1$ et $n! \geq 1$ donne bien $A \geq 1$.

Exercice de khôlle 66

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], 2x - f(x) \in [0, 1] \text{ et } f(2x - f(x)) = x$$

- On pose $g(x) = 2x - f(x)$, montrer que $g \circ g(x) = 2g(x) - x$.
- En déduire que pour $n \geq 1$, $g^{(n)}(x) - x = g \circ \cdots \circ g(x) - x = n(g(x) - x)$ puis que $|g(x) - x| \leq \frac{2}{n}$.
- En déduire f .

Solution :

- On a $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ d'après les conditions sur f et $g(g(x)) = 2g(x) - f(g(x)) = 2g(x) - f(2x - f(x)) = 2g(x) - x$.
- Par récurrence sur n . On pose, pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n) = \langle \forall x \in [0, 1], g^{(n)}(x) - x = n(g(x) - x) \rangle$.
On a $\mathcal{P}(1) = \langle \forall x \in [0, 1], g(x) - x = g(x) - x \rangle$, ce qui est clairement vrai (tautologique même). Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à $n \geq 1$ fixé, alors

$$g^{(n+1)}(x) - x = g^{(n)}(g(x)) - x$$

Or d'après $\mathcal{P}(n)$ appliquée à $g(x)$ au lieu de x , on a

$$\begin{aligned} g^{(n)}(g(x)) - g(x) &= n(g(g(x)) - g(x)) \\ &= n(2g(x) - x - g(x)) \\ &= n(g(x) - x) \end{aligned}$$

d'où

$$g^{(n+1)}(x) - x = g^{(n)}(g(x)) - g(x) + g(x) - x = n(g(x) - x) + g(x) - x = (n+1)(g(x) - x)$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence. Puis

$$|g(x) - x| = \frac{1}{n} |g^{(n)}(x) - x| \leq \frac{|g^{(n)}(x)| + x}{n} \leq \frac{2}{n} \text{ car } g^{(n)}(x) \in [0, 1] \text{ et } x \in [0, 1]$$

- Mais alors

$$\forall x \in [0, 1], |g(x) - x| \leq \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'où } g(x) = x$$

et ainsi

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = 2x - g(x) = x$$

Exercice de khôlle 67

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2 \times 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}}$.

Solution : On définit, pour tout entier n , la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \ll u_n = \frac{2 \times 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}} \gg.$$

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie car

$$\frac{2 \times 3^0 - 2^{0-1}}{3^0 - 2^{0-1}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Hérédité : On suppose, à n fixé, $n \geq 0$, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Par définition de la suite

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$$

Par HR_n, on a $u_n = \frac{2 \times 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}}$, d'où

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\frac{4 \times \frac{2 \times 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}} - 2}{\frac{2 \times 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}} + 1}}{1} = \frac{4(2 \times 3^n - 2^{n-1}) - 2(3^n - 2^{n-1})}{(2 \times 3^n - 2^{n-1}) + (3^n - 2^{n-1})} \\ &= \frac{6 \times 3^n - 2^{n+1} + 2^n}{3 \times 3^n - 2 \times 2^{n-1}} = \frac{2 \times 3 \times 3^n - 2 \times 2^n + 2^n}{3 \times 3^n - 2 \times 2^{n-1}} = \frac{2 \times 3^{n+1} - 2^{(n+1)-1}}{3^{n+1} - 2^{(n+1)-1}} \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

Exercice de khôlle 68

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n + 1$.
- En écrivant que $u_{k+1} - u_k = u_k - u_{k-1}$ et en sommant ces égalités pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et $n \geq 1$, retrouver l'expression précédente.

Solution :

- Par récurrence double, on pose $\mathcal{P}(n) : \ll u_n = 3n + 1 \gg$.

C'est clairement vrai si $n = 0$ et $n = 1$, puis si c'est vrai au rang n alors $u_n = 3n + 1$ et $u_{n+1} = 3(n+1) + 1$.

Mais par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2 \times (3(n+1) + 1) - (3n + 1) = 3n + 7 = 3(n+2) + 1$$

Ce qui prouve $\mathcal{P}(n+2)$ et termine la récurrence.

2. On somme cette égalité (qui est vraie)

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1})$$

Par télescopage, on obtient

$$u_{n+1} - u_1 = u_n - u_0$$

d'où pour $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = u_1 - u_0 = 3$$

Ceci prouve que $(u_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique de raison 3 d'où, pour $n \geq 1$

$$u_n = 3(n-1) + u_1 = 3n + 1$$

et on vérifie que $u_0 = 3 \times 0 + 1$.

Remarque : L'égalité $u_{n+1} - u_n = 3$ n'est valable que si $n \geq 1$, mais pour $n = 0$, on a bien $u_{0+1} - u_0 = 3$ donc

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} - u_n = 3$$

on peut donc dire que $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien arithmétique.

Exercice de khôlle 69

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2n - 1$.

Solution : Par récurrence forte. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) = \ll u_n = 2n - 1 \gg$.

Initialisation : On a $u_1 = 1 = 2 \times 1 - 1$, ce qui prouve $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité, on suppose, à $n \geq 1$ fixé, que $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. Par définition de la suite

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n u_k$$

Par HR, on a pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$

$$u_k = 2k - 1$$

d'où

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2n - 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2n - 1 + \frac{2}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \right) \\ &= 2n - 1 + \frac{2}{n^2} \left(2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \right) = 2n - 1 + \frac{2}{n} (n + 1 - 1) \\ &= 2n + 1 = 2(n + 1) - 1 \end{aligned}$$

Ce qui prouve $\mathcal{P}(n + 1)$ et termine la récurrence.

Exercice de khôlle 70

On considère la proposition $\mathcal{P}(n) = \ll \text{L'entier } 10^n + 1 \text{ est un multiple de } 9 \gg$.

1. Montrer que cette propriété est héréditaire.
2. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie à partir d'un certain rang ?

Solution :

1. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n + 1 = 9k$. Mais alors

$$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10 \times (9k - 1) + 1 = 9 \times (10k - 1)$$

est un multiple de 9.

2. Non elle ne l'est jamais !

Avec l'arithmétique, on a $10 \equiv 1 \pmod{9}$ donc $10^n + 1 \equiv 2 \pmod{9}$ donc 9 ne divise jamais 10^n .

Sans l'arithmétique, on a $10 = 9 + 1$ donc

$$10^n + 1 = (9 + 1)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 9^k$$

On en déduit que

$$10^n + 1 = 1 + 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 9^k = 2 + 9 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 9^{k-1} = 2 + 9 \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} 9^i}_{\in \mathbb{N}}$$

donc n'est pas divisible par 9.

Remarque : Dans le calcul précédent, si $n = 0$, on a bien $10^0 + 1 = 2 = 2 + 9 \underbrace{\sum_{i=0}^{-1} \binom{n}{i+1} 9^i}_{=0}$.

Exercice de khôlle 71

Autour des décompositions en fractions égyptiennes de l'unité.

1. Déterminer trois entiers naturels (non nuls!) $a_1 < a_2 < a_3$ tels que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$.

Avez-vous une idée pour trouver $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ entiers naturels tels que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 1$?

2. Soit $n \geq 2$ et $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ des entiers tels que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1$, justifier que $a_1 \geq 2$.

Est-il possible de trouver deux entiers naturels $a_1 < a_2$ tels que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1$?

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, il existe des entiers $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ tels que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1$.

Solution :

1. Facile $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Pour 4, on a $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$.

2. Si $a_1 \leq 1$ alors $a_1 = 1$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k} = 1$ d'où

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k} = 0$$

Mais puisque $n \geq 2$ et $a_k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k} > 0$ absurde. Conclusion $a_1 \geq 2$

Si $n = 2$, on a alors $a_1 \geq 2$ et $a_2 \geq 3$ donc $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$, impossible !

3. Par récurrence sur n , on définit donc

$$\mathcal{P}(n) = \ll \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n, a_1 < a_2 < \dots < a_n \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1 \gg$$

Pour $n = 3$ c'est vrai. Puis si c'est vrai au rang n , il existe $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ entiers tels que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1$ d'où

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1. \text{ On pose alors}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2, \alpha_2 = 2a_1, \alpha_3 = 2a_2, \dots, \alpha_{n+1} = 2a_n \\ \text{ainsi } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k} &= 1 \end{aligned}$$

ainsi

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ et } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha_k} = 1$$

Enfin, on sait que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ donc $\alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_{n+1}$. La question 2) nous dit que $a_1 \geq 2$ donc $\alpha_1 = 2a_1 \geq 4 > \alpha_1$. Ce qui montre que

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n+1}$$

et établit $\mathcal{P}(n+1)$. Ceci termine la récurrence.

Remarques (i.e. questions que je garde en réserve si je tombe sur un champion !) :

On peut aussi remarquer que si $a \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$ d'où, pour $n \geq 3$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} \right) + \frac{1}{a_n} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} \right) + \frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{a_n(a_n + 1)}$$

On pose alors $\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \dots, \alpha_{n-1} = a_{n-1}, \alpha_n = a_n + 1$ et $\alpha_{n+1} = a_n(a_n + 1)$.

On a bien $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1}$, puis $\alpha_{n-1} = a_{n-1} < a_n < a_n + 1 = \alpha_n$ et enfin, puisque $a_n > a_1 \geq 2$, on a $\alpha_{n+1} = a_n \alpha_n \geq 2\alpha_n > \alpha_n$ (car $\alpha_n \geq 1$). Ceci donne une seconde méthode pour l'hérédité.

Par exemple, la décomposition

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

donne

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

alors que la première méthode a donné

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

Pour 5 termes, on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}, \text{ méthode 1} \\ 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1806}, \text{ méthode 2} \end{aligned}$$

Si on creuse un peu la première méthode, on se rend compte que cela revient à écrire, pour une décomposition

en n termes,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2^{n-4}} + \frac{1}{2^{n-3}} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2} \right)^k + \frac{1}{6 \times 2^{n-4}} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{1}{2} \right)^k + \frac{1}{6 \times 2^{n-4}} \times \frac{3}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{6 \times 2^{n-4}} \times \frac{3}{2} = 1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} = 1
 \end{aligned}$$

On a donc $a_1 = 2, \dots, a_k = 2^k, \dots, a_{n-2} = 2^{n-2}$, $a_{n-1} = 6 \times 2^{n-4} = 3 \times 2^{n-3} = 2^{n-2} + 2^{n-3}$ et $a_n = 2a_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2}$. Bref, cela s'écrit donc

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2} + 2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-1} + 2^{n-2}}$$

Alors que la seconde méthode nous invite à définir la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (dite de Sylvester) par

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 1, u_1 = 2 = 1 + 1 \\
 u_2 &= 3 = 1 \times 2 + 1 \\
 u_3 &= 7 = 1 \times 2 \times 3 + 1 \\
 u_4 &= 43 = 1 \times 2 \times 3 \times 7 + 1 \\
 u_5 &= 1807 = 1 \times 2 \times 3 \times 7 \times 43 + 1 \\
 u_{n+1} &= u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n + 1
 \end{aligned}$$

on a alors, pour $n \geq 3$

$$1 = \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_n - 1}$$

En effet, par récurrence

$$\frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \underbrace{\left(\frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_n - 1} \right)}_1 - \frac{1}{u_n - 1} + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

Mais (en utilisant $u_{n+1} - 1 = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$ au rangs n et $n-1$)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} &= \frac{1}{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n} - \frac{1}{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1}} \\
 &= \frac{1}{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1}} \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right) \\
 &= \frac{1 - u_n}{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} u_n} = \frac{-u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1}}{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} u_n} \\
 &= -\frac{1}{u_n}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 1$$

On peut aussi formuler ceci sous la forme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = 1 + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n - 1} = 1 - \frac{1}{u_n (u_n - 1)} = 1 - \frac{1}{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}$$

Par exemple

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} = 1 - \frac{1}{2 \times 3 \times 7 \times 43 \times 1807}$$

Joli non ? Une dernière remarque, on a également, pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ (car $u_n^2 - u_n + 1 = u_n(u_n - 1) + 1$).

Exercice de khôlle 72

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$$

1. Calculer u_1 .

2. Montrer par récurrence que $u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$.

Solution :

1. Simple calcul, $u_1 = \frac{2 \times 0 + 2}{2 \times 0 + 5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.

2. Par récurrence, on pose $\mathcal{P}(n) \llcorner u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$. C'est vrai si $n = 0$ car $u_0 = \frac{2}{3}$ et $\frac{2^{2 \times 0 + 3} (0+2)! 0!}{(2 \times 0 + 4)!} = \frac{2^3 \times 2 \times 1}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

Puis si c'est vrai au rang n alors par définition de la suite et par HR_n

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n = \frac{2n+2}{2n+5} \times \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$$

Or (on sait ce que l'on cherche)

$$\begin{aligned} \frac{2^{2(n+1)+3} (n+3)! (n+1)!}{(2(n+1)+4)!} &= \frac{2^{2n+5} (n+3)! (n+1)!}{(2n+6)!} \\ &= \frac{2^{2n+3} \times 2^2 \times (n+3) (n+2)! \times (n+1) n!}{(2n+6) (2n+5) (2n+4)!} \\ &= \frac{2^2 \times (n+3) \times (n+1)}{(2n+6) (2n+5)} \times \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!} \\ &= \frac{2^2 \times (n+3) \times (n+1)}{2(n+3) (2n+5)} \times \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!} \\ &= \frac{2n+2}{2n+5} \times \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u_{n+1} = \frac{2^{2(n+1)+3} (n+3)! (n+1)!}{(2(n+1)+4)!}$ et établit $\mathcal{P}(n+1)$. Ceci conclut la récurrence.

Exercice de khôlle 73

Montrer que pour $n \geq 1$, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \leq \frac{4n+3}{6} \sqrt{n}$.

Solution : Par récurrence sur $n \geq 1$, on pose $\mathcal{P}(n) = \ll \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{4n+3}{6} \sqrt{n} \gg$.

Init : Pour $n = 1$, on a $\sqrt{1} = 1$ et $\frac{4n+3}{6} \sqrt{n} = \frac{7}{6} \geq 1$ ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : on suppose, à $n \geq 1$ fixé, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} + \sqrt{n+1}$$

Par HR_n, $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{4n+3}{6} \sqrt{n}$ d'où $\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} \leq \frac{4n+3}{6} \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. Il suffit donc de prouver l'inégalité

$$(I) \quad \frac{4n+3}{6} \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \frac{4(n+1)+3}{6} \sqrt{n+1}$$

or

$$\begin{aligned} (I) &\iff \frac{4n+3}{6} \sqrt{n} \leq \frac{4(n+1)+3}{6} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} = \frac{4n+1}{6} \sqrt{n+1} \\ &\iff (4n+3)^2 \times n \leq (4n+1)^2 \times (n+1) \text{ car les deux membres sont positifs} \\ &\iff 16n^3 + 24n^2 + 9n \leq 16n^3 + 24n^2 + 9n + 1 \\ &\iff 0 \leq 1 \text{ ce qui est vrai} \end{aligned}$$

Ceci prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

Exercice de khôlle 74

Soit ABC un vrai triangle rectangle en C et de côtés $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Montrer que $\forall n \geq 3$, $c^n > a^n + b^n$.

Solution : Soit $\mathcal{P}(n) = \ll c^n > a^n + b^n \gg$. Pour $n = 3$, il s'agit de prouver que $c^3 > a^3 + b^3$. Mais (il faut bien utiliser ABC rectangle) $c^2 = a^2 + b^2$ d'où $c^3 = ca^2 + cb^2$. Puis $c^2 > a^2$ car $b \neq 0$ donc (croissance de la fonction racine carrée) $c > a$ d'où $ca^2 > a^3$. De même (symétrie des rôles de A et B), on a $cb^2 > b^3$ d'où $c^3 > a^3 + b^3$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n \geq 3$ fixé alors $c^n > a^n + b^n$ d'où $c^{n+1} > ca^n + cb^n$. De la même manière $ca^n > a^{n+1}$ et $cb^n > b^{n+1}$, ce qui donne $c^{n+1} > a^{n+1} + b^{n+1}$. Ceci prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et conclut la récurrence.

Exercice de khôlle 75

(**) Montrer par récurrence sur n que

$$\sum_{A \subset \llbracket 1; n \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} = n + 1$$

Par exemple, pour $n = 2$, les parties A de $\llbracket 1; 2 \rrbracket$ sont $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ et

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \times 2} = 3$$

Solution : On pose $\mathcal{P}(n) = \ll \sum_{A \subset \llbracket 1; n \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} = n + 1 \gg$. Pour $n = 1$, les parties A de $\llbracket 1; 1 \rrbracket$ sont $\emptyset$ et $\{1\}$. On a

$$\frac{1}{\prod_{a \in \emptyset} a} = \frac{1}{1} \text{ et } \frac{1}{\prod_{a \in \{1\}} a} = \frac{1}{1} \text{ d'où } \sum_{A \subset \llbracket 1; 1 \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} = 1 + 1 = 2. \text{ Ceci prouve que } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie.}$$

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n \geq 1$. Les parties de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ sont de deux types. Celle qui ne contiennent pas $n+1$ et celle qui le contienne. Dans le premier cas, si $n+1 \notin A$ alors $A \subset \llbracket 1; n \rrbracket$. Dans le second cas, peut écrire $A = B \cup \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$ où $B \subset \llbracket 1; n \rrbracket$. En sommant par paquets, on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{A \subset \llbracket 1; n+1 \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} &= \sum_{\substack{A \subset \llbracket 1; n+1 \rrbracket \\ n+1 \notin A}} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} + \sum_{\substack{A \subset \llbracket 1; n+1 \rrbracket \\ n+1 \in A}} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} \\ &= \sum_{A \subset \llbracket 1; n \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} + \sum_{B \subset \llbracket 1; n \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in B \cup \{n+1\}} a} \end{aligned}$$

Par HR_n, on a $\sum_{A \subset \llbracket 1; n \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} = n+1$. Pour la seconde somme, si $B \subset \llbracket 1; n \rrbracket$ alors

$$\prod_{a \in B \cup \{n+1\}} a = (n+1) \times \prod_{a \in B} a \quad (\text{car } B \cap \{n+1\} = \emptyset)$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{B \subset \llbracket 1; n \rrbracket \\ a \in B \cup \{n+1\}}} \frac{1}{\prod_{a \in B \cup \{n+1\}} a} &= \sum_{B \subset \llbracket 1; n \rrbracket} \frac{1}{(n+1) \prod_{a \in B} a} = \frac{1}{n+1} \sum_{B \subset \llbracket 1; n \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in B} a} = 1 \\ \text{car par HR}_n, \text{ on a } \sum_{B \subset \llbracket 1; n \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in B} a} &= n+1. \end{aligned}$$

Au final, on a donc

$$\sum_{A \subset \llbracket 1; n+1 \rrbracket} \frac{1}{\prod_{a \in A} a} = n+1 + \frac{n+1}{n+1} = n+2$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

Exercice de khôlle 76

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels, montrer par récurrence sur n que

$$x_1 + (1-x_1)x_2 + \dots + (1-x_1)\dots(1-x_{n-1})x_n + (1-x_1)\dots(1-x_{n-1})(1-x_n) = 1$$

i.e. que

$$\sum_{k=1}^n \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) + \prod_{j=1}^n (1-x_j) = 1$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k \times k!}{n^k} \binom{n}{k} = n$$

Solution :

1. On pose donc $\mathcal{P}(n) = \left\langle \sum_{k=1}^n \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) + \prod_{j=1}^n (1-x_j) = 1 \right\rangle$. On a

$$\mathcal{P}(1) = \left\langle \sum_{k=1}^1 \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) + \prod_{j=1}^1 (1-x_j) = 1 \right\rangle$$

Ce qui est vrai car $\sum_{k=1}^1 \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) = x_1 \times \prod_{j=1}^0 (1-x_j) = x_1$ et $\prod_{j=1}^1 (1-x_j) = 1-x_1$. On suppose, à $n \geq 1$ fixé, que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) &= \sum_{k=1}^n \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) + x_{n+1} \prod_{j=1}^n (1-x_j) \\ \prod_{j=1}^{n+1} (1-x_j) &= (1-x_{n+1}) \prod_{j=1}^n (1-x_j) = \prod_{j=1}^n (1-x_j) - x_{n+1} \prod_{j=1}^n (1-x_j) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) + \prod_{j=1}^{n+1} (1-x_j) &= \sum_{k=1}^n \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) + x_{n+1} \prod_{j=1}^n (1-x_j) + \prod_{j=1}^n (1-x_j) - x_{n+1} \prod_{j=1}^n (1-x_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(x_k \prod_{j=1}^{k-1} (1-x_j) \right) + \prod_{j=1}^n (1-x_j) = 1 \text{ par } HR_n \end{aligned}$$

2. Il s'agit d'écrire $\sum_{k=1}^n \frac{k \times k!}{n^k} \binom{n}{k}$ sous une forme proche de ce qui précède (à un facteur n près). Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k \times k!}{n^k} \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{k \times k!}{n^{k+1}} \frac{n!}{k! (n-k)!} \text{ car si } k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^{k+1}} \frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^{k+1}} n(n-1) \cdots (n-k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^k} \prod_{j=1}^{k-1} (n-j) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \end{aligned}$$

Si on pose $x_j = \frac{j}{n}$ on a alors $x_n = 1$ d'où $\prod_{j=1}^n (1-x_j) = 0$ (le dernier terme est nul) d'où

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \right) = 1$$

et ainsi $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k \times k!}{n^k} \binom{n}{k} = 1$ d'où le résultat.

Exercice de khôlle 77

(★) Une preuve de l'inégalité Arithmético-Géométrique par Oskar Schlömilch (1858).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour $z \in \mathbb{R}$, $(1-z)^2(1+2z+3z^2+\dots+nz^{n-1}) = 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}$.
Indication : on pourra dériver une fonction judicieusement choisie, puis ne pas oublier le cas particulier.
2. En déduire que si $z \geq 0$, on a $1 + nz^{n+1} \geq (n+1)z^n$ et préciser le cas d'égalité.
3. En posant $z = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ en déduire que $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2$, on a

$$nx + y \geq (n+1) \times (x^n y)^{\frac{1}{n+1}}$$

et préciser le cas d'égalité

4. Montrer par récurrence sur n que si $(a_1, \dots, a_n) \in [0, +\infty[^n$, on a

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

avec égalité si et seulement si tous les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont égaux.

Cette dernière inégalité porte le nom d'inégalité Arithmético-Géométrique.

Solution :

1. Si $z = 1$ l'égalité est vraie, sinon elle s'écrit

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} = \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

Le terme de gauche est la dérivée de $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ évalué en z ! On sait que pour $x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

On pose donc $f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et de dérivée égale à

$$\frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \text{ car } (x-1)^2 = (1-x)^2$$

Mais si $x \neq 1$, on a aussi $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ d'où l'égalité si $x \neq 1$ (et comme elle est aussi vraie en $x = 1$, c'est bon !).

2. Si $z \geq 0$, on a donc $1 + nz^{n+1} = (n+1)z^n + (1-z)^2(1+2z+3z^2+\dots+nz^{n-1}) \geq (n+1)z^n$ car $(1-z)^2(1+2z+3z^2+\dots+nz^{n-1}) \geq 0$. Il y a égalité si et seulement si

$$(1-z)^2(1+2z+3z^2+\dots+nz^{n-1}) = 0$$

Puisque $1+2z+3z^2+\dots+nz^{n-1} \geq 1 > 0$, il y a égalité si et seulement si $z = 1$.

3. Si $y = 0$, on a $nx + y = nx \geq 0$ et $(n+1) \times (x^n y)^{\frac{1}{n+1}} = 0$ d'où $nx + y \geq (n+1) \times (x^n y)^{\frac{1}{n+1}}$ avec égalité si et seulement si $x = y = 0$. Si $y \neq 0$, on pose $z = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ dans l'inégalité précédente, ce qui donne

$$1 + n\frac{x}{y} \geq (n+1) \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

en multipliant par y , on obtient

$$nx + y \geq (n+1) \times y \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

Mais $y \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}} = y \left(\left(\frac{x}{y}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(y^{n+1} \times \left(\frac{x}{y}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} = (x^n y)^{\frac{1}{n+1}}$ d'où le résultat.

Il y a égalité si et seulement si $x = y = 0$ ou si $z = 1$, i.e. $x = y$. Donc dans tous les cas, il y a égalité si et seulement si $x = y$.

4. Par récurrence on pose $\mathcal{P}(n)$ = «si $(a_1, \dots, a_n) \in [0, +\infty[^n$, on a $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, avec égalité si et seulement si tous les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont égaux».

Pour $n = 1$, on a bien $\frac{a_1}{1} \geq \sqrt[1]{a_1} = a_1$. Bon, ok c'est un peu une arnaque ! Pour $n = 2$, on a

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2$.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n \geq 1$. Soient $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in [0, +\infty[^{n+1}$, on pose $\mathcal{A} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ et $\mathcal{G} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. On a alors

$$a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = n\mathcal{A} + a_{n+1} \geq (n+1) \times (\mathcal{A}^n a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

Mais $\mathcal{A} \geq \mathcal{G}$ par HR_n et comme il s'agit de nombres positifs, on en déduit que $\mathcal{A}^n \geq \mathcal{G}^n = a_1 a_2 \dots a_n$ puis (on a $a_{n+1} \geq 0$) que

$$\mathcal{A}^n a_{n+1} \geq a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$$

Conclusion

$$a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} \geq (n+1) \times (a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

En divisant par $n+1$, et avec $u^{\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+1]{u}$, on a l'inégalité A-G au rang $n+1$. Enfin, il y a égalité entre $\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1}$ et $(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$ si et seulement si il y a égalité entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ et si $n\mathcal{A} = a_{n+1}$. Par HR_n, on a $\mathcal{A} = \mathcal{G}$ si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$. Puis $n\mathcal{A} = a_1 = \dots = a_n = a_{n+1}$. Bref, l'égalité n'est possible, au rang $n+1$, que si tous les $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont égaux ! Ceci prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

CHAPITRE 2

TRIGONOMETRIE ET COMPLEXES.

2.1 Trigonométrie élémentaire ou pas !

Exercice de khôlle 78

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $-1 \leq \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \leq 1$.
2. On suppose $\alpha \notin \{-1, 1\}$, soit $x \in [\pi, 2\pi]$ tel que $\cos(x) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$, calculer $\sin x$, $\tan x$.

Solution :

1. Une double inégalité, ce sont bien deux égalités (eh oui, je sais, cela laisse pantois). On a, puisque $1 + \alpha^2 > 0$

$$\frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \leq 1 \iff 1 - \alpha^2 \leq 1 + \alpha^2 \iff 0 \leq 2\alpha^2$$

Puisque $0 \leq 2\alpha^2$ est vraie, il en est de même de $\frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \leq 1$. De même

$$-1 \leq \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \iff -(1 + \alpha^2) \leq 1 - \alpha^2 \iff 0 \leq 2 \text{ qui est vrai}$$

Ceci prouve que $-1 \leq \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \leq 1$.

2. On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}\right)^2 = \frac{(1 + \alpha^2)^2 - (1 - \alpha^2)^2}{(1 + \alpha^2)^2} \stackrel{OB}{=} \frac{2\alpha^2 \times 2}{(1 + \alpha^2)^2} = \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}\right)^2$, d'où

$$|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} = \left| \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \right| = \frac{2|\alpha|}{1 + \alpha^2}$$

Mais si $\alpha \in [\pi, 2\pi]$, alors $\sin x \leq 0$ donc

$$\sin x = -\frac{2|\alpha|}{1 + \alpha^2} \text{ puis } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2|\alpha|}{1 - \alpha^2} \text{ (} \cos x \neq 0 \text{ car } \alpha \notin \{-1, 1\} \text{)}$$

Exercice de khôlle 79

- Montrer que pour $x \neq \frac{\pi}{2}$ (π), on a $\frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 4 \cos^2 x - 3$ (écrire $3x = 2x + x$).
- Montrer que $(4 \cos^2(9^\circ) - 3)(4 \cos^2(27^\circ) - 3) = \tan(9^\circ)$ (angles en degré).
- On veut généraliser le résultat et calculer $P_n = \prod_{k=0}^{4n-3} (4 \cos^2(3^k \times 9^\circ) - 3)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 81^n - 81$ est divisible par 360.
 - Montrer que $P_n = \tan(9^\circ)$.
 - Que dire de $\prod_{k=0}^{4n-1} (4 \cos^2(3^k \times 9^\circ) - 3)$?

Solution :

- Banal, on a

$$\begin{aligned}
 \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos(x) - \sin(2x) \sin(x) \\
 &= (2 \cos^2(x) - 1) \cos(x) - 2 \sin^2(x) \cos(x) \\
 &= \cos(x) \times (2 \cos^2(x) - 1 - 2(1 - \cos^2(x))) \\
 &= \cos(x) \times (4 \cos^2(x) - 3)
 \end{aligned}$$

- On a donc $(4 \cos^2(9^\circ) - 1)(4 \cos^2(27^\circ) - 1) = \frac{\cos(27^\circ)}{\cos(9^\circ)} \times \frac{\cos(81^\circ)}{\cos(27^\circ)} = \frac{\cos(90^\circ - 9^\circ)}{\cos(9^\circ)} = \frac{\sin(9^\circ)}{\cos(9^\circ)} = \tan(9^\circ)$.

Remarque : On peut aussi montrer que $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 4 \cos^2 x - 1$ pour obtenir

$$(4 \cos^2(9^\circ) - 1)(4 \cos^2(27^\circ) - 1) = \cotan(9^\circ)$$

-

- On pose $\mathcal{P}(n)$ = « $81^n - 81$ est divisible par 360». C'est clairement vrai si $n = 1$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang n alors

$$81^{n+1} - 81 = 81 \times (81^n - 81) + 81^2 - 81$$

Il suffit de prouver que 360 divise $81^2 - 81$ (i.e. que $\mathcal{P}(2)$ est vraie). Mais

$$81^2 - 81 = 81 \times 80 = 9 \times 9 \times 10 \times 4 \times 2, \quad 360 = 4 \times 90 \text{ d'où } 81 \times 80 = 18 \times 360$$

Ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

- On a alors

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^{4^n-3} (4 \cos^2(3^k \times 9^\circ) - 1) &= \prod_{k=0}^{4^n-3} \left(\frac{\cos(3 \times 3^k \times 9^\circ)}{\cos(3^k \times 9^\circ)} \right) = \prod_{k=0}^{4^n-3} \left(\frac{\cos(3^{k+1} \times 9^\circ)}{\cos(3^k \times 9^\circ)} \right) \\
 &= \frac{\cos(3^{4^n-2} \times 9^\circ)}{\cos(9^\circ)} = \frac{\cos(3^{4^n} \times 9^\circ)}{\cos(9^\circ)}
 \end{aligned}$$

Puisque $3^{4^n} = 81^n$ on a $3^{4^n} \times 9^\circ = 81^n \times 9^\circ = 90^\circ - 9^\circ$ modulo 360, d'où le résultat.

- Cette fois ci $\prod_{k=0}^{4^n-1} (4 \cos^2(3^k \times 9^\circ) - 1) = \frac{\cos(3^{4^n} \times 9^\circ)}{\cos(9^\circ)} = \frac{\cos(9 \times 3^{4^n} \times 9^\circ)}{\cos(9^\circ)}$. Mais

$$9 \times 3^{4^n} = 9 \times 81^n = 729^n = 9 + 2 \times 360 = 9 \text{ modulo } 360$$

d'où $\cos(9 \times 3^{4^n} \times 9^\circ) = \cos(9^\circ)$ et $\prod_{k=0}^{4^n-1} (4 \cos^2(3^k \times 9^\circ) - 1) = 1$.

Exercice de khôlle 80

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(4 \cos^2(x) - 3)(4 \cos^2(x) - 1) = 4 \cos^2(2x) - 1$.

2. En déduire la valeur de

$$\left(4 \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 3\right) \left(4 \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1\right)$$

Solution :

1. Méthode ① : On pose $a = \cos x$, on développe pour avoir $(4a^2 - 3)(4a^2 - 1) = 16a^4 - 16a^2 + 3$. Puis $4 \cos^2(2x) - 1 = 4 \times (2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 = 4 \times (2a^2 - 1)^2 - 1 = 16a^4 - 16a^2 + 3$.

Méthode ② : On remarque que

$$\begin{aligned} (4a^2 - 3)(4a^2 - 1) &= ((4a^2 - 2) - 1) \times ((4a^2 - 2) + 1) \\ &= (4a^2 - 2)^2 - 1 \\ &= 4(2a^2 - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

2. On a donc $(4 \cos^2(\frac{\pi}{24}) - 3)(4 \cos^2(\frac{\pi}{24}) - 1) = 4 \cos^2(\frac{\pi}{12}) - 1$, ce qui nous avance un peu mais pas totalement. Mais

$$4 \cos^2(2x) - 1 = 2 \times (2 \cos^2(2x) - 1) + 1 = 2 \cos(4x) + 1$$

$$\text{d'où } 4 \cos^2\left(2 \times \frac{\pi}{24}\right) - 1 = 2 \cos\left(4 \times \frac{\pi}{24}\right) + 1 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \sqrt{3} + 1.$$

Exercice de khôlle 81

Soient $(x, y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$ non nuls et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c, \quad b \sin^2 y + a \cos^2 y = d \quad \text{et} \quad a \tan x = b \tan y \quad (*)$$

alors lorsque les quotients existent, $\frac{a^2}{b^2}$ est égal à

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \frac{(a-d)(c-a)}{(b-c)(d-b)} & \textcircled{2} \frac{(a+d)(c+a)}{(b+c)(d+b)} \\ \textcircled{3} \frac{(a-d)(b-a)}{(a-c)(c-b)} & \textcircled{4} \frac{(d-a)(c-a)}{(b-c)(d-b)} \end{array}$$

Solution : On part de $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\tan^2 y}{\tan^2 x}$. En divisant $a \sin^2 x + b \cos^2 x = c$ par $\cos^2 x$ (qui n'est pas nul), on obtient $a \tan^2 x + b = \frac{c}{\cos^2 x} = c(1 + \tan^2 x)$ d'où

$$\tan^2(x)(a - c) = c - b$$

et de même $\tan^2(y)(b - d) = d - a$ d'où (on suppose que $a \neq c$ et

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{(d-a)(a-c)}{(c-b)(b-d)} \quad \text{réponse } \textcircled{1}$$

Exercice de khôlle 82

(★) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x) \sin(2x)$.

1. Etudier les variations de f sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Indication : mettre $f'(x)$ sous la forme $f'(x) = 2 \sin^2(x) g(\cos(x))$.

2. Soit $r \in \mathbb{R}$, on rappelle que la partie entière de r , notée $[r]$, est l'unique entier (relatif) tel que

$$[r] \leq r < [r] + 1$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{2} \leq x - k\pi < \frac{\pi}{2}$.

3. Dédurre des questions précédentes que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \prod_{k=0}^n f(2^k x)$ et $v_n = \prod_{k=0}^n \sin(2^k x)$.

(a) Pour $n \geq 1$, montrer que $v_n^3 = \sin(x) \sin^2(2^n x) \times u_{n-1}$.

(b) En déduire que pour $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Solution : Avant tout f est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Pour $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \sin(2x) + 2 \sin^2(x) \cos(2x) \\ &= 4 \sin^2(x) \cos^2(x) + 2 \sin^2(x) (2 \cos^2(x) - 1) \\ &= 2 \sin^2(x) \times (4 \cos^2(x) - 1) = 4 \sin^2(x) \times (2 \cos(x) + 1) \left(\cos(x) - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Sur I , on $\cos \geq 0$, ainsi $f'(x)$ est du signe de $\cos(x) - \frac{1}{2}$. Par décroissance du cosinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a les variations suivantes

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x) - \frac{1}{2}$	+		-
$f'(x)$	0	$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$	0

2. Si $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, l'inégalité

$$-\frac{\pi}{2} \leq x - k\pi < \frac{\pi}{2}$$

équivaut à

$$k \leq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} < k + 1$$

Ainsi $k = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ répond à la question.

3. La fonction f est impaire donc

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \text{ on a } -x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } |f(x)| = |-f(-x)| = f(-x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Ainsi

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], |f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Puis f est π -périodique, ainsi pour $x \in \mathbb{R}$ et k tel que $-\frac{\pi}{2} \leq x - k\pi < \frac{\pi}{2}$, on a

$$|f(x)| = |f(x - k\pi)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

4. (a) On a

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= \prod_{k=0}^{n-1} f(2^k x) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin^2(2^k x) \sin(2 \times 2^k x) \\ &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin(2^k x) \right)^2 \times \prod_{k=0}^{n-1} \sin(2^{k+1} x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin(2^k x) \right)^2 \times \prod_{j=1}^n \sin(2^j x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sin(x) \sin^2(2^n x) \times u_{n-1} &= \left(\sin(2^n x) \times \prod_{k=0}^{n-1} \sin(2^k x) \right)^2 \times \sin(x) \prod_{j=1}^n \sin(2^j x) \\ &= \prod_{k=0}^n \sin(2^k x) \times \prod_{j=1}^n \sin(2^j x) = v_n^3 \end{aligned}$$

(b) On a montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ d'où, pour $n \geq 1$

$$|u_{n-1}| = \left| \prod_{k=0}^{n-1} f(2^k x) \right| \leq \prod_{k=0}^{n-1} |f(2^k x)| \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right)^n$$

d'où

$$|v_n^3| = |v_n|^3 = |\sin(x) \sin^2(2^n x)| \times |u_{n-1}| \leq |\sin(x)| \sin^2(2^n x) \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right)^n \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right)^n$$

car $|\sin| \leq 1$. Enfin, en remarquant que $\frac{3\sqrt{3}}{8} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3$, et par croissance de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$|v_n| = \sqrt[3]{|v_n|^3} \leq \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3n}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

Attention : Cela n'est valable, a priori, que pour $n \geq 1$. Mais on vérifie que pour $n = 0$, $|v_0| = |\sin x| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^0 = 1$ (Vrai!).

Remarque : Plus précisément,

$$|v_n| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \times \sqrt[3]{|\sin(x)| \sin^2(2^n x)}$$

mais

$$\sqrt[3]{|\sin(x)| \sin^2(2^n x)} = 1 \iff |\sin(x)| \sin^2(2^n x) = 1 \iff \begin{cases} |\sin(x)| = 1 \\ |\sin(2^n x)| = 1 \end{cases}$$

On sait que $|\sin(x)| = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et dans ce cas

$$\sin(2^n x) = \sin(2^{n-1}\pi + 2^n k\pi)$$

pour $n \geq 1$, $\sin(2^{n-1}\pi + 2^n k\pi) = 0$ et pour $n = 0$, $\sin(2^n x) = \sin x$. Ainsi

$$\sqrt[3]{|\sin(x)| \sin^2(2^n x)} = 1 \iff n = 0 \text{ et } x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

On en déduit que pour $n \geq 1$, l'inégalité est stricte i.e.

$$|v_n| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

2.2 Calculs simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice de khôlle 83

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose $z = |a + b| + i|a - b|$, calculer $|z|$ en fonction de $|a|$ et $|b|$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} |z|^2 &= |a + b|^2 + |a - b|^2 = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) + (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) \\ &= a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b} = 2(|a|^2 + |b|^2) \end{aligned}$$

d'où

$$|z| = \sqrt{2}\sqrt{|a|^2 + |b|^2}$$

Exercice de khôlle 84

Simplifier (à la main !)

$$z = \left(\frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i} \right)^{17}$$

Solution : La forme trigonométrique est adaptée aux puissances. On commence par mettre $\frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

On a $\frac{1}{2 - i} = \frac{2 + i}{2^2 + 1} = \frac{1}{5}(2 + i)$. Puis

$$\begin{aligned} & (2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i) \times (2 + i) \\ &= \frac{2 \times (2 + \sqrt{3}) - (2\sqrt{3} - 1)}{5} + \frac{i((2 + \sqrt{3}) + 2(2\sqrt{3} - 1))}{5\sqrt{3}} \\ &= \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i} = 1 + i\sqrt{3} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Mais alors

$$z = 2^{17} \times e^{i\frac{17\pi}{3}} = 2^{17} \times e^{i\frac{(18-1)\pi}{3}} = 2^{17} \times e^{-i(\frac{\pi}{3} + 6\pi)} = 2^{17} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2^{16} (1 - i\sqrt{3})$$

Exercice de khôlle 85

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$, montrer que $\operatorname{Re}(z^2 + 4z + 3) \geq 0$.

Indication : poser $z = \rho e^{i\theta}$ et $X = \cos \theta$.

Solution : On suit l'indication pour avoir (car $z^2 = e^{2i\theta}$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^2 + 4z + 3) &= \rho^2 \cos(2\theta) + 4\rho \cos \theta + 3 = \rho^2 (2\cos^2 \theta - 1) + 4\rho \cos \theta + 3 \\ &= 2\rho^2 X^2 + 4\rho X + 3 - \rho^2 \end{aligned}$$

Le discriminant de $P(X) = 2\rho^2 X^2 + 4\rho X + 3 - \rho^2$ vaut $16\rho^2 - 4 \times 2\rho^2 \times (3 - \rho^2) = 8\rho^4 - 8\rho^2 = 8\rho^2(\rho^2 - 1) \leq 0$ car $\rho \leq 1$. Le polynôme P est donc de signe constant égal à celui de $2\rho^2$ donc est toujours positif. Ceci prouve que

$$\operatorname{Re}(z^2 + 4z + 3) \geq 0.$$

Exercice de khôlle 86

Soit $z_1 = \frac{7+i}{3-i}$ et $z_2 = \frac{4+3i}{1+2i}$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, z_1^n + z_2^n \in \mathbb{R}$.
- Soient $(u, v) \in \mathbb{C}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u^n + v^n$. On suppose que S_1 et S_2 sont réels.
 - Exprimer uv à l'aide de S_2 et S_1^2 .
 - En déduire que ou bien u et v sont réels, ou bien ils sont conjugués.

Solution :

- Si on lit le reste du sujet, on se dit que z_1 et z_2 sont soit réels, soit conjugués. Bon, un calcul simple donne $\frac{7+i}{3-i} = 2+i$ et $\frac{4+3i}{1+2i} = 2-i$ donc

$$z_1^n + z_2^n = 2 \operatorname{Re}(z_1^n) \in \mathbb{R}$$

2.

(a) On a $S_1^2 = u^2 + v^2 + uv$ donc $uv = \frac{S_1^2 - S_2}{2}$.

(b) On sait que u et v sont racines de

$$z^2 - (u+v)z + uv = 0$$

donc de $z^2 - S_1 z + \frac{S_1^2 - S_2}{2} = 0$ qui est du second degré à coefficients réels. Les racines sont donc réelles (si $\Delta \geq 0$) ou conjuguées. Et c'est fini!

Exercice de khôlle 87

Soient a, b et c trois complexes.

- Résoudre le système

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$$

- Montrer que les solutions sont réelles si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $c = \bar{b}$.

Solution :

- Méthode ① : On applique le pivot, mais très vite, on se dit qu'il y a plus futé!

Méthode ① : Par analyse-synthèse.

Analyse : si x, y, z est une solution alors dans $(\mathcal{S})$, $L_1 + L_2 + L_3$ donne (avec $1 + j + j^2 = 0$)

$$3x + (1 + j + j^2)y + (1 + j + j^2)z = a + b + c$$

soit $x = \frac{a+b+c}{3}$. Puis $L_1 + j^2 L_2 + j L_3$ donne

$$(1 + j^2 + j)x + (1 + j^3 + j^3)y + (1 + j^4 + j^2)z = a + j^2 b + jc$$

soit avec $j^3 = 1$, $j^4 = j$ et toujours $1 + j + j^2 = 0$

$$y = \frac{a + j^2b + jc}{3}$$

et enfin $L_1 + jL_2 + j^2L_3$ donne $z = \frac{a + jb + j^2c}{3}$. Idéalement, il faudrait une méthode pour nous dire, cool, il y a une unique solution, mais on n'a pas encore le bon outil (le déterminant). Donc on fait la synthèse.

Synthèse : si $x = \frac{a+b+c}{3}$, $y = \frac{a+j^2b+jc}{3}$ et $z = \frac{a+jb+j^2c}{3}$ alors, avec $1+j+j^2=0$, on a (faites le calcul)

$$x + y + z = a, \quad x + jy + j^2z = b \quad \text{et} \quad x + j^2y + jz = c$$

Donc on a bien une unique solution qui est celle trouvée.

2. Sens $\Rightarrow$: Si x, y et z sont réels alors $a = x + y + z \in \mathbb{R}$ (somme de réels) et ($\bar{j} = j^2$ et $\overline{j^2} = j$)

$$c = x + j^2y + jz = \bar{x} + \bar{j}\bar{y} + \bar{j^2}\bar{z} = \overline{x + jy + j^2z} = \bar{b}$$

Sens $\Leftarrow$: Si $a \in \mathbb{R}$ et $c = \bar{b}$ alors

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+\bar{b}}{3} = \frac{a+2\operatorname{Re}(b)}{3} \in \mathbb{R} \\ y &= \frac{a+j^2b+jc}{3} = \frac{a+j^2b+\overline{j^2b}}{3} = \frac{a+2\operatorname{Re}(j^2b)}{3} \in \mathbb{R} \\ z &= \frac{a+jb+j^2c}{3} = \frac{a+2\operatorname{Re}(jb)}{3} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.3 Inégalités (triangulaire et autres)

Exercice de khôlle 88

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z^2 - 1| \leq 8$, montrer que $|z - 2i| \leq 5$.

Indication : commencer par majorer $|z^2|$.

Solution : On a $|z^2| = |z|^2 = |z^2 - 1 + 1| \leq |z^2 - 1| + 1 = 9$. Puisque $|z| \geq 0$, en passant à la racine carrée (qui est croissante), on a

$$|z| = \sqrt{|z|^2} \leq \sqrt{9} = 3$$

Mais alors

$$|z - 2i| \leq |z| + |2i| = |z| + 2 \leq 3 + 2 = 5$$

Exercice de khôlle 89

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, montrer que

$$|z_1| - |z_2| - \dots - |z_n| \leq |z_1 + \dots + z_n|$$

Solution : Méthode ① (lourde) : Par récurrence sur $n \geq 2$ on montre $\mathcal{P}(n) = \ll \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, |z_1| - |z_2| - \dots - |z_n| \leq |z_1 + \dots + z_n| \gg$.

Pour $n = 2$, c'est comme pour la seconde inégalité triangulaire. On a

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \underset{IT}{\leq} |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

d'où $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

Puis on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n \geq 2$. Soient $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ alors en appliquant $\mathcal{P}(n)$ à $Z_1 = z_1 + z_2$, $Z_2 = z_3, \dots, Z_n = z_{n+1}$ on en déduit que

$$|z_1 + z_2| - |z_3| - \dots - |z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_{n+1}|$$

Mais puisque $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$, on en déduit que

$$|z_1| - |z_2| - |z_3| - \dots - |z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_{n+1}|$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

Méthode ② (rapide) Par l'ITG, on a

$$|z_1| = |(z_1 + \dots + z_n) - z_2 - z_3 - \dots - z_n| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |-z_2| + \dots + |-z_n|$$

d'où le résultat.

Exercice de khôlle 90

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, montrer que

$$|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b| \quad (I)$$

Discuter le cas d'égalité.

Solution : Méthode ① : Une inégalité dans les complexes, sans doute l'IT ! On remarque que $a + b + a - b = 2a$ donc

$$2|a| = |2a| = |(a + b) + (a - b)| \underset{IT}{\leq} |a + b| + |a - b| \quad (I_1)$$

de même

$$2|b| = |2b| = |(a + b) - (a - b)| \underset{IT}{\leq} |a + b| + |-(a - b)| = |a + b| + |a - b| \quad (I_2)$$

en sommant (I_1) et (I_2) on obtient

$$2|a| + 2|b| \leq 2(|a + b| + |a - b|)$$

ce qui est l'inégalité (I) après multiplication par $\frac{1}{2}$ (qui est positif).

Pour l'égalité. Si parmi (I_1) ou (I_2) l'une des inégalités est stricte alors $2|a| + 2|b| < 2(|a + b| + |a - b|)$ et il n'y a pas égalité dans (I) . On a donc égalité dans (I) si et seulement si il y a égalité dans (I_1) et (I_2) .

Analyse : Pour (I_1) on sait qu'il y a égalité si et seulement si

$$a - b = 0 \text{ ou s'il existe } k_1 \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } a + b = k_1(a - b)$$

De même il y a égalité dans (I_2) si et seulement si

$$a - b = 0 \text{ ou s'il existe } k_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } a + b = k_2 \times (-(a - b))$$

On a donc égalité dans (I) lorsque $a = b$. Supposons alors $a \neq b$, il y a égalité lorsque

$$\begin{cases} a + b = k_1(a - b) \\ a + b = -k_2(a - b) \end{cases} \quad \text{avec } k_1 \text{ et } k_2 \text{ réels positifs}$$

on en déduit que $0 = k_1(a - b) + k_2(a - b) = (k_1 + k_2)(a - b)$. Cela impose $k_1 + k_2 = 0$ donc $k_1 = k_2 = 0$ (car une somme de réels positifs et nulle lorsque les deux le sont) et donc $a = -b$.

Synthèse : Si $a = b$ alors $|a| + |b| = 2|a| \leq |a + b| + |a - b| = |2a| + |0|$ est vraie, et de même si $a = -b$.

Conclusion : Il y a égalité si et seulement si $a = \pm b$.

Méthode ② : Puisqu'il s'agit d'une inégalité entre nombres réels positifs, cela revient à prouver que

$$(|a| + |b|)^2 \leq (|a + b| + |a - b|)^2$$

Mais

$$(|a| + |b|)^2 = 2|a||b| + |a|^2 + |b|^2.$$

$$\begin{aligned} (|a + b| + |a - b|)^2 &= |a + b|^2 + 2|a + b||a - b| + |a - b|^2 \\ &= (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) + 2|a^2 - b^2| + (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) \\ &= a\bar{a} + a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{b} + 2|a^2 - b^2| + a\bar{a} - a\bar{b} - \bar{a}b + b\bar{b} \\ &= 2(|a|^2 + |a^2 - b^2| + |b|^2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (I) &\iff 2|a||b| + a\bar{a} + b\bar{b} \leq 2(|a^2 - b^2| + |b|^2) \\ &\iff 0 \leq |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| + |a^2 - b^2| \\ &\iff 0 \leq (|a|^2 - |b|^2)^2 + |a^2 - b^2| \end{aligned}$$

La dernière inégalité est clairement vraie (somme de nombres positifs) donc (I) également. De plus il y a égalité dans (I) si et seulement si

$$0 = (|a|^2 - |b|^2)^2 + |a^2 - b^2|$$

donc si et seulement si $(|a|^2 - |b|^2)^2 = 0$ et $|a^2 - b^2| = 0$ (car une somme de réels positifs est nulle lorsque les deux le sont). On sait que $|z| = 0 \iff z = 0$ donc $|a^2 - b^2| = 0 \iff (a + b)(a - b) = 0 \iff a = \pm b$. On vérifie que dans ce cas, on a bien égalité dans (I) (ou dans $(|a|^2 - |b|^2)^2 = 0$). Cette seconde méthode est plus rapide pour le cas d'égalité.

Exercice de khôlle 91

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

Puis discuter les cas d'égalité.

Solution : Pour simplifier, on pose $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. On a

$$|z| = |x + iy| \leq |x| + |iy| = |x| + |i| \times |y| = |x| + |y|$$

ce qui prouve l'inégalité de droite. Pour celle de gauche, on s'inspire de la démonstration de l'inégalité triangulaire. On a (les nombres sont positifs donc rangés dans le même ordre que leur carré)

$$\begin{aligned} \frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| &\iff \left(\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \right)^2 \leq |z|^2 = x^2 + y^2 \iff |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \\ &\iff 0 \leq x^2 + y^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2 \text{ ce qui est vrai} \end{aligned}$$

(On a utilisé $|x|^2 = x^2$).

Pour le cas d'égalité.

A gauche, il y a égalité si et seulement si $|x| = |y|$ donc si et seulement si $z = \lambda(1 + i)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

A droite, on sait qu'il y a égalité lorsque ou bien $x = 0$, ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $iy = \lambda x$. Puisque $iy \in i\mathbb{R}$ et $\lambda x \in \mathbb{R}$, cela impose $iy = 0$. Conclusion ou bien $x = 0$ i.e. $z \in i\mathbb{R}$, ou bien $y = 0$ i.e. $z \in \mathbb{R}$. Au final, il y a égalité à

droite si et seulement si $z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

Remarque : Pour l'inégalité de droite, on pouvait aussi écrire

$$|z| \leq |x| + |y| \iff |z|^2 = x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \iff 0 \leq |x||y| \text{ ce qui est vrai}$$

et remarquer que le cas d'égalité donne $|x||y| = 0$ soit $x = 0$ ou $y = 0$. C'est clairement plus simple et plus rapide !

Exercice de khôlle 92

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, montrer que

$$|a + b| \leq \sqrt{1 + |a|^2} \sqrt{1 + |b|^2}$$

et discuter le cas d'égalité.

Solution : Méthode ① : On pense à l'IT. On a

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

il s'agit alors de prouver que $|a| + |b| \leq \sqrt{1 + |a|^2} \sqrt{1 + |b|^2}$, puisqu'il s'agit d'inégalités entre nombres positifs, on a

$$\begin{aligned} |a| + |b| &\leq \sqrt{1 + |a|^2} \sqrt{1 + |b|^2} \iff (|a| + |b|)^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2) \\ &\iff |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 1 + |a|^2|b|^2 \\ &\iff 0 \leq |a|^2|b|^2 - 2|a||b| + 1 = (|a||b| - 1)^2 \end{aligned}$$

ce qui est vrai. Puis, on a égalité si et seulement si on a égalité dans les deux inégalités

$$|a + b| \leq |a| + |b| \text{ et } 0 \leq (|a||b| - 1)^2$$

Analyse : On a l'égalité $0 = (|a||b| - 1)^2$ si et seulement si $|a||b| = 1$. On sait que $|a + b| = |a| + |b|$ si et seulement si $b = 0$ ou s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $a = kb$. Si on a égalité dans les deux inégalités alors $|a||b| = 1$ (ce qui impose $b \neq 0$) et $a = kb$ où $k \in \mathbb{R}_+$. Mais alors $|a||b| = k|b|^2 = 1$ d'où $k = \frac{1}{|b|^2}$ et $a = \frac{b}{|b|^2} = \frac{1}{\bar{b}}$.

Synthèse : on vérifie que si $a = \frac{1}{\bar{b}}$ alors

$$\begin{aligned} |a + b| &= \left| \frac{1}{\bar{b}} + b \right| = \left| \frac{1 + b\bar{b}}{\bar{b}} \right| = \frac{1 + |b|^2}{|b|} \\ 1 + |a|^2 &= 1 + \left| \frac{1}{\bar{b}} \right|^2 = 1 + \frac{1}{|b|^2} = \frac{1 + |b|^2}{|b|^2} \end{aligned}$$

d'où

$$|a + b|^2 = \left(\frac{1 + |b|^2}{|b|} \right)^2 = \frac{1 + |b|^2}{|b|^2} \times (1 + |b|^2) = (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$$

Méthode ② : Puisqu'il s'agit d'inégalités entre nombres positifs, on a

$$\begin{aligned} |a + b| &\leq \sqrt{1 + |a|^2} \sqrt{1 + |b|^2} \iff |a + b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2) \\ &\iff (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) \leq |a|^2 + |b|^2 + 1 + |a|^2|b|^2 \\ &\iff a\bar{a} + a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{b} \leq |a|^2 + |b|^2 + 1 + |a|^2|b|^2 \\ &\iff a\bar{b} + \bar{a}b \leq 1 + |a|^2|b|^2 \text{ car } a\bar{a} = |a|^2 \text{ et } b\bar{b} = |b|^2 \\ &\iff 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) \leq 1 + |a\bar{b}|^2 \text{ car } \bar{a}b = \overline{a\bar{b}}, |b|^2 = |\bar{b}|^2 \text{ et } |a|^2|\bar{b}|^2 = |a\bar{b}|^2 \\ &\iff 0 \leq |a\bar{b}|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) + 1 \end{aligned}$$

Si on pose $z = a\bar{b} = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|a\bar{b}|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) + 1 = x^2 + y^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + y^2$ qui est bien positif. De plus il y a égalité si et seulement si $0 = (x-1)^2 + y^2$ donc si et seulement si $(x-1)^2 = y^2 = 0$ (une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si ces nombres le sont). On a donc égalité si et seulement si

$$a\bar{b} = 1 \text{ i.e. } a = \frac{1}{\bar{b}}$$

Exercice de khôlle 93

Soit $t \in \mathbb{R}$, montrer que

$$|e^{it} - 1| \leq |t|$$

interpréter géométriquement ce résultat lorsque $t \in [0, \pi]$.

Solution : Puisqu'il s'agit d'inégalités entre nombres positifs, on a

$$\begin{aligned} |e^{it} - 1| \leq |t| &\iff |e^{it} - 1|^2 \leq |t|^2 \iff (\cos t - 1)^2 + \sin^2 t \leq t^2 \\ &\iff \cos^2 t - 2\cos t + 1 + \sin^2 t \leq t^2 \iff 0 \leq t^2 + 2\cos t - 2 \end{aligned}$$

On définit φ par $\varphi(t) = t^2 + 2\cos t - 2$ qui est clairement paire. φ est dérivable deux fois avec, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= 2t - 2\sin t = 2(t - \sin t) \\ \varphi''(t) &= 2(1 - \cos t) \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que φ' est croissante sur $[0, +\infty[$ d'où, pour $t \geq 0$, $\varphi'(t) \geq \varphi'(0) = 0$, ce qui permet d'affirmer que φ est croissante sur $[0, +\infty[$. Enfin pour $t \geq 0$, on a $\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$ et si $t \leq 0$, $\varphi(t) = \varphi(-t) \geq 0$ (car $-t \geq 0$). Ceci prouve l'inégalité demandée.

Pour $t \in [0, \pi]$, soit M le point d'affixe e^{it} , alors $|e^{it} - 1| = AM$ où A a pour affixe 1. En d'autres termes $|e^{it} - 1|$ est la longueur de la corde AM . Cette longueur est inférieure à la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ (faire un dessin!).

2.4 L'ensemble $\mathbb{U}$

Exercice de khôlle 94

Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$ montrer que $|z_1 - 2z_2| = |2z_1 - z_2|$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} |z_1 - 2z_2|^2 &= (z_1 - 2z_2)(\bar{z}_1 - 2\bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + 4z_2\bar{z}_2 - 2\bar{z}_1z_2 - 2z_1\bar{z}_2 \\ &= 5 - 2\bar{z}_1z_2 - 2z_1\bar{z}_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |2z_1 - z_2|^2 &= (2z_1 - z_2)(2\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 4z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - 2\bar{z}_1z_2 - 2z_1\bar{z}_2 \\ &= 5 - 2\bar{z}_1z_2 - 2z_1\bar{z}_2 \end{aligned}$$

L'égalité est ainsi évidente.

Exercice de khôlle 95

Soient $z_1, \dots, z_n$ des complexes de modules 1, on définit $z = \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right)$, montrer que z est un réel tel que $0 \leq z \leq n^2$.

Solution : On pose $A = \sum_{k=1}^n z_k$, puisque pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ on a $|z_k| = 1$ on peut affirmer que $\frac{1}{z_k} = \overline{z_k}$ et ainsi

$$\overline{A} = \overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}$$

d'où $z = A\overline{A} = |A|^2 \geq 0$. Puis par ITG

$$|A| = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n 1 = n \text{ donc } z \leq n^2$$

Exercice de khôlle 96

Soit z un complexe de module 1, calculer $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

Solution : Méthode ① : On pose $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ainsi

$$\begin{aligned} |1+z|^2 &= |(1+a) + ib|^2 = (1+a)^2 + b^2 \\ |1-z|^2 &= |(1-a) - ib|^2 = (1-a)^2 + (-b)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$|1+z|^2 + |1-z|^2 = 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 = 2 + 2(a^2 + b^2)$$

Mais $|z|^2 = a^2 + b^2 = 1$ (z est de module 1) ainsi $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$.

Méthode ② : On a $|1+z|^2 + |1-z|^2 = (1+z)(1+\overline{z}) + (1-z)(1-\overline{z}) = 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} + 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} = 4$ car $z\overline{z} = |z|^2 = 1$.

Méthode ③ : Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ d'où

$$1+z = 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } 1-z = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |1+z| &= \left| 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \right| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right| = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \\ |1-z| &= \left| -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \right| = 2 \left| i \right| \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

d'où

$$|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 4$$

Géométriquement, si M, A et B ont pour affixe $z, -1$ et 1 alors $|1+z|^2 + |1-z|^2 = AM^2 + BM^2 = AB^2 = 4$ car le triangle est rectangle (cercle de diamètre $[A, B]$).

Exercice de khôlle 97

Soit u un nombre complexe de module 1, $u \neq 1$, montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$.

Solution : Méthode ① : On pose $z = \frac{1}{1-u}$ ainsi 2

$$\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z} = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-\bar{u}} = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-\frac{1}{\bar{u}}} = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-\frac{1}{u}} = \frac{1}{1-u} + \frac{u}{u-1} = 1$$

Méthode ② : On pose $u = e^{i\theta}$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u} &= \frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}} = i \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= i \frac{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat et mieux puisque l'on a $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2} \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ où $\theta = \arg(u) \in (2\pi)$.

Exercice de khôlle 98

Soit $\omega \in \mathbb{U}$, on définit P par $P(X) = X^3 + \omega X^2 - \bar{\omega}X - 1$. On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

1. Calculer $P(-\omega)$.
2. On pose $\omega = e^{i\alpha}$, en déduire les racines de P en fonction de α .

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} P(-\omega) &= (-\omega)^3 + \omega(-\omega)^2 - \bar{\omega} \times (-\omega) - 1 \\ &= -\omega^3 + \omega^3 + \omega\bar{\omega} - 1 = 0 \text{ car } \omega\bar{\omega} = |\omega|^2 = 1 \end{aligned}$$

2. On peut donc factoriser par $(X + \omega)$. Si on pose $P(X) = (X + \omega)(X^2 + aX + b)$ en développant et par unicité des coefficients, il vient

$$P(X) = X^3 + (a + \omega)X^2 + (b + a\omega)X + b\omega$$

d'où

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + a\omega = -\bar{\omega} \\ b\omega = -1 \end{cases} \text{ soit } a = 0, b = -\bar{\omega} \text{ (et on a bien } b\omega = -\omega\bar{\omega} = -1)$$

On a donc $P(X) = (X + \omega)(X^2 - e^{-i\alpha})$. Les solutions de $z^2 = e^{-i\alpha}$ sont $\pm e^{-i\frac{\alpha}{2}}$. Les racines de P sont donc

$$\{-e^{i\alpha}, -e^{-i\frac{\alpha}{2}}, e^{-i\frac{\alpha}{2}}\}$$

Exercice de khôlle 99

Déterminer les complexes z non nuls tels que $z, \frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient même module.

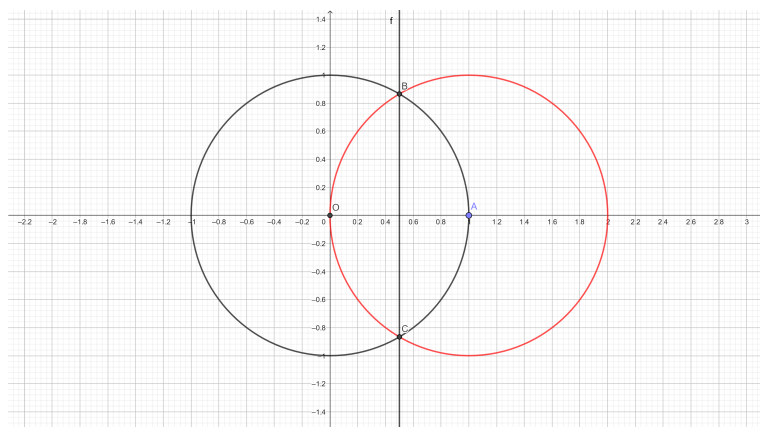
Solution : Par analyse-synthèse. Analyse : Si $z \in \mathbb{C}^*$ est tel que $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1 - z|$ alors $|z| = \frac{1}{|z|}$ d'où $|z|^2 = 1$ et ainsi (puisque $|z| > 0$) on a $|z| = 1$. On a alors

$$|z|^2 = 1 = |1 - z|^2 = (1 - z)(1 - \bar{z}) = 1 - z - \bar{z} + z\bar{z} = 1 - 2\operatorname{Re}(z) + 1 \text{ d'où } \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

Si on pose $z = e^{i\theta}$ on a donc $\cos \theta = \frac{1}{2}$ d'où $\theta = \pm \frac{\pi}{3} (2\pi)$. Les solutions possibles sont donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j$ (elles sont conjuguées car on s'attend à ce que z soit solution si et seulement si $\bar{z}$ l'est).

Synthèse : Si $z = -j$ alors $\frac{1}{z} = -\bar{j} = -j^2$ et $1 - z = 1 + j = -j^2$. Les trois complexes z , $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont même module (égal à 1).

Remarque : Dès que l'on a établi que $|z| = 1$ on peut en déduire que $z \in \mathbb{U}$, donc $M(z) \in \mathcal{C}(O(0), 1)$. Puis $|1 - z| = |z| = 1$ signifie que $M \in \mathcal{C}(A(1), 1)$. Les solutions sont donc à l'intersection de ces deux cercles donc sur la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.



2.5 Pafnouti Tchebychev et al.

Exercice de khôlle 100

Développer $\cos(6x)$.

Solution : On écrit que

$$\cos(6x) = \operatorname{Re}(e^{6ix}) = \operatorname{Re}\left((e^{ix})^6\right) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i \sin x)^6\right)$$

Puis avec le binôme

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Les coefficients sont obtenus par le triangle de Pascal

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

Avec $b = i \sin(x)$, seules les puissances paires sont réelles (car $i^{2p+1} = i \times i^{2p} = i \times (i^2)^p = (-1)^p i \in i\mathbb{R}$) ainsi

$$\cos(6x) = \cos^6 x + 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x + \sin^6 x$$

Exercice de khôlle 101

Linéariser $\cos^3(x) \sin(x)$

Solution : On pose $z = e^{ix}$ ainsi $\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ et $\sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ d'où

$$\cos^3(x) \sin(x) = \frac{1}{2^4 i} \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

Mais

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 \left(z - \frac{1}{z} \right) &= \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 \times \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(z - \frac{1}{z} \right) \\ &= \left(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} \right) \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right) = 2 \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right) + \left(z^4 - \frac{1}{z^4} \right) \end{aligned}$$

Mais $z^2 - \frac{1}{z^2} = e^{2ix} - e^{-2ix} = 2i \sin(2x)$ et $z^4 - \frac{1}{z^4} = 2i \sin(4x)$. Conclusion

$$\cos^3(x) \sin(x) = \frac{1}{8} (2 \sin(2x) + \sin(4x))$$

Remarque : On peut aussi écrire que

$$\begin{aligned} \cos^3(x) \sin(x) &= \frac{1}{2} \cos^2(x) \times 2 \cos(x) \sin(x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) \times \sin(2x) \\ &= \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{8} \times 2 \cos(2x) \sin(2x) = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{8} \sin(4x) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 102

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(5x) = 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5 \cos(x)$.
2. Résoudre l'équation $16z^2 - 20z^3 + 5z = 0$.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Solution :

1. On applique la méthode du cours. On écrit que

$$\cos(5x) = \operatorname{Re}(e^{5ix}) = \operatorname{Re}\left((e^{ix})^5\right) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i \sin x)^5\right)$$

Puis avec le binôme

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

: Les coefficients sont obtenus par le triangle de Pascal

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & 1 & & 2 & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & 1
 \end{array}$$

Avec $b = i \sin(x)$, seules les puissances paires sont réelles (car $i^{2p+1} = i \times i^{2p} = i \times (i^2)^p = (-1)^p i \in i\mathbb{R}$) ainsi

$$\cos(5x) = \cos^5(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x)$$

Puis $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et $\sin^4 = (\sin^2)^2 = (1 - \cos^2)^2$ donne

$$\begin{aligned}
 \cos(5x) &= \cos^5(x) + 5 \cos(x) (1 - \cos^2(x))^2 - 10 \cos^3(x) (1 - \cos^2(x)) \\
 &= 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5 \cos(x).
 \end{aligned}$$

2. On pose $X = z^2$ pour avoir une équation bicarré

$$16X^2 - 20X + 5 = 0$$

Le discriminant vaut $20^2 - 4 \times 5 \times 16 = 20^2 - 20 \times 16 = 20 \times (20 - 16) = 20 \times 4 = 16 \times 5$, les racines sont donc

$$X_1 = \frac{20 + 4\sqrt{5}}{32} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \text{ et } X_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

Elles sont toutes les deux positives, ainsi $16z^2 - 20z^3 + 5z = 0$ a quatre racines qui sont

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \text{ et } -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

3. On a $\cos\left(5 \times \frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Si on pose $a = \frac{\pi}{10}$ alors

$$\cos(5a) = \cos(a) \times (16 \cos^4(x) - 20 \cos^2(x) + 5) = 0$$

puisque $\cos(a) \neq 0$, on en déduit que $x = \cos(a)$ est une des racines de $16z^2 - 20z^3 + 5z = 0$. Reste à savoir

laquelle! On a $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ donc $0 \leq \cos(a)$, ceci permet de dire que $x \neq -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ et $x \neq -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$. Reste

deux candidats! Mais $\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \leq \frac{5 - \sqrt{4}}{8} = \frac{3}{8}$ donc $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \leq \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Puisque $\frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6}$, on a

$\cos(a) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui permet de conclure à

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

Puis $\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - \frac{5 + \sqrt{5}}{8} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$, sachant que $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \geq 0$ (car $\frac{\pi}{10} \in [0, \frac{\pi}{2}]$), on en déduit que

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}$$

et pour finir

$$\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{20}} = \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

2.6 Calculs complexes.

Exercice de khôlle 103

Calculer $(1+i)^{4n}$ et en déduire les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} \text{ et } \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$$

Solution : Première idée : le binôme car

$$(1+i)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} i^k$$

et on se dit que l'on va couper la somme selon les indices pairs et impairs. Ainsi

$$\begin{aligned} (1+i)^{4n} &= \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} i^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{4n} \binom{4n}{k} i^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{4n} \binom{4n}{k} i^k \\ &= \sum_{0 \leq k=2p \leq 4n} \binom{4n}{2p} i^{2p} + \sum_{0 \leq k=2p+1 \leq 4n} \binom{4n}{2p+1} i^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} + i \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1} \\ \text{car } i^{2p} &= (i^2)^p = (-1)^p \text{ et } i^{2p+1} = i \times i^{2p} \end{aligned}$$

Reste donc à obtenir la forme cartésienne de $(1+i)^{4n}$.

Méthode ① : On a (forme polaire) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1+i)^{4n} = (\sqrt{2})^{4n} e^{i4n \times \frac{\pi}{4}} = 2^{2n} (-1)^n$

Méthode ② : On a $(1+i)^2 = 2i$ donc $(1+i)^{4n} = ((1+i)^2)^{2n} = 2^{2n} (i)^{2n} = 2^{2n} (i^2)^n = (-1)^n$

Bref en fin de compte

$$2^{2n} (-1)^n = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} + i \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaire, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} &= 2^{2n} (-1)^n = 4^n (-1)^n \\ \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1} &= 0 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 104

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$C_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha) \text{ et } C_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$$

Solution : On introduit les petites soeurs $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\alpha)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sin(k\alpha)$ pour avoir

$$\begin{aligned} C_1 + iS_1 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\alpha) + i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\alpha) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\alpha) + i \sin(k\alpha)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\alpha} \stackrel{\text{De Moivre}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\alpha})^k \stackrel{\text{Binôme}}{=} (1 + e^{i\alpha})^n \stackrel{\text{Trigo}}{=} \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^n \\ &= 2^n \cos^n \left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{n\alpha}{2}} = 2^n \cos^n \left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

d'où

$$C_1 = 2^n \cos^n \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

Et de la même manière

$$C_2 + iS_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{ik\alpha} = (e^{i\alpha} - 1)^n = \left(2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^n = 2^n i^n \sin^n \left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{n\alpha}{2}}$$

Ou bien on distingue selon la parité de n , ou bien on écrit que $i^n = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$ d'où

$$C_2 + iS_2 = 2^n e^{i\frac{n\pi}{2}} \sin^n \left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{n\alpha}{2}} = 2^n \sin^n \left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{n(\alpha+\pi)}{2}}$$

$$C_2 = 2^n \sin^n \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{n(\alpha+\pi)}{2}\right)$$

Si l'on distingue selon la parité, on utilise $i^{2p} = (i^2)^p = (-1)^p$ et $i^{2p+1} = i \times i^{2p}$ ainsi

$$\text{pour } n = 2p \text{ pair, } C_2 + iS_2 = 2^{2p} (-1)^p \sin^{2p} \left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{ip\alpha}$$

$$C_2 = 2^{2p} (-1)^p \sin^{2p} \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos(p\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{pour } n = 2p+1 \text{ impair, } C_2 + iS_2 &= 2^{2p+1} (-1)^p i \sin^{2p+1} \left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i(p+\frac{1}{2})\alpha} \\ &= 2^{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} \left(\frac{\alpha}{2}\right) \times i \times \left(\cos\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\alpha\right) + i \sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\right) \end{aligned}$$

$$C_2 = -2^{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)$$

Remarque : Avec le résultat de l'exercice [sur la formule d'inversion de Pascal](#), on obtient

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \times 2^k \cos^k \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{k\alpha}{2}\right) = \cos(n\alpha)$$

Egalité que l'on peut, bien sûr, obtenir directement en appliquant la méthode de cet exercice.

Exercice de khôlle 105

Calculer pour n entier $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} \right)^k \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1 \right)^n \\ &= \operatorname{Re} (i \tan(x))^n = \operatorname{Re} (e^{i\frac{n\pi}{2}} \tan^n(x)) \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^n(x)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tan^n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^p \tan^{2p}(x) & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}$

Exercice de khôlle 106

Soit $\alpha = \frac{\pi}{n}$, calculer

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(k\alpha) \sin((k+1)\alpha)$$

Solution : On sait que $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$ d'où

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} (\cos(\alpha) - \cos((2k+1)\alpha)) = \frac{n-1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \cos((2k+1)\alpha)$$

Il reste à calculer $C = \sum_{k=1}^{n-1} \cos((2k+1)\alpha)$.

Méthode ① : Cela ressemble à un exercice type ! On complexifie pour simplifier puisque

$$C = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{i(2k+1)\alpha} \right)$$

on calcule

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^{n-1} e^{i(2k+1)\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} (e^{2i\alpha})^k \times e^{i\alpha} = e^{i\alpha} \times (e^{2i\alpha} + (e^{2i\alpha})^2 + \dots + (e^{2i\alpha})^{n-1}) \\ &= e^{i\alpha} \times e^{2i\alpha} \times (1 + e^{2i\alpha} + (e^{2i\alpha})^2 + \dots + (e^{2i\alpha})^{n-2}) = e^{3i\alpha} \frac{1 - (e^{2i\alpha})^{n-1}}{1 - e^{2i\alpha}} = e^{3i\alpha} \frac{1 - e^{2(n-1)\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} \end{aligned}$$

On réfléchit un peu car $\alpha = \frac{\pi}{n}$ donc $e^{2in\alpha} = 1$ ainsi

$$E = e^{i\alpha} \times e^{2i\alpha} \times \frac{1 - e^{2(n-1)\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = e^{i\alpha} \times \frac{e^{2i\alpha} - e^{2ni\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = -e^{i\alpha}$$

d'où $C = -\cos \alpha$ et au final

$$S = \frac{n}{2} \cos(\alpha)$$

Méthode ② : Je suis un pirate ! En effet puisque $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$, on a

$$\sin(\alpha) \cos((2k+1)\alpha) = \frac{1}{2} (\sin(2(k+1)\alpha) - \sin(2k\alpha))$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 \sin(\alpha) \sum_{k=1}^{n-1} \cos((2k+1)\alpha) &= \sum_{k=1}^{n-1} 2 \sin(\alpha) \cos((2k+1)\alpha) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (\sin(2(k+1)\alpha) - \sin(2k\alpha)) \\ &= \sin(2(n-1)\alpha) - \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

Mais $\sin(2(n-1)\alpha) = \sin(2n\alpha - 2\alpha) = \sin(2\pi - 2\alpha) = -\sin(2\alpha)$ d'où (puisque $2\sin(\alpha) \neq 0$)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos((2k+1)\alpha) = \frac{-2\sin(2\alpha)}{2\sin(\alpha)} = -\cos(\alpha) \quad (\text{car } \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha))$$

Exercice de khôlle 107

Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{R}$ les sommes $C = \sum_{k=0}^n \cos^k(\theta) \cos(k\theta)$ et $S = \sum_{k=0}^n \cos^k(\theta) \sin(k\theta)$.

Solution : On calcule

$$E = C + iS = \sum_{k=0}^n \cos^k(\theta) e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (\cos(\theta) e^{i\theta})^k \quad \text{ainsi } C = \operatorname{Re}(E) \text{ et } S = \operatorname{Im}(E)$$

Soit $q = \cos(\theta) e^{i\theta} = \cos^2(\theta) + i\sin(\theta)$, alors $q = 1$ si et seulement si $\theta = 0$ (π) (car $q = 1$ équivaut à $\sin\theta = 0$ et $\cos^2(\theta) = 1$).

Cas 1 : $\theta = 0 + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors $E = n+1$ d'où $C = n+1$ et $S = 0$.

Cas 2 : $\theta \neq 0 + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors

$$E = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Or

$$\begin{aligned} 1 - q &= 1 - \cos^2\theta - i\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta - i\sin\theta\cos\theta = \sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta) \\ &= i\sin\theta(-i\sin\theta - \cos\theta) = -i\sin\theta e^{i\theta} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1 - q^{n+1}}{-i\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{ie^{i\theta}}{\sin\theta} (1 - \cos^{n+1}(\theta) e^{i(n+1)\theta}) \\ &= i \frac{e^{-i\theta} - \cos^{n+1}(\theta) e^{in\theta}}{\sin\theta} \\ &= \frac{i}{\sin\theta} (\cos\theta - \cos^{n+1}(\theta) \cos(n\theta) + i(-\sin\theta - \cos^{n+1}(\theta) \sin(n\theta))) \\ &= \frac{1}{\sin\theta} ((\sin\theta + \cos^{n+1}(\theta) \sin(n\theta)) + i(\cos\theta - \cos^{n+1}(\theta) \cos(n\theta))) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} C &= \operatorname{Re}(E) = \frac{\sin\theta + \cos^{n+1}(\theta) \sin(n\theta)}{\sin\theta} = 1 + \frac{\cos^{n+1}(\theta) \sin(n\theta)}{\sin\theta} \\ S &= \frac{\cos\theta - \cos^{n+1}(\theta) \cos(n\theta)}{\sin\theta} = \tan(\theta) \times (1 - \cos^n(\theta) \cos(n\theta)) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 108

Soit $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. On a montré en exercice type que

$$S_p(\theta) = \sum_{k=0}^p e^{ik\theta} = \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{p\theta}{2}}$$

1. Montrer que $\sum_{-p \leq k \leq p} e^{ik\theta} = \frac{\sin\left((p+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

On rappelle que $\sum_{-p \leq k \leq p} e^{ik\theta} = e^{-ip\theta} + e^{-i(p-1)\theta} + \dots + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + \dots + e^{ip\theta}$.

2. On pose $D_n = \sum_{p=0}^n \sum_{-p \leq k \leq p} e^{ik\theta}$.

Montrer par récurrence sur n que

$$D_n = \sum_{-n \leq k \leq n} (n+1-|k|) e^{ik\theta}$$

(On n'utilisera pas, ici, le résultat de la question 1).

3. En déduire que

$$\sum_{-n \leq k \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik\theta} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2$$

Solution :

1. On écrit que

$$\begin{aligned} \sum_{-p \leq k \leq p} e^{ik\theta} &= \sum_{-p \leq k \leq 0} e^{ik\theta} + \sum_{0 \leq k \leq p} e^{ik\theta} - 1 \text{ car l'indice } p=0 \text{ apparaît deux fois} \\ &= \sum_{k=0}^p e^{-ik\theta} + \sum_{k=0}^p e^{ik\theta} - 1 = S_p(-\theta) + S_p(\theta) - 1 \\ &= \frac{\sin\left(-\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)} e^{-i\frac{p\theta}{2}} + \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{p\theta}{2}} - 1 \\ &= \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(e^{-i\frac{p\theta}{2}} + e^{i\frac{p\theta}{2}}\right) - 1 = 2 \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{p\theta}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$2 \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(\frac{p\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left((p+\frac{1}{2})\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1$$

ce qui équivaut à $2 \sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right) \cos\left(\frac{p\theta}{2}\right) = \sin\left((p+\frac{1}{2})\theta\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ce qui est immédiat (sico-cosi...).

2. Par récurrence, on pose $\mathcal{P}(n) \equiv \langle D_n = \sum_{-n \leq k \leq n} (n+1-|k|) e^{ik\theta} \rangle$.

Pour $n=0$, on a $D(0) = \sum_{p=0}^0 \sum_{-p \leq k \leq p} e^{ik\theta} = \sum_{-0 \leq k \leq 0} e^{ik\theta} = 1$ et $\sum_{-0 \leq k \leq 0} (0+1-|k|) e^{ik\theta} = (0+1-|0|) e^{i \times 0 \times \theta} =$

1. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned}
 D(n+1) &= \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{-p \leq k \leq p} e^{ik\theta} = \left(\sum_{p=0}^n \sum_{-p \leq k \leq p} e^{ik\theta} \right) + \sum_{-(n+1) \leq k \leq (n+1)} e^{ik\theta} = D(n) + \sum_{-(n+1) \leq k \leq (n+1)} e^{ik\theta} \\
 &\stackrel{HR_n}{=} \sum_{-n \leq k \leq n} (n+1-|k|) e^{ik\theta} + \sum_{-n \leq k \leq n} e^{ik\theta} + e^{-i(n+1)\theta} + e^{i(n+1)\theta} \\
 &= \sum_{-n \leq k \leq n} (n+2-|k|) e^{ik\theta} + (n+2-|-(n+1)|) e^{-i(n+1)\theta} + (n+2-|(n+1)|) e^{i(n+1)\theta} \\
 &= \sum_{-(n+1) \leq k \leq n+1} (n+2-|k|) e^{ik\theta} \text{ ce qui prouve } \mathcal{P}(n+1) \text{ et termine la récurrence.}
 \end{aligned}$$

3. On a $\sum_{-n \leq k \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik\theta} = \frac{1}{n+1} D_n$. Mais

$$D_n = \sum_{p=0}^n \sum_{-p \leq k \leq p} e^{ik\theta} = \sum_{p=0}^n \frac{\sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{p=0}^n \sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

Or

$$\sum_{p=0}^n \sin\left(\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{p=0}^n e^{i\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta}\right)$$

et

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=0}^n e^{i\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}} \sum_{p=0}^n e^{ip\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} S_p(\theta) \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{(p+\frac{1}{2})\theta}{2}}
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice de khôlle 109

1. Ecrire sous forme exponentielle le nombre $z = 1 + i \tan(\theta)$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. En déduire $(1 + i\sqrt{3})^{12}$ (sous forme algébrique), puis la valeur de la somme $\sum_{k=0}^5 \binom{12}{2k+1} (-3)^k$.

Solution :

1. On a $z = 1 + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta}$.

Attention : Si on écrit un complexe sous la forme $z = re^{i\alpha}$, on a la forme exponentielle de z uniquement si $r > 0$. Si $r < 0$, on s'en sort en écrivant que $z = (-r) \times (-1) \times e^{i\alpha} = (-r) \times e^{i\pi} \times e^{i\alpha} = -re^{i(\alpha+\pi)}$.

Ici, si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos \theta > 0$ et la forme exponentielle de z est bien $\frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta}$.

2. On sait que $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (on devrait le savoir), donc $1 + i\sqrt{3} = 1 + i \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où

$$(1 + i\sqrt{3})^{12} = 2^{12} e^{i\frac{12\pi}{3}} = 2^{12} e^{4i\pi} = 2^{12} = 4096$$

Puis

$$(1 + i\sqrt{3})^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (i\sqrt{3})^k 1^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} i^k \sqrt{3}^k$$

On sépare la somme selon la parité de k (car i^k est un réel si k est pair, un imaginaire pur sinon). Ainsi

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^{12} &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq 12 \\ k \text{ pair}}} \binom{12}{k} i^k \sqrt{3}^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq 12 \\ k \text{ impair}}} \binom{12}{k} i^k \sqrt{3}^k \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq 12} \binom{12}{2p} i^{2p} \sqrt{3}^{2p} + \sum_{0 \leq 2p+1 \leq 12} \binom{12}{2p+1} i^{2p+1} \sqrt{3}^{2p+1} \end{aligned}$$

Or $0 \leq 2p \leq 12 \iff 0 \leq p \leq 6$ et $0 \leq 2p+1 \leq 12 \iff -1 \leq 2p \leq 11 \iff -\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{11}{2} \iff 0 \leq p \leq 5$. Et avec

$$\begin{aligned} i^{2p} &= (i^2)^p = (-1)^p, \quad i^{2p+1} = i \times i^{2p} = (-1)^p i \\ (\sqrt{3})^{2p} &= (\sqrt{3}^2)^p = 3^p, \quad \sqrt{3}^{2p+1} = \sqrt{3} \times \sqrt{3}^{2p} = \sqrt{3} \times 3^p \end{aligned}$$

on a

$$(1 + i\sqrt{3})^{12} = \sum_{p=0}^6 \binom{12}{2p} (-1)^p 3^p + i\sqrt{3} \sum_{p=0}^5 \binom{12}{2p+1} (-1)^p 3^p$$

ce qui donne

$$4096 = \underbrace{\sum_{p=0}^6 \binom{12}{2p} (-3)^p}_{\in \mathbb{R}} + i\sqrt{3} \underbrace{\sum_{p=0}^5 \binom{12}{2p+1} (-3)^p}_{\in \mathbb{R}}$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient

$$\sum_{p=0}^6 \binom{12}{2p} (-3)^p = 4096 \text{ et } \sum_{p=0}^5 \binom{12}{2p+1} (-3)^p = 0$$

Remarque : Il est bien plus «fun» de calculer $\sum_{0 \leq p \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2p+1} (-3)^p$ qui vaut donc $\frac{1}{\sqrt{3}} 2^n \operatorname{Im}(e^{i\frac{n\pi}{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. Cette somme est bien nulle si et seulement si n est un multiple de 6.

2.7 Le second degré et plus.

Exercice de khôlle 110

Déterminer les solutions de $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

Solution : On calcule $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (3 + i) = -3 - 4i$. On cherche $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient le système (car $(\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$ et $|\alpha + i\beta|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ 2\alpha\beta = -4 \end{cases} \quad \text{d'où } 2\alpha^2 = 2 \text{ et } 2\beta^2 = 8$$

on choisit $\alpha = 1$ et $\beta = -2$, ainsi $\delta = 1 - 2i$. Les solutions sont alors

$$z_1 = \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i \text{ et } z_2 = \frac{3 - (1 - 2i)}{2} = 1 + i$$

Exercice de khôlle 111

Résoudre $z^2 - (4 + i)z + 5(1 + i) = 0$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4 - i)^2 - 4 \times 5 \times (1 + i) \\ &= (4 + i)^2 - 4 \times 5 \times (1 + i) \\ &= 15 + 8i - 20 - 20i = -5 - 12i \end{aligned}$$

On cherche $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient le système $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -5 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{25 + 144} = 13 \\ 2\alpha\beta = -12 \end{cases}$ ce qui donne $2\alpha^2 = 8$, on choisit $\alpha = 2$ puis $\beta = -3$ d'où $\delta = 2 - 3i$. Les solutions sont alors

$$z_1 = \frac{(4 + i) + (2 - 3i)}{2} = 3 - i \text{ et } z_2 = \frac{(4 + i) - (2 - 3i)}{2} = 1 + 2i$$

Exercice de khôlle 112

Déterminer les solutions de $z^2 - z + 1 + i = 0$. Donner ensuite les formes polaires des solutions.

Solution : On a

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (1 + i) = -3 - 4i$$

On cherche $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient le système $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{25 + 144} = 5 \\ 2\alpha\beta = -4 \end{cases}$ ce qui donne $2\alpha^2 = 2$, on choisit $\alpha = 1$ puis $\beta = -2$ d'où $\delta = 1 - 2i$. Les solutions sont alors

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1 + 1 - 2i}{2} = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ \text{et } z_2 &= \frac{1 - (1 - 2i)}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 113

Résoudre

$$iz^3 + (-1 + 2i)z^2 - (4 + i)z + 3(-1 + 2i) = 0$$

sachant que cette équation admet une solution réelle.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$ la solution réelle alors $ix^3 + (-1 + 2i)x^2 - (4 + i)x + 3(-1 + 2i) = 0$ d'où

$$(-x^2 - 4x - 3) + i(x^3 + 2x^2 - x + 6) = 0$$

Puisque $-x^2 - 4x - 3 \in \mathbb{R}$ et $x^3 + 2x^2 - x + 6 \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\begin{cases} -x^2 - 4x - 3 = 0 \\ x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de $x^2 + 4x + 3 = 0$ sont -3 et -1 . Puisque $(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 6 = 8 \neq 0$ c'est que $x = -3$. On sait que l'on peut factoriser

$$iz^3 + (-1 + 2i)z^2 - (4 + i)z + 3(-1 + 2i) = (z + 3)(az^2 + bz + c)$$

Le coefficient a vaut i (coefficient dominant à droite et à gauche), et avec $x = 0$ on a $3c = 3(-1 + 2i)$ d'où $c = -1 + 2i$. Puis en considérant les coefficient en x^2 on obtient

$$-1 + 2i = 3a + b \text{ d'où } b = -1 - i$$

Ainsi

$$ix^3 + (-1 + 2i)x^2 - (4 + i)x + 3(-1 + 2i) = (x + 3)(ix^2 - (1 + i)x - 1 + 2i)$$

On résout alors

$$iz^2 - (1 + i)z - 1 + 2i = 0$$

On a $\Delta = (1 + i)^2 - 4 \times i(-1 + 2i) = 8 + 6i$. On cherche $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient le système

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{64 + 36} = 10 \\ 2\alpha\beta = 6 \end{cases}$$

ce qui donne $2\alpha^2 = 18$, on choisit $\alpha = 3$ puis $\beta = 1$ d'où $\delta = 3 + i$. Les solutions de $iz^2 - (1 + i)z - 1 + 2i = 0$ sont alors

$$z_1 = \frac{(1 + i) + (3 + i)}{2i} = 1 - 2i \text{ et } z_2 = \frac{(1 + i) - (3 + i)}{2i} = i$$

Au final, on a trois solutions : $-3, 1 - 2i$ et i .

Exercice de khôlle 114

Résoudre

$$z^3 - (3 + i)z^2 + 4(1 + i)z - 4(1 + i) = 0$$

sachant que cette équation admet une solution réelle.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$ la solution réelle alors $x^3 - (3 + i)x^2 + 4(1 + i)x - 4(1 + i) = 0$ d'où

$$(x^3 - 3x^2 + 4x - 4) + i(-3x^2 + 4x - 4) = 0$$

Puisque $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 \in \mathbb{R}$ et $-3x^2 + 4x - 4 \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0 \\ -x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

La solutions de $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$ est $x = 2$ dont on peut vérifier qu'elle est aussi solution de $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$. On sait que l'on peut factoriser

$$z^3 - (3 + i)z^2 + 4(1 + i)z - 4(1 + i) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$$

Le coefficient a vaut 1 (coefficient dominant à droite et à gauche), et avec $x = 0$ on a $-2c = -4(1 + i)$ d'où $c = 2 + 2i$. Puis en considérant les coefficient en x^2 on obtient

$$-3 - i = -2a + b \text{ d'où } b = -1 - i$$

Ainsi

$$z^3 - (3+i)z^2 + 4(1+i)z - 4(1+i) = (z-2)(z^2 - (1+i)z + (2+2i))$$

On résout alors

$$z^2 - (1+i)z + (2+2i) = 0$$

On a $\Delta = (1+i)^2 - 4 \times (2+2i) = -8 - 6i$. On cherche $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient le système

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -8 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{64+36} = 10 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \quad \text{ce qui donne } 2\alpha^2 = 2, \text{ on choisit } \alpha = 1 \text{ puis } \beta = -3 \text{ d'où } \delta = 1 - 3i. \text{ Les solutions de}$$

$z^2 - (1+i)z + (2+2i) = 0$ sont alors

$$z_1 = \frac{(1+i) + (1-3i)}{2} = 1-i \text{ et } z_2 = \frac{(1+i) - (1-3i)}{2} = 2i$$

Au final, on a trois solutions : $2, 2i$ et $1-i$.

Exercice de khôlle 115

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, en développant $(z + |z|)^2$, trouver une formule simple pour calculer les racines deuxièmes de z . Vérifier avec $z = 3 + 4i$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} (z + |z|)^2 &= z^2 + 2z|z| + |z|^2 = z^2 + 2z|z| + z\bar{z} \\ &= z(z + 2|z| + \bar{z}) = z \times 2(|z| + \operatorname{Re}(z)) \end{aligned}$$

Mais on sait que $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ donc

$$|z| + \operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ et ainsi } 2(|z| + \operatorname{Re}(z)) = \sqrt{2(|z| + \operatorname{Re}(z))}^2$$

Enfin $|z| + \operatorname{Re}(z) \neq 0$ sinon $(z + |z|)^2 = 0$ d'où $z = -|z| \in \mathbb{R}_-$ d'où

$$z = \left(\frac{z + |z|}{\sqrt{2(|z| + \operatorname{Re}(z))}} \right)^2$$

Exemple si $z = 3 + 4i$ alors $|z| = 5$ et

$$\frac{z + |z|}{\sqrt{2(|z| + \operatorname{Re}(z))}} = \frac{3 + 4i + 5}{\sqrt{2(5+3)}} = 2 + i$$

Exercice de khôlle 116

Résoudre $z^3 - (3+2i)z^2 + (4+6i)z - 8i$ après avoir déterminé une racine imaginaire pure.

Solution : On cherche z solution sous la forme $z = iy$ où $y \in \mathbb{R}$. On a alors $z = iy$ solution si et seulement si

$$(iy)^3 - (3+2i)(iy)^2 + (4+6i)iy - 8i = 0$$

soit

$$(3y^2 - 6y) + i(-y^3 + 2y^2 + 4y - 8) = 0$$

Puisque $y \in \mathbb{R}$, on en déduit (unicité des parties réelles et imaginaires) que

$$3y^2 - 6y = 0 \text{ et } -y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0$$

$y = 0$ n'est pas solution de $-y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0$ mais $y = 2$ l'est (simple vérification) ainsi $z = 2i$ est solution. On peut alors factoriser

$$z^3 - (3 + 2i)z^2 + (4 + 6i)z - 8i = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$

Avec le coefficient dominant il vient $a = 1$, puis $z = 0$ donne $c = 4$. Enfin

$$(z - 2i)(z^2 + bz + 4) = z^3 + (b - 2i)z^2 \dots \text{ d'où } b - 2i = -3 - 2i$$

Bref $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (4 + 6i)z - 8i = (z - 2i)(z^2 - 3z + 4)$. Enfin $z^2 - 3z + 4 = 0$ donne deux solutions ($\Delta = 9 - 16 = -7$) qui sont $\frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$. Au final, on a trois solutions

$$2i, \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} \text{ et } \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice de khôlle 117

Résoudre

$$z^8 - 2(i\sqrt{3} - 1)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$$

Solution : On pose $Z = z^4$ et on résout $Z^2 - 2(i\sqrt{3} - 1)Z - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$. On peut appliquer la méthode classique, mais on «voit» que

$$-2(i\sqrt{3} - 1) = -4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4j \text{ et } -8(1 + i\sqrt{3}) = 16 \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16j^2$$

On a $\Delta = 16j^2 - 4 \times 16j^2 = -48j^2 = 48e^{i\frac{\pi}{3}}$ ainsi $\delta = \sqrt{48}e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2i\sqrt{3} + 6$ vérifie $\delta^2 = \Delta$.

Les solutions sont donc

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{2(i\sqrt{3} - 1) + (2i\sqrt{3} + 6)}{2} = 2(1 + i\sqrt{3}) = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \\ \text{et } Z_2 &= \frac{2(i\sqrt{3} - 1) - (2i\sqrt{3} + 6)}{2} = -4 = 4e^{i\pi} \end{aligned}$$

On résout ensuite

$$\begin{aligned} z^4 &= 4e^{i\frac{\pi}{3}} \iff \exists k \in \{0, 1, 2, 3\}, z = \sqrt[4]{4}e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2ik\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{ik\pi}{2})} \\ \text{car } \sqrt[4]{4} &= 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

ce qui donne 4 solutions : $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $-i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Puis

$$z^4 = 4e^{i\pi} \iff \exists k \in \{0, 1, 2, 3\}, z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{ik\pi}{2})}$$

ce qui donne 4 autres solutions : $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$, $i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = -1 + i$, $-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = -1 - i$ et $-i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 - i$.

Au final, les solutions sont

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, -i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$$

Remarque : On peut calculer simplement $e^{i\frac{\pi}{12}}$, en effet $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ donc

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Exercice de khôlle 118

Résoudre $z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$ sachant qu'il existe une racine réelle et une imaginaire pure.

Solution : Soit x la racine réelle alors

$$x^4 + 4ix^2 + 12(1+i)x - 45 = x^4 + 12x - 45 + i(4x^2 + 12x) = 0$$

Puisque $x \in \mathbb{R}$ on peut affirmer que $x^4 + 12x - 45 \in \mathbb{R}$ et $4x^2 + 12x \in \mathbb{R}$. Par unicité des parties réelles et imaginaires, on a

$$\begin{cases} x^4 + 12x - 45 = 0 \\ 4x^2 + 12x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 + 12x - 45 = 0 \\ 4x(x+3) = 0 \end{cases}$$

Puisque $x = 0$ n'est pas solution de $x^4 + 12x - 45 = 0$, la racine réelle est $x = -3$.

De même si iy , où $y \in \mathbb{R}$, est la racine imaginaire pure, alors

$$(iy)^4 + 4i \times (iy)^2 + 12(1+i) \times iy - 45 = y^4 - 12y - 45 + i \times (-4y^2 + 12y) = 0$$

Puisque $y \in \mathbb{R}$ on peut affirmer que $y^4 - 12y - 45 \in \mathbb{R}$ et $-4y^2 + 12y \in \mathbb{R}$. Par unicité des parties réelles et imaginaires, on a

$$\begin{cases} y^4 - 12y - 45 = 0 \\ (-4y^2 + 12y) = 0 \end{cases} \text{ d'où } y = 3$$

et ainsi $3i$ est la solution imaginaire. On sait que l'on alors factoriser

$$z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = (z+3)(z-3i) \times Q(z)$$

où $\deg Q = 2$. On cherche donc Q sous la forme $Q(z) = az^2 + bz + c$. Puisque $(z+3)(z-3i) = z^2 - (-3+3i)z - 9i$ (penser à $Z^2 - (\text{somme}) \times Z + (\text{produit})$), on obtient

$$\begin{aligned} z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 &= (z+3)(z-3i)(az^2 + bz + c) \\ &= (z^2 - (-3+3i)z - 9i) \times (az^2 + bz + c) \\ &= az^4 + (c - b(-3+3i) - 9ai)z^2 + \dots - 9ic \end{aligned}$$

d'où $a = 1$, $c = \frac{45}{9i} = \frac{5}{i} = -5i$ et $c - b(-3+3i) - 9ai = -b(-3+3i) - 14i = 4i$ donne

$$b = \frac{18i}{3-3i} = \frac{6i}{1-i} = \frac{6i \times (1+i)}{2} = -3+3i$$

On a donc

$$Q(z) = z^2 + (-3+3i)z - 5i$$

On termine en résolvant $z^2 + (-3+3i)z - 5i = 0$. Le discriminant vaut

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3+3i)^2 + 4 \times 5i = 9 \times (-1+i)^2 + 20i \\ &= 9 \times (1-2i-1) + 20i = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

On choisit $\delta = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$ pour en déduire que les racines de Q sont

$$z_1 = \frac{3-3i+1+i}{2} = 2-i \text{ et } z_2 = \frac{3-3i-1-i}{2} = 1-2i$$

Au final, les solutions de $z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$ sont $-3, 3i, 2-i$ et $1-2i$.

Exercice de khôlle 119

Existe-t-il a et b réels tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$. Même question si on cherche a et b complexes.

Solution : Méthode ① : Puisque l'on cherche $a \neq 0$ (sinon le problème n'a pas de sens), on peut poser $x = \frac{b}{a}$, qui est également non nul. On a alors

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ax} - \frac{1}{a(x+1)} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

Cela revient donc à chercher x réel tel que $1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = 0$. Puisque les racines (complexes) de $x^2+x+1=0$ sont j et j^2 , il n'y a pas de solution réelles. En revanche sur $\mathbb{C}$, on a $x = j$ ou $x = j^2$ ce qui donne comme solutions

$$(a, b) = (a, ja) \text{ ou } (a, b) = (a, j^2a) \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*$$

Méthode ② : Analyse : Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ alors $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}$ d'où $ab = (a+b)^2$. On pose $S = a+b$, on sait que a et b sont racines de $X^2 - (a+b)X + ab$ donc de $X^2 - SX + S^2$. Le discriminant de cette équation (à coefficients réels, car on suppose d'abord a et b réels) vaut $\Delta = S^2 - 4S^2 = -3S^2 < 0$ (car $S \neq 0$ sinon le terme $\frac{1}{a+b}$ n'est pas défini).

Il n'y a donc pas de solutions dans $\mathbb{R}$. En revanche dans $\mathbb{C}$, on a $\Delta = (i\sqrt{3}S)^2$ et ainsi

$$a = \frac{S + i\sqrt{3}S}{2} = -Sj^2 \text{ et } b = \frac{S - i\sqrt{3}S}{2} = -Sj \text{ ou } a = \frac{S - i\sqrt{3}S}{2} \text{ et } b = \frac{S + i\sqrt{3}S}{2}$$

Les seules solutions possibles sont donc de la forme $(a, b) = (-Sj, -Sj^2)$ ou $(a, b) = (-Sj^2, -Sj)$ où $S \in \mathbb{C}^*$ est quelconque.

Synthèse : Si on pose $a = -Sj$ et $b = -Sj^2$ (ou $a = -Sj^2$ et $b = -Sj$ ce qui ne change rien) avec $S \in \mathbb{C}^*$ alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= -\frac{1}{S} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j^2} \right) = -\frac{1}{S} \times \frac{j+j^2}{j^3} = \frac{1}{S} \text{ car } j+j^2 = -1 \text{ et } j^3 = 1 \\ \frac{1}{a+b} &= -\frac{1}{S} \times \frac{1}{j+j^2} = \frac{1}{S} \end{aligned}$$

ce qui prouve que les solutions trouvées le sont effectivement (solutions!).

2.8 Les racines énièmes.

Exercice de khôlle 120

Résoudre $(z+i)^4 = z^4$.

Solution : Comme l'exo type ! $z = 0$ n'est pas solution (car $i^4 = 1 \neq 0$) donc

$$(z+i)^4 = z^4 \iff \left(\frac{z+i}{z} \right)^4 = 1 \iff \frac{z+i}{z} \in \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

Puis

$$\begin{aligned}\frac{z+i}{z} &= 1 \iff z+i = z \iff i = 0 \text{ impossible} \\ \frac{z+i}{z} &= i \iff z+i = iz \iff z(1-i) = -i \iff z = \frac{1-i}{2} \\ \frac{z+i}{z} &= -1 \iff z+i = -z \iff z = -\frac{i}{2} \\ \frac{z+i}{z} &= -i \iff z+i = -iz \iff z(1+i) = i \iff \frac{-1-i}{2}\end{aligned}$$

Les solutions sont donc $\frac{1-i}{2}$, $-\frac{i}{2}$ et $\frac{-1-i}{2}$.

Exercice de khôlle 121

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 1$.

- En développant $\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right)$, montrer que z est une racine cinquième de l'unité.
- Que vaut

$$\left(3z^{100} + \frac{2}{z^{100}} + 1\right)\left(z^{100} + \frac{2}{z^{100}} + 4\right)?$$

Solution :

- On a $\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{z}$ et $\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = \frac{z^2+z+1}{z}$ d'où

$$\begin{aligned}\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) &= \frac{(z^2+1) \times ((z^2+1) + z)}{z^2} = \frac{(z^2+1)^2 + z(z^2+1)}{z^2} \\ &= \frac{z^4 + 2z^2 + 1 + z^3 + z}{z^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) &= 1 \iff \frac{z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^2} = 1 \\ &\iff \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} + 1 = 1 \\ \text{d'où } z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 &= 0\end{aligned}$$

Puisque $z = 1$ n'est pas solution (car $2 \times 3 \neq 1$), on a $\frac{z^5-1}{z-1} = 0$ d'où $z^5 = 1$. Conclusion z est bien une racine cinquième de l'unité.

- On a alors $z^{100} = (z^5)^{20} = 1$ d'où $\left(3z^{100} + \frac{2}{z^{100}} + 1\right)\left(z^{100} + \frac{2}{z^{100}} + 4\right) = (3+2+1) \times (1+2+4) = 42$ (la réponse à tout!).

Exercice de khôlle 122

Soient a et b deux complexes et $n \geq 2$, pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b)$ et en déduire que $|a| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|$.
2. Justifier que $\omega_k = \frac{1}{\omega_{n-k}}$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b| = \sum_{k=0}^{n-1} |b + \omega_k a|$.
3. Conclure à

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|$$

Solution :

1. On a $\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b) = \sum_{k=0}^{n-1} a + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k b = na + b \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$. Mais $\omega_k = (\omega_1)^k$ (d'après De Moivre et car on connaît le cours sur les racines énièmes!). Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_1)^k = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} = 0 \text{ car } \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1 \text{ et } \omega_1^n = \omega_n = 1$$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b) = na$ puis

$$\begin{aligned} |a| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b) \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b) \right| \text{ car } \frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+ \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b| \text{ par ITG} \end{aligned}$$

2. On a $\frac{1}{\omega_{n-k}} = e^{-\frac{2i(n-k)\pi}{n}} = e^{\frac{2ik\pi}{n} - 2i\pi} = \omega_k$. On peut aussi écrire que $\omega_{n-k} = \omega_1^{n-k}$ donc $\frac{1}{\omega_{n-k}} = \omega_1^{k-n} = \frac{\omega_1^k}{\omega_1^n} = \frac{\omega_1^k}{1} = \omega_k$ car $\omega_1^n = 1$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b| &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| a + \frac{b}{\omega_{n-k}} \right| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a\omega_{n-k} + b|}{|\omega_{n-k}|} = \sum_{k=0}^{n-1} |a\omega_{n-k} + b| \text{ car } \omega_{n-k} \in \mathbb{U} \\ &\stackrel{=}{=} \sum_{i=n-k}^n |a\omega_i + b| = \sum_{i=0}^{n-1} |a\omega_i + b| + |a\omega_n + b| - |a\omega_0 + b| = \sum_{k=0}^{n-1} |a\omega_k + b| \\ \text{car } \omega_n &= \omega_0 (=1). \end{aligned}$$

3. Par symétrie des rôles, on a $|b| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a\omega_k + b|$ d'où en sommant

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|$$

Exercice de khôlle 123

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on note $\mathbb{Z}[j]$ l'ensemble des complexes de la forme $a + jb$ où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{U}_6$ l'ensemble des racines sixièmes de l'unité.

1. Que vaut $1 + j + j^2$? Montrer que $j^2 \in \mathbb{Z}[j]$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est stable par l'addition, le produit, la conjugaison (i.e. que si $(z, z') \in \mathbb{Z}[j]^2$ alors $z + z'$, zz' et $\bar{z}$ sont dans $\mathbb{Z}[j]$).
3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{Z}[j], |z|^2 \in \mathbb{N}$.
4. Exprimer les éléments de $\mathbb{U}_6$ en fonction de j et en déduire que $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{Z}[j]$.
5. On pose $\mathbb{Z}[j]^\times = \left\{ z \in \mathbb{Z}[j], \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}[j] \right\}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}[j]$ dont l'inverse est aussi dans $\mathbb{Z}[j]$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{Z}[j]^\times$.
 - (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]^\times$, montrer que $z \in \mathbb{U}$ (utiliser $|z|^2$ et $\left| \frac{1}{z} \right|^2$ sont dans $\mathbb{N}$) et en déduire que $\mathbb{Z}[j]^\times = \mathbb{U}_6$.

Solution :

1. On sait que $1 + j + j^2 = 0$ donc $j^2 = (-1) + (-1)j \in \mathbb{Z}[j]$ (pour prouver qu'un élément est dans $\mathbb{Z}[j]$, il suffit de l'écrire $a + jb$ où a et b sont dans $\mathbb{Z}$).
2. Si $z = a + bj$ et $z' = a' + b'j$ où $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$ alors

$$z + z' = (a + a') + (b + b')j$$

avec $a + a' \in \mathbb{Z}$ et $b + b' \in \mathbb{Z}$ en tant que somme d'entiers.

$$\begin{aligned} zz' &= aa' + bb'j^2 + (ab' + a'b)j \\ &= aa' - bb' + (ab' + a'b - bb')j \text{ car } j^2 = -1 - j \end{aligned}$$

avec $aa' - bb' \in \mathbb{Z}$ et $ab' + a'b - bb' \in \mathbb{Z}$ (somme et produits d'entiers). Enfin

$$\bar{z} = a + b\bar{j} = a + bj^2 = (a - b) - bj$$

avec $a - b \in \mathbb{Z}$ et $-b \in \mathbb{Z}$. Ceci prouve que $\mathbb{Z}[j]$ est stable par l'addition, le produit, la conjugaison.

3. Si $z = a + bj$ où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ alors $|z|^2 = z\bar{z} = (a + bj)(a + bj^2) = a^2 + b^2j^3 + ab(j + j^2) = a^2 + b^2 - ab$ car $j^3 = 1$ et $j + j^2 = -1$. Ainsi $|z|^2 \in \mathbb{Z}$ en tant que somme et différence d'entiers relatifs. Mais comme $|z|^2$ est le carré d'un module, il est positif, ainsi $|z|^2 \in \mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$.
4. On sait que

$$\mathbb{U}_6 = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{6}}, k \in \llbracket 0; 5 \rrbracket \right\} = \left\{ 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, j, -1, j^2, e^{\frac{5i\pi}{3}} \right\}$$

$$\text{Mais } e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2 \text{ et } e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}} = -j. \text{ Ainsi}$$

$$\mathbb{U}_6 = \{1, -j^2, j, -1, j^2, -j\} = \{1, 1 + j, j, -1, -1 - j, -j\}$$

d'où $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{Z}[j]$ (car $1 = 1 + 0 \times j$ et $-1 = -1 + 0 \times j$).

5.

- (a) Tous les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont dans $\mathbb{Z}[j]$ et sont non nuls donc inversibles. Puisqu'ils sont de module égal à 1, leur inverse est égal à leur conjugué donc est encore dans $\mathbb{Z}[j]$. Conclusion, tous les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont dans $\mathbb{Z}[j]^\times$, ce qui signifie que $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{Z}[j]^\times$.

- (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]^\times$ alors $\frac{1}{z} \in \mathbb{Z}[j]$. Mais alors $1 = \left| z \times \frac{1}{z} \right|^2 = |z|^2 \times \left| \frac{1}{z} \right|^2$. Puisque $\left(z, \frac{1}{z} \right) \in \mathbb{Z}[j]^2$, $|z|^2$ et $\left| \frac{1}{z} \right|^2$ sont des entiers naturels dont le produit vaut 1, ils sont donc égaux à 1. Conclusion $z \in \mathbb{U}$.
Mais alors si $z = a + jb$ où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ on a

$$|z|^2 = a^2 + b^2 - ab = 1$$

d'où (en utilisant $a^2 + b^2 = 1 + ab$)

$$1 - ab = (a - b)^2 \geq 0 \text{ et } 1 + ab = (a + b)^2 \geq 0$$

ce qui impose $-1 \leq ab \leq 1$. Enfin, on n'oublie pas que a et b sont des entiers, d'où les seules solutions possibles pour $-1 \leq ab \leq 1$ sont

$$(a, b) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

On remplace dans $a^2 + b^2 - ab = 1$, ce qui montre que

$$((a, b) \in \{(0, 1), (0, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, 0), (-1, -1)\})$$

et donne

$$z \in \{j, -j, 1, 1 + j, -1, -1 - j\} = \mathbb{U}_6$$

Pour conclure, si $z \in \mathbb{Z}[j]^\times$ alors $z \in \mathbb{U}_6$, et comme on a montré que $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{Z}[j]^\times$ on en déduit que $\mathbb{U}_6 = \mathbb{Z}[j]^\times$.

Exercice de khôlle 124

Pour $t \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) \quad z^{2n} - 2 \sin(t) z^n + 1 = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 2$$

Solution : On pose $Z = z^n$ et on résout ainsi (puisque $Z^2 = z^{2n}$)

$$(E_Z) \quad Z^2 - 2 \sin(t) Z + 1 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 4 \sin^2(t) - 4 = -4 \cos^2(t) = (2i \cos t)^2$. Les solutions de (E_Z) sont donc

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{2 \sin(t) + 2i \cos(t)}{2} = \sin(t) + i \cos(t) \\ Z_2 &= \overline{Z_1} = \sin(t) - i \cos(t) \text{ (équation à coefficients réels)} \end{aligned}$$

On résout ensuite $z^n = Z_1$, pour cela on écrit Z_1 sous forme polaire.

Méthode ① : On a $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ donc $Z_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - t) + i \sin(\frac{\pi}{2} - t) = e^{i(\frac{\pi}{2} - t)}$.

Méthode ② : On a $\sin(t) + i \cos(t) = i \left(\cos(t) + \frac{1}{i} \sin(t) \right) = i(\cos t - i \sin t) = i e^{-it} = e^{i(\frac{\pi}{2} - t)}$ car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

On a alors

$$z^n = Z_1 = e^{i(\frac{\pi}{2} - t)} \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} - t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

De la même manière,

$$z^n = Z_2 = \overline{Z_1} = e^{-i(\frac{\pi}{2} - t)} \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = e^{i\left(\frac{t - \frac{\pi}{2}}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Les solutions sont donc les

$$e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} - t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ et } e^{i\left(\frac{t - \frac{\pi}{2}}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ où } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$$

Exercice de khôlle 125

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$

Solution : On peut s'inspirer de l'exercice type et poser $C = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)$, $S = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)$ ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma &= C + iS = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\theta} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k \\ &= e^{i\theta} \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \text{ car si } n \geq 1 \text{ on a } e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1 \\ &= e^{i\theta} \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0 \end{aligned}$$

Puisque C et S sont réels, on a $C = \operatorname{Re}(\Sigma) = 0$ et $S = \operatorname{Re}(\Sigma) = 0$.

Remarque : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, si on pose $z = e^{in\theta}$, les racines n èmes de z sont les

$$z_k = e^{i\left(\frac{n\theta + 2k\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ où } k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$$

Ces complexes sont racines du polynôme $X^n - z$. On verra que la somme des racines est alors égale à l'opposé du coefficient de X^{n-1} divisé par le coefficient dominant. Donc, ici

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

Puisque $z_k = \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)$, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire de $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$, on obtient le résultat demandé.

Exercice de khôlle 126Résoudre $z^6 = -1$.

Solution : On écrit $-1 = 1 \times e^{i\pi}$ ainsi les solutions de $z^6 = -1$ sont les

$$z_k = \sqrt[6]{1} e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \text{ où } k \in \llbracket 1 ; 5 \rrbracket$$

On a bien 6 solutions. On peut les préciser

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_1 &= e^{i\frac{\pi+2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ z_2 &= e^{i\frac{\pi+4\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = -\overline{z_0} \\ z_3 &= e^{i\frac{\pi+6\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = -z_0 \\ z_4 &= e^{i\frac{\pi+8\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \\ z_5 &= e^{i\frac{\pi+10\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \overline{z_0} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 127

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $(z - 1)^n = (\bar{z} + 1)^n$.

Solution : Le problème c'est ce $\bar{z}$. On commence par analyser le problème (donc on fait une analyse-synthèse).

Analyse : Si z est solution alors, en passant au module,

$$|(z - 1)^n| = |(\bar{z} + 1)^n|$$

Mais $|(z - 1)^n| = |z - 1|^n$ et $|(\bar{z} + 1)^n| = |\bar{z} + 1|^n$ d'où

$$|z - 1|^n = |\bar{z} + 1|^n$$

Mais alors, puisque $|z - 1|$ et $|\bar{z} + 1|$ sont des réels positifs, on en déduit que $|z - 1| = |\bar{z} + 1|$. Enfin $|\bar{z} + 1| = \left| \overline{(z + 1)} \right| = |z + 1|$. On a donc

$$|z - 1| = |z + 1|$$

Si on note $M(z)$, $A(1)$ et $B(-1)$ alors $AM = |z - 1|$ et $BM = |z + 1|$. L'égalité $|z - 1| = |z + 1|$ devient $AM = BM$ donc M est sur la médiatrice de $[A; B]$, qui est l'axe des ordonnées. Conclusion $z \in i\mathbb{R}$.

Synthèse : Si $z \in i\mathbb{R}$ alors $\bar{z} = -z$ et l'équation devient $(z - 1)^n = (-z + 1)^n = (-1)^n (z - 1)^n$ soit

$$(1 - (-1)^n)(z - 1)^n = 0 \text{ d'où } 1 - (-1)^n = 0 \text{ (car } z \in i\mathbb{R} \text{ donc } z \neq 1)$$

Si n est impair, il n'y a pas de solution. Si n est pair, on en déduit que tous les imaginaires purs sont solutions.

Exercice de khôlle 128

Soit $u = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$ et $S = u + u^2 + u^4$.

- Justifier que $\bar{S} = u^3 + u^5 + u^6$.
- En déduire $S + \bar{S}$ et $S\bar{S}$. Quel est le signe de $\text{Im}(S)$?
- Montrer que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

- On pose

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \text{ et } S = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

- Montrer que $8 \times C \times S = S$ et en déduire la valeur de C .

Solution :

- Puisque u est de module 1, on a $\bar{u} = \frac{1}{u}$ donc

$$\bar{S} = \bar{u} + \bar{u}^2 + \bar{u}^4 = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4} = \frac{u^3 + u^2 + 1}{u^4}$$

Mais, u est une racine septième de l'unité donc $u^7 = 1$ d'où $u^3 \times u^4 = 1$, ainsi $u^3 = \frac{1}{u^4}$ et on en déduit que

$$\bar{S} = (u^3 + u^2 + 1) \times u^3 = u^3 + u^5 + u^6$$

2. Mais alors

$$\begin{aligned} S + \bar{S} &= u + u^2 + u^4 + u^3 + u^5 + u^6 \\ &= u(1 + u + \dots + u^5) = u \times \frac{1 - u^6}{1 - u} \text{ car } u \neq 1 \\ &= \frac{u - u^7}{1 - u} = -1 \text{ car } u^7 = 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S\bar{S} &= (u + u^2 + u^4)(u^3 + u^5 + u^6) \\ &= u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{10} \\ &= u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + u^7 \times u + 1 + u^7 \times u^2 + u^7 \times u^3 \\ &= 3 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = 2 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S &= \operatorname{Im}(u + u^2 + u^4) = \operatorname{Im}\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right) + \exp\left(\frac{4i\pi}{7}\right) + \exp\left(\frac{8i\pi}{7}\right)\right) \\ &= \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 \leq \sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{2\pi}{7}$ donc $\sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \geq 0$, de plus $\sin \frac{4\pi}{7} \geq 0$ car $\frac{4\pi}{7} \in [0, \pi]$ donc

$$\operatorname{Im} S > 0$$

3. On a montré que $S + \bar{S} = -1$ et que $S\bar{S} = 2$, les nombres S et $\bar{S}$ sont donc solutions de l'équation $X^2 - (-1)X + 2 = 0$ dont les racines sont $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{7}$. On sait de plus que $\operatorname{Im} S > 0$, on en déduit que

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(S) &= \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Im}(S) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{aligned} 8CS &= \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \times \left(2 \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) \times \left(2 \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Mais $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi - \frac{6\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ d'où $8CS = S$ et puisque $S \neq 0$ (aucun des sinus n'est nul car les angles ne sont pas égaux à 0 modulo π), on en déduit

$$C = \frac{1}{8}$$

Exercice de khôlle 129

Soit $n \geq 2$ et $\mathbb{U}_n = \{\omega_k, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$ les racines énièmes de 1.

1. Préciser ce que l'on peut prendre pour ω_k en fonction de k et n .

2. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$.

Solution :

1. On peut poser $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ comme dans le cours (mais on peut aussi choisir $e^{\frac{i(2k\pi+2\pi)}{n}}$ par exemple...).

2. Pour $u \in \mathbb{U}$, $|u-1|^2 = (u-1)(\overline{u-1}) = (u-1)(\overline{u}-1) = u\overline{u} - u - \overline{u} + 1 = 2 - u - \overline{u}$. Ainsi

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (2 - \omega_k - \overline{\omega_k})$$

On peut être tenté d'écrire que $\omega_k + \overline{\omega_k} = 2 \operatorname{Re}(\omega_k) = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et se ramener à calculer $C = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

en passant par $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$, mais c'est un peu idiot. En effet

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k &= 0 \text{ (cours ou bien } \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0 \text{ car } e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1) \\ \text{d'où } \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\omega_k} &= \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k} = 0 \end{aligned}$$

et ainsi $S = 2n$.

Exercice de khôlle 130

Soit $n \geq 2$ et $\mathbb{U}_n = \left\{\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\}$ les racines énièmes de 1, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k$. Vérifier votre résultat pour $n \in \{2, 3\}$.

Solution : On sait que $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\right\}$ ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -\binom{n}{n} e^{\frac{2in\pi}{n}} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = -1 + \left(1 + e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n \\ &= -1 + \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n = -1 + 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{i\pi} = -\left(1 + 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

On vérifie

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{2-1} \binom{2}{k} e^{\frac{2ik\pi}{2}} = \binom{2}{0} e^0 + \binom{2}{1} e^{\frac{2i\pi}{2}} = 1 - 2 = -1 \\ \text{et } -\left(1 + 2^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=0}^{3-1} \binom{3}{k} e^{\frac{2ik\pi}{3}} = \binom{3}{0} e^0 + \binom{3}{1} e^{\frac{2i\pi}{3}} + \binom{3}{2} e^{\frac{4i\pi}{3}} = 1 + 3j + 3j^2 = 1 - 3 = -2 \\ \text{et } -\left(1 + 2^3 \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) &= -\left(1 + 2^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)\right) = -2 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 131

Résoudre $3z^3 + z^2 + z = -\frac{1}{3}$. On donnera la forme cartésienne des solutions.

Indication : binôme ...

Solution : On sait que $(1+z)^3 = z^3 + 3z + 3z^2 + 1$ ainsi

$$3z^3 + z^2 + z = -\frac{1}{3} \iff 9z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 0 \iff 8z^3 + (z+1)^3 = 0 \iff (z+1)^3 = (-2z)^3$$

Puisque $z = 0$ n'est pas solution, on a

$$z^3 + z^2 + z = -\frac{1}{3} \iff \left(-\frac{z+1}{2z}\right)^3 = 1 \iff -\frac{z+1}{2z} \in \{1, j, j^2\}$$

Puis si $\alpha \in \mathbb{C}$, $-\frac{z+1}{2z} = \alpha \iff z+1+2z\alpha = 0 \iff z = -\frac{1}{1+2\alpha}$. Les solutions sont donc

$$-\frac{1}{1+2} = -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{1+2j} \text{ et } -\frac{1}{1+2j^2}$$

Enfin,

$$|1+2j|^2 = (1+2j)(1+2j^2) = 1+2j+2j^2+4j^3 = 1+2(j+j^2)+4 = 1-2+4 = 3$$

$$-\frac{1}{1+2j} = -\frac{1+2j^2}{|1+2j|^2} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}j^2 = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{3}i\sqrt{3} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

et pour finir $-\frac{1}{1+2j^2} = \overline{\left(-\frac{1}{1+2j}\right)} = \frac{i}{\sqrt{3}}$. Les solutions sont donc

$$\left\{-\frac{1}{3}, \frac{i}{\sqrt{3}}, -\frac{i}{\sqrt{3}}\right\}$$

Exercice de khôlle 132

Pour $n \geq 2$, résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation

$$1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0 \quad (E)$$

Solution : Pour $z \neq 1$ (ce qui est possible car $z = 1$ n'est pas solution), on a

$$\begin{aligned} 1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n &= 2 + 2z + \dots + 2z^n - 1 - z^n = \left(2 \sum_{k=0}^n z^k\right) - (1 + z^n) \\ &= 2 \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} - (z^n + 1) = \frac{2z^{n+1} - 2 - (z^n + 1)(z - 1)}{z - 1} \\ &= \frac{z^{n+1} + z^n - z - 1}{z - 1} = \frac{(z + 1)(z^n - 1)}{z - 1} \end{aligned}$$

Ainsi z est solution de (E) si et seulement si $z = -1$ ou $z^n = 1$. Les solutions de (E) sont donc

$$-1 \text{ et les } e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ pour } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$$

Remarque : Si n est pair alors $(-1)^n = 1$ donc -1 est une des racines n èmes de 1 (et se retrouve racine double).

2.9 Géométrie des complexes (images directes et réciproques cachées).

Exercice de khôlle 133

Déterminer le lieu des points $M(z)$ tels que ① $\left| \frac{2z-1}{z-3} \right| = 2$ et ② $\left| \frac{2z-1}{z-3} \right| = 1$

Solution : Pour ① :

Méthode ③ : Pour $z \neq 3$, on a

$$\left| \frac{2z-1}{z-3} \right| = 2 \iff |2z-1| = 2|z-3| \iff 2 \left| z - \frac{1}{2} \right| = 2|z-3| \iff \left| z - \frac{1}{2} \right| = |z-3|$$

La dernière égalité n'est pas vérifiée pour $z = 3$, on peut ne pas tenir compte de cette restriction. Ainsi $\left| \frac{2z-1}{z-3} \right| = 2$ si et seulement si $M(z)$ est sur la médiatrice du segment $[A; B]$ où $A(\frac{1}{2})$ et $B(3)$. Cette médiatrice a pour équation $x = \frac{\frac{1}{2} + 3}{2} = \frac{7}{4}$.

Méthode ④ : On peut procéder autrement et écrire que puisque ce sont deux nombres positifs on a, pour $z \neq 3$

$$\left| \frac{2z-1}{z-3} \right| = 2 \iff \left| \frac{2z-1}{z-3} \right|^2 = 4 \iff |2z-1|^2 = 4|z-3|^2 \iff |2z-1|^2 - 4|z-3|^2 = 0$$

On remarque que $z = 3$ ne vérifie par $|2z-1|^2 - 4|z-3|^2 = 0$. On pose alors $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ainsi

$$|2z-1|^2 = (2x-1)^2 + 4y^2 \text{ et } |z-3|^2 = (x-3)^2 + y^2$$

On obtient ainsi

$$|2z-1|^2 - 4|z-3|^2 = (2x-1)^2 + 4y^2 - 4((x-3)^2 + y^2) = 20x - 35 = 20 \left(x - \frac{7}{4} \right)$$

Ce qui prouve que

$$\left| \frac{2z-1}{z-3} \right| = 2 \iff M(z) \text{ est sur la droite d'équation } x = \frac{7}{4}$$

Pour ② : On procède comme pour la méthode ④ du ①. On remarque que $z = 3$ ne vérifie par $|2z-1|^2 - |z-3|^2 = 0$. On pose alors $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \frac{2z-1}{z-3} \right| = 1 &\iff \left| \frac{2z-1}{z-3} \right|^2 = 1 \iff |2z-1|^2 = |z-3|^2 \iff |2z-1|^2 - |z-3|^2 = 0 \\ &\iff ((2x-1)^2 + 4y^2) - ((x-3)^2 + y^2) = 0 \\ &\iff 3x^2 + 3y^2 + 2x - 8 = 0 \\ &\iff x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{8}{3} \iff \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + y^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{9} = \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Conclusion $M(z)$ est sur le cercle de centre Ω d'affixe $\omega = -\frac{1}{3}$ et de rayon $\frac{5}{3}$.

Exercice de khôlle 134

Soit f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 1, |f(z)| = 1$, que peut-on en déduire sur $f(\mathbb{C} \setminus \{1\})$? f est-elle surjective?
2. Que dire de $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$? f est-elle injective?
3. A quelle condition sur z a-t-on $f(z) \in \mathbb{R}$? Préciser le lieu des points $M(z)$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
4. Que dire $f^{-1}(\mathbb{R})$?
5. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 1, \frac{f(z)-1}{z-1} \in \mathbb{R}$.
6. Si $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, montrer que $f(z) = z$. La réciproque est-elle vraie?

Solution :

1. On a $|f(z)| = \left| \frac{z-1}{1-\bar{z}} \right| = \frac{|z-1|}{|1-\bar{z}|} = 1$ car $|1-\bar{z}| = |-(1-\bar{z})| = |\bar{z}-1| = |\overline{z-1}| = |z-1|$. On en déduit que $f(\mathbb{C} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{U}$. Puisque $f(\mathbb{C} \setminus \{1\}) \neq \mathbb{C}$, f n'est pas surjective.
2. Si $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alors $\bar{z} = z$ d'où $f(z) = -1$, ainsi $f(\mathbb{R}) = \{-1\}$. Puisque 1 a une infinité d'antécédents, f n'est pas injective.
3. On applique simplement le cours, pour $z \neq 1$

$$\begin{aligned}
 f(z) \in \mathbb{R} &\iff f(z) = \overline{f(z)} \iff \frac{z-1}{1-\bar{z}} = \frac{\bar{z}-1}{1-z} \\
 &\iff -(z-1)^2 = -(\bar{z}-1)^2 \iff z^2 - 2z + 1 = \bar{z}^2 - 2\bar{z} + 1 \\
 &\iff z^2 - \bar{z}^2 - 2(z - \bar{z}) = 0 \iff (z - \bar{z})(z + \bar{z} - 2) = 0 \\
 &\iff \begin{cases} z = \bar{z} \\ \text{ou} \\ 2\operatorname{Re}(z) - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z \text{ est réel} \\ \text{ou} \\ \operatorname{Re}(z) = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le lieu cherché est la réunion de l'axe Ox et de la droite d'équation $x = 1$, réunion privée du point $A(1)$.

Remarque : Puisque $f(z) \in \mathbb{U}$, on a $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f(z) = 1$ ou $f(z) = -1$. On résout ces deux équations, sans surprise $f(z) = -1$ donne l'axe Ox (épointé) et $f(z) = 1$ donne l'autre droite épointée.

4. On vient de montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 1, z \in \mathbb{R} \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = 1\}$
5. Si $z \neq 1$ alors

$$\frac{f(z)-1}{z-1} = \frac{\frac{z-1}{1-\bar{z}} - 1}{z-1} = -\frac{z-1-1+\bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)} = -2 \frac{\operatorname{Re}(z)-1}{|z-1|^2} \in \mathbb{R}$$

6. Si $z \in \mathbb{U}$ alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ d'où $f(z) = \frac{z-1}{1-\frac{1}{z}} = z$. Réciproquement on a

$$f(z) - z = \frac{z-1}{1-\bar{z}} - z = \frac{z\bar{z}-1}{1-\bar{z}} = 0 \iff z\bar{z} = 1 \iff |z| = 1$$

La réciproque est donc vraie!

Exercice de khôlle 135

Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $\frac{3z^2-1}{\bar{z}+i}$ soit imaginaire pur.

Solution : Soit $z \neq i$ et $Z = \frac{3z^2 - 1}{\bar{z} + i}$ alors

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\iff Z = -\bar{Z} \iff \frac{3z^2 - 1}{\bar{z} + i} = -\frac{\overline{3z^2 - 1}}{\bar{z} + i} \iff \frac{3z^2 - 1}{\bar{z} + i} = -\frac{3\bar{z}^2 - 1}{z - i} \\ &\iff (3z^2 - 1)(z - i) = -(3\bar{z}^2 - 1)(\bar{z} + i) \text{ (et } z \neq i) \\ &\iff 3z^3 - 3iz^2 - z + i = -(3\bar{z}^3 + 3i\bar{z}^2 - \bar{z} - i) \\ &\iff 3(z^3 + \bar{z}^3) - 3i(z^2 - \bar{z}^2) - (z + \bar{z}) = 0 \end{aligned}$$

Avec

$$(z^3 + \bar{z}^3) = (z + \bar{z})(z^2 - z\bar{z} + \bar{z}^2)$$

on obtient

$$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} &\iff (z + \bar{z})(3(z^2 - z\bar{z} + \bar{z}^2) - 3i(z - \bar{z}) - 1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} z + \bar{z} = 0 \\ \text{ou } 3((z^2 + \bar{z}^2) - z\bar{z}) - 3i(z - \bar{z}) - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La condition $z + \bar{z} = 0$ équivaut à $z \in i\mathbb{R}$ (avec $z \neq i$). Pour l'autre condition, on pose $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ainsi

$$\begin{aligned} z^2 + \bar{z}^2 &= 2\operatorname{Re}(z^2) = 2(x^2 - y^2) \\ z\bar{z} &= x^2 + y^2 \text{ et } z - \bar{z} = 2iy \end{aligned}$$

d'où $3((z^2 + \bar{z}^2) + z\bar{z}) - 3i(z - \bar{z}) - 1 = 0$ équivaut à

$$3(2(x^2 - y^2) - x^2 - y^2) + 6y - 1 = 3x^2 - 9y^2 + 6y - 1 = 0$$

On s'en sort car $9y^2 - 6y + 1 = (3y - 1)^2$ d'où

$$\begin{aligned} 3(2(x^2 - y^2) - x^2 - y^2) + 6y - 1 &= 0 \iff 3x^2 = (3y - 1)^2 \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{3}x = 3y - 1 \\ \text{ou } \sqrt{3}x = -3y + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, le lieu cherché est la réunion de l'axe Oy privé du point $A(i)$, la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $\sqrt{3}x = 3y - 1$ (qui ne contient pas A) et la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $\sqrt{3}x = -3y + 1$.

Exercice de khôlle 136

On considère la fonction f de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq -i, f(z) = \frac{z - 2}{z + i}$$

1. Soit $a \in \mathbb{C}$, déterminer les antécédents de a . L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Géométriquement :
 - (a) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$ (i.e les z tels que $|f(z)| = 1$).
 - (b) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
 - (c) Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.
3. Résoudre $f(z) = z$.

Solution :

1. On a, pour $z \neq -i$,

$$f(z) = a \iff \frac{z-2}{z+i} = a \iff a(z+i) = (z-2) \iff z(a-1) = -2-ai.$$

Si $a = 1$, il n'y a pas de solution, ainsi 1 n'a pas d'antécédent. L'application f n'est donc pas surjective.

Si $a \neq 1$, on obtient $z = -\frac{2+ai}{a-1}$. Mais attention, on cherche $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$! Il faut donc vérifier que l'antécédent

obtenu est bien différent de i ! On vérifie que $i = -\frac{2+ai}{a-1}$ n'a pas de solution (facile).

Remarque : L'égalité $a(z+i) = (z-2)$ est fausse si $z = -i$, donc il n'y a pas de problème !

On a donc un unique antécédent pour $a \neq 1$, f est injective. En fait $\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ définie par $\tilde{f}(z) = \frac{z-2}{z+i}$ est une bijection de bijection réciproque $\tilde{f}^{-1}(a) = -\frac{2+ai}{a-1}$.

2. Pour $z \neq -i$.

(a) On a

$$|f(z)| = 1 \iff \left| \frac{z-2}{z+i} \right| = 1 \iff \frac{|z-2|}{|z+i|} = 1 \iff |z-2| = |z+i|.$$

Soient $M(z)$, $A(2)$ et $B(-i)$ alors

$$|f(z)| = 1 \iff AM = BM$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U})$ est l'ensemble des z tels que $M(z)$ soit sur la médiatrice de $[A; B]$ (droite qui ne contient pas B , donc nul besoin d'exclure $z = -i$).

(b) On a $z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \iff f(z) \in \mathbb{R} \iff \frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R} \iff A, M, B$ alignés et $M \neq B$. Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des z tels que $M(z)$ soit sur la droite (AB) privée de B .

(c) On a $z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) \iff f(z) \in i\mathbb{R} \iff \frac{z-2}{z+i} \in i\mathbb{R} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ et $M \neq B$. Ainsi $f^{-1}(i\mathbb{R})$ est l'ensemble des z tels que $M(z)$ soit sur le cercle $\mathcal{C}([A; B])$ de diamètre $[A; B]$, cercle privé de B .

3. On a $f(z) = z \iff \frac{z-2}{z+i} = z \iff z(z+i) = (z-2) \iff z^2 - (1-i)z + 2 = 0$ (dont $z = -i$ n'est pas solution).

On calcule $\Delta = (1-i)^2 - 4 \times 2 = -8 - 2i$. On cherche $\delta = a + ib$ tels que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta^2 = \Delta$. On obtient le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \\ 2ab = -2 < 0 \end{cases}$$

On obtient $2a^2 = -8 + 2\sqrt{17}$ et $2b^2 = 8 + 2\sqrt{17}$, on choisit $a = \sqrt{2\sqrt{17}-4}$ et $b = -\sqrt{2\sqrt{17}+4}$. Les solutions de $f(z) = z$ sont alors

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1-i+\delta}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1-i-\delta}{2} \\ \text{où } \delta &= \sqrt{2\sqrt{17}-4} - i\sqrt{2\sqrt{17}+4} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 137

Soit f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, par $f(z) = \frac{z}{\bar{z}+i}$.

- Déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$ (i.e les z tels que $|f(z)| = 1$).
- Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f\left(x + \frac{i}{2}\right)$, qu'en pensez-vous ?
- Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Solution :

1. On a, pour $z \neq -i$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= 1 \iff |f(z)|^2 = 1 \iff f(z) \overline{f(z)} = 1 \iff \frac{z}{\bar{z}+i} \times \overline{\left(\frac{z}{\bar{z}+i}\right)} = 1 \\ &\iff \frac{z}{\bar{z}+i} \times \frac{\bar{z}}{z-i} = 1 \iff \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1} = 1 \\ &\iff z\bar{z} = z\bar{z}+i(z-\bar{z})+1 \iff i(z-\bar{z}) = -1 \end{aligned}$$

On pose $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ainsi $i(z - \bar{z}) = -1 \iff -2y = -1 \iff y = \frac{1}{2}$.

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{U})$ est l'ensemble des z tels que $M(z)$ soit sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ (qui ne contient pas $z = -i$).

2. On a $f\left(x + \frac{i}{2}\right) = \frac{x + \frac{i}{2}}{x - \frac{i}{2} + i} = 1$. Oh oh! Donc si on récapitule, on a $|f(z)| = 1 \iff z = x + \frac{i}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$, mais alors $f(z) = 1$. Conclusion, $|f(z)| = 1 \iff f(z) = 1$. En particulier, tout complexe de module 1, différent de 1, n'a pas d'antécédent!

3. On a, pour $z \neq -i$

$$\begin{aligned} z &\in f^{-1}(\mathbb{R}) \iff f(z) \in \mathbb{R} \iff \frac{z}{\bar{z}+i} = \overline{\left(\frac{z}{\bar{z}+i}\right)} \\ &\iff \frac{z}{\bar{z}+i} = \frac{\bar{z}}{z-i} \iff z(z-i) = \bar{z}(\bar{z}+i) \\ &\iff z^2 - \bar{z}^2 - i(z+\bar{z}) = 0 \\ &\iff (z+\bar{z})(z-\bar{z}-i) = 0 \end{aligned}$$

On pose $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ainsi $z \in f^{-1}(\mathbb{R}) \iff 2x(2iy - i) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Conclusion $f^{-1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des z tels que $M(z)$ soit sur l'axe des imaginaires purs (privé de $-i$) ou sur Δ (et dans ce cas $f(z) = 1$, ouf!).

Exercice de khôlle 138

Un quadrilatère est dit orthodiagonal si ses diagonales sont orthogonales. On se propose de démontrer qu'un quadrilatère

$ABCD$ est orthodiagonal si et seulement si la surface des carrés construits sur deux côtés opposés est égale à la surface des carrés construits sur les deux autres côtés opposés.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé et du produit scalaire usuel. Si z et z' sont deux complexes, on note

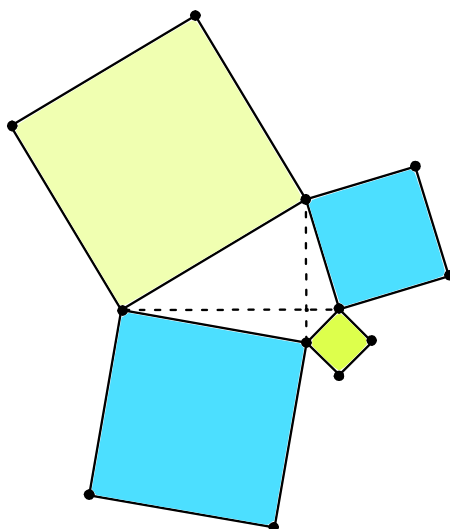
$$z \cdot z' = \operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes $u = x_u + iy_u$ et $v = x_v + iy_v$ où $(x_u, y_u, x_v, y_v) \in \mathbb{R}^4$, montrer que le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à $u \cdot v$.
- Soient a, b, c, d quatre complexes, montrer l'égalité

$$|b-c|^2 - |c-a|^2 + |a-d|^2 - |b-d|^2 = (a-b) \cdot (c-d)$$

- En déduire le résultat énoncé.

Un exemple de quadrilatère orthodiagonal :



Solution :

1. On sait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$, un simple calcul montre que $\operatorname{Re}(u\bar{v}) = x_u x_v + y_u y_v$.

2. On a $|z - z'|^2 = (z - z')(\bar{z} - \bar{z}') = |z|^2 + |z'|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$ ainsi

$$\begin{aligned}
 & (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) - (c-a)(\bar{c}-\bar{a}) + (a-d)(\bar{a}-\bar{d}) - (b-d)(\bar{b}-\bar{d}) \\
 = & \left(|b|^2 + |c|^2 - 2\operatorname{Re}(b\bar{c})\right) \\
 & - \left(|c|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(c\bar{a})\right) \\
 & + \left(|a|^2 + |d|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{d})\right) \\
 & - \left(|b|^2 + |d|^2 - 2\operatorname{Re}(b\bar{d})\right) \\
 = & 2 \left(\operatorname{Re}(c\bar{a}) + \operatorname{Re}(b\bar{d}) - \operatorname{Re}(b\bar{c}) - \operatorname{Re}(a\bar{d})\right)
 \end{aligned}$$

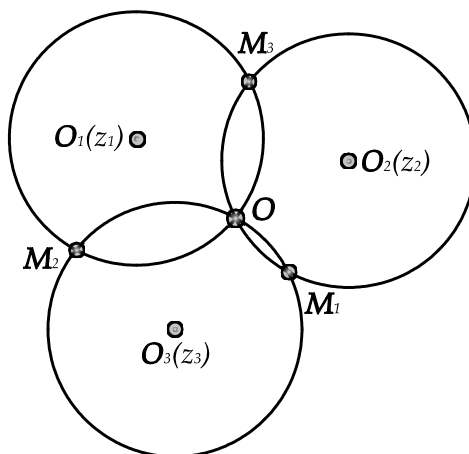
Puisque $\operatorname{Re}(c\bar{a}) = \operatorname{Re}(\overline{c\bar{a}}) = \operatorname{Re}(a\bar{c})$ on a bien le résultat.

3. Si a, b, c, d sont les affixes de A, B, C et D alors $|b-c|^2 = BC^2$ est l'aire du carré construit sur le côté BC (et de même pour $|c-a|^2$, $|a-d|^2$ et $|b-d|^2$). Le quadrilatère est orthodiagonal si et seulement si $(a-b) \cdot (c-d) = 0$ donc si et seulement si $BC^2 + AD^2 = CA^2 + BD^2$.

Exercice de khôlle 139

Soient O_1, O_2 et O_3 trois points, deux à deux distincts, du plan. On désigne par $\mathcal{C}_i$ le cercle de centre O_i et de rayon

1. On suppose que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont un point commun noté O que l'on choisit comme origine du repère. On note alors z_1, z_2 et z_3 les affixes respectives de O_1, O_2 et O_3 . Enfin M_1, M_2 et M_3 désignent le second point d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ et de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ respectivement.



- Justifier que pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $|z_i| = 1$.
- Soit H le point d'affixe $h = z_1 + z_2 + z_3$, justifier que H est l'orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle $O_1O_2O_3$.
- Justifier que pour j, k, ℓ tels que $\{j, k, \ell\} = \{1, 2, 3\}$, l'affixe de M_j est $z_k + z_\ell$ puis que M_1, M_2 et M_3 sont sur le cercle de centre H et de rayon 1.

Solution :

- L'affixe de O est 0, puisque O est sur le cercle de centre O_i et de rayon 1, on a $OO_i = 1$ d'où $|z_i - 0| = 1$.
- On montre que $(O_1H) \perp (O_2O_3)$ et $(O_2H) \perp (O_1O_3)$ sont perpendiculaires. On sait que (les points sont deux à deux distincts)

$$(O_1H) \perp (O_2O_3) \iff \frac{h - z_1}{z_3 - z_2} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z_3 + z_2}{z_3 - z_2} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z_3 + z_2}{z_3 - z_2} = -\frac{\overline{z_3 + z_2}}{z_3 - z_2} \iff \frac{z_3 + z_2}{z_3 - z_2} = -\frac{\overline{z_3} + \overline{z_2}}{\overline{z_3} - \overline{z_2}}$$

Méthode ① : On écrit que

$$\begin{aligned} \frac{z_3 + z_2}{z_3 - z_2} &= -\frac{\overline{z_3} + \overline{z_2}}{\overline{z_3} - \overline{z_2}} \iff (z_3 + z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2}) = - (z_3 - z_2)(\overline{z_3} + \overline{z_2}) \\ \iff z_3\overline{z_3} + z_2\overline{z_3} - z_3\overline{z_2} - z_2\overline{z_2} &= - (z_3\overline{z_3} - z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} - z_2\overline{z_2}) \\ \iff 2|z_3|^2 - 2|z_2|^2 &= 0 \text{ ce qui est vrai car } |z_2| = |z_3| \end{aligned}$$

Méthode ② : On sait que $\overline{z_3} = \frac{1}{z_3}$ et $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ car $|z_2| = |z_3| = 1$ ainsi

$$\frac{\overline{z_3} + \overline{z_2}}{\overline{z_3} - \overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_2 + z_3}{z_2 z_3}}{\frac{z_2 - z_3}{z_2 z_3}} = -\frac{z_3 + z_2}{z_3 - z_2}$$

ce qui prouve que $\frac{h - z_1}{z_3 - z_2} \in i\mathbb{R}$.

Par symétrie des rôles, on a également $(O_2H) \perp (O_1O_3)$ (et $(O_3H) \perp (O_1O_2)$), ainsi H est bien à l'intersection des hauteurs de $O_1O_2O_3$.

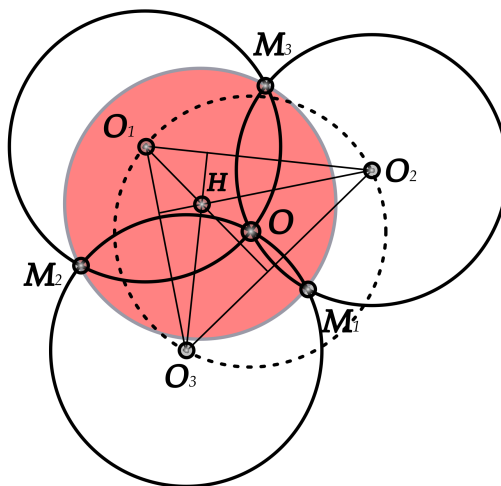
- Soit N_1 le point d'affixe $z_2 + z_3$ alors

$$O_2N_1 = |z_2 - (z_2 + z_3)| = |z_3| = 1 \text{ et } O_3N_1 = |z_3 - (z_2 + z_1)| = |z_2| = 1$$

Ainsi $N_1 \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$. Pour pouvoir affirmer que $N_1 = M_1$ il faut être sûr que $z_2 + z_3 \neq 0$, ce que ne dit pas l'énoncé. Mais si $z_2 + z_3 = 0$ alors O_2 et O_3 sont symétriques par rapport à O , les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont alors tangents et ne se coupent qu'en un seul point. Ainsi $N_1 = M_1$ (et est confondu avec O si $z_1 + z_2 = 0$). Par symétrie des rôles, $z_1 + z_2$ est l'affixe de M_3 et $z_1 + z_3$ celle de M_2 . Enfin

$$|h - (z_1 + z_2)| = |z_3| = 1 \text{ montre que } M_3 \in \mathcal{C}(H, 1)$$

et la symétrie des rôles permet de conclure.



Remarque : Cette amusette mathématique, qui porte le nom de «five lei coin problem», est du mathématicien roumain Gheorghe Tzitzeica. (la monnaie roumaine est le leu, au pluriel lei).

CHAPITRE 3

GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉELS, LES FONCTIONS, IAF

3.1 Inégalités

Exercice de khôlle 140

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$n^n \leq \frac{(2n)!}{n!} \leq 2^n n^n$$

Solution : On a

$$\frac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2) \cdots (2n) = \prod_{k=n+1}^{2n} k$$

Puisque $n \leq n+1 \leq k \leq 2n$, on a

$$n^n = \prod_{k=n+1}^{2n} n \leq \prod_{k=n+1}^{2n} k \leq \prod_{k=n+1}^{2n} (2n) = (2n)^n = 2^n n^n$$

Exercice de khôlle 141

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$
2. Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par $u_n = \frac{n^n}{2^n \times n!}$, montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
3. En déduire que pour $n \geq 2$

$$2^n n! \leq n^{n+1}$$

Solution :

1. Un coup de binôme ! car pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \times \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \frac{n}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \geq 2 \text{ car } \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \geq 0 \text{ si } k \geq 2 \end{aligned}$$

De plus pour $n = 1$, on a $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \geq 2$.

2. On a pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1) \times n!} = \frac{(n+1)^n}{2^{n+1} \times n!} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(n+1)^n}{n^n} \times \frac{n^n}{2^n \times n!} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n u_n \geq u_n \\ \text{car } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq 2 \end{aligned}$$

La suite est bien croissante.

3. Soit $v_n = nu_n$, en tant que produit de suites croissantes, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi. Un calcul simple donne

$$u_2 = \frac{2^2}{2^2 \times 2} = \frac{1}{2} \text{ d'où } v_2 = 1$$

Ainsi pour $n \geq 2$, on a $v_n \geq 1$ d'où le résultat.

Exercice de khôlle 142

Etudier la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ sur $[1, +\infty[$. Admet-elle un minimum, un maximum ? Déterminer $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}} \geq K$$

Solution : Soit $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$, qui est bien définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{1 - \ln x}{x^2} f(x) \\ \text{car si } u(x) &= \frac{\ln x}{x} \text{ alors } u'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Puisque $\forall x \geq 1$, $f(x) \geq 0$ (c'est une exponentielle), le signe de f' est celui de $1 - \ln x$. On en déduit les variations de f

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$f(1)=1$	$\nearrow$	$f(e)$
			$\searrow$
			1

On peut calculer la limite de f en $+\infty$, on sait que $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1$. On a donc un maximum en $x = e$ qui vaut $M = e^{\frac{1}{e}} = 1,4447\dots$ et un minimum en $x = 1$ qui vaut $m = 1$.
En particulier

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq f(k) = \sqrt[k]{k} \leq f(e) = e^{\frac{1}{e}}$$

en sommant les inégalités

$$0 \leq n = \sum_{k=1}^n 1 \leq \sum_{k=1}^n f(k) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n} \leq \sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{e}} = ne^{\frac{1}{e}}$$

et par passage à l'inverse

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} = e^{-\frac{1}{e}} \leq \frac{n}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}} \leq 1$$

donc $K = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} = e^{-\frac{1}{e}} = 0,692\,2\dots$ convient.

Remarque : On peut améliorer car $2 \leq e \leq 3$ donc, avec les variations de f , on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) = \sqrt[k]{k} \leq \max(f(2), f(3))$$

Mais $f(2) = \sqrt{2} = 1,414\,2\dots$ et $f(3) = \sqrt[3]{3} = 1,442\,2\dots$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) = \sqrt[k]{k} \leq \sqrt[3]{3}$$

et $K = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 0,693\,36\dots$ convient aussi.

Exercice de khôlle 143

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que si $|x| + |y| \leq 1$ alors $|x + y| \leq 1$ et $|x - y| \leq 1$.
2. Montrer la réciproque, à savoir si $|x + y| \leq 1$ et $|x - y| \leq 1$ alors $|x| + |y| \leq 1$.

Solution :

1. D'après l'IT on a $|x + y| \leq |x| + |y| \leq 1$ et de même $|x - y| \leq |x| + |y| \leq 1$.
2. Méthode ① : Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} (1) \quad -1 &\leq x + y \leq 1 \text{ (ce qui équivaut bien à } |x + y| \leq 1) \\ (2) \quad -1 &\leq x - y \leq 1 \end{aligned}$$

Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $|x| + |y| = x + y \leq 1$ d'après (1). Si $x > 0$ et $y < 0$ alors $|x| + |y| = x - y \leq 1$ d'après (2). Puis par symétrie des rôles (car $|x - y| = |y - x|$), on en déduit que $|x| + |y| \leq 1$ lorsque $x < 0$ et $y < 0$ et lorsque $x < 0$ et $y > 0$.

Méthode ② : Par hypothèse, on a, en élevant au carré

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \leq 1 \\ (x - y)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \leq 1 \end{aligned}$$

d'où

$$2xy \leq 1 - (x^2 + y^2) \text{ et } -2xy \leq 1 - (x^2 + y^2)$$

puisque $|2xy| = \max(-2xy, 2xy)$ on peut affirmer que $|2xy| \leq 1 - (x^2 + y^2)$. Mais alors

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|xy| \leq x^2 + y^2 + 1 - (x^2 + y^2) = 1$$

Exercice de khôlle 144

Deux réels a et b tels que $b \notin \{-1, 0\}$ et $\frac{a}{b} \geq 1$, peut-on en déduire $\frac{a+1}{b+1} \geq 1$? Si oui le justifier, sinon préciser quelles conditions suffit-il d'imposer à a et b pour que cela soit vrai.

Solution : La réponse est non!

Approche naïve : Par hypothèse, $\frac{a}{b} \geq 1$ d'où, en multipliant par b , on en déduit $a \geq b$ si $b > 0$. Mais alors $a + 1 > b + 1 > 0$ et en multipliant par $\frac{1}{b+1}$ on obtient $\frac{a+1}{b+1} \geq 1$.

Méthode plus générale : pour $b \notin \{-1, 0\}$, on a $\frac{a}{b} \geq 1 \iff \frac{a}{b} - 1 \geq 0 \iff \frac{a-b}{b} \geq 0 \iff a-b$ et b de même signe.

De même $\frac{a+1}{b+1} \geq 1 \iff a-b$ et $b+1$ de même signe. Donc si $a \leq b \leq 0$ et $b < -1$ ou $a > b > 0$ l'implication est vraie.

Donc pour prouver qu'en général c'est faux, on prend $b \in]-1, 0[$, par exemple $b = -\frac{1}{2}$ et $a \leq b$, par exemple $a = -1$ alors $\frac{a}{b} = 2 \geq 1$ et $\frac{a+1}{b+1} = 0 \leq 1$.

Exercice de khôlle 145

Soient $(a, b) \in]-1, 1[$, justifier que $1 + ab > 0$ puis montrer que $\frac{a+b}{1+ab} \in]-1, 1[$.

Solution : Par hypothèse $0 \leq |a| < 1$ et $0 \leq |b| < 1$ donc $0 \leq |ab| = |a||b| \leq 1$ ainsi $-1 < ab < 1$ d'où $0 < 1 + ab < 2$. Puis, on travaille en deux temps

$$\frac{a+b}{1+ab} < 1 \iff_{1+ab>0} a+b < 1+ab \iff 0 < 1+ab-a-b$$

Mais $1 + ab - a - b = a(b-1) + 1 - b = (1-a)(1-b)$. Or $a < 1$ et $b < 1$ donc $1-a > 0$ et $1-b > 0$ d'où $0 < (1-a)(1-b)$.

De même

$$-1 < \frac{a+b}{1+ab} \iff_{1+ab>0} -1-ab < a+b \iff 0 < 1+ab+a+b = (a+1)(b+1)$$

Puisque $-1 < a$ et $-1 < b$ on a $0 < a+1$ et $0 < b+1$ d'où $0 < (a+1)(b+1)$.

Exercice de khôlle 146

Soient x, y, z des réels positifs et non nuls.

- Montrer l'inégalité arithmético-géométrique (A-G pour simplifier) : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
- En déduire que $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

Solution :

- On a $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2} (\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.

Remarque : Si vous n'avez pas vu l'OB, on pose (à y fixé, attention) $f(x) = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$ dont la dérivée est

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{x}}. \text{ On en déduit le tableau de variations}$$

x	0	y	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$
		0	

On a bien $f(y) = y - \sqrt{y^2} = y - |y| = 0$ car $y \geq 0$. Conclusion $\forall y > 0$ et $\forall x > 0$, on a $f(x) \geq 0$.

- On a donc $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}$ et $\frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}$, en multipliant ces inégalités entre nombres positifs, on en déduit que

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{2^3} \geq \sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx} = \sqrt{x^2y^2z^2} = |xyz| = xyz \text{ (car } xyz > 0)$$

d'où le résultat.

Exercice de khôlle 147

Soient x, y, z des réels positifs et non nuls. On note $S = x + y + z$ leur somme.

1. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. En déduire l'inégalité (I_1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6 - S$.
3. De même établir l'inégalité (I_2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{S}$.
4. Des deux inégalités (I_1) et (I_2) laquelle est la meilleure ?

Solution :

1. On a $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ car $x > 0$, ce qui donne bien $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

On peut aussi étudier $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

2. On a donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $y + \frac{1}{y} \geq 2$ et $z + \frac{1}{z} \geq 2$. On somme ces trois inégalités pour obtenir

$$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6$$

d'où $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6 - S$.

3. Puis $S > 0$, l'inégalité (I_2) équivaut à

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

Mais $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + 3$. D'après la première question,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{y}{x}} \geq 2$$

et de même $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ et $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$. En sommant, on a bien

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 2 + 2 + 2 + 3 = 9$$

4. Si on réfléchit un peu, on se dit que pour $S \geq 6$, l'inégalité (I_1) dit que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ est supérieur à un nombre négatif, ce qui, en soit, n'est pas extraordinaire puisque $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 0$. Alors que (I_2) donne une minoration par un nombre positif. Donc (I_2) , dans ce cas, est meilleure. Plus généralement, il s'agit de comparer, pour $S > 0$, $6 - S$ et $\frac{9}{S}$. Mais

$$\frac{9}{S} - (6 - S) = \frac{S^2 - 6S + 9}{S} = \frac{(S-3)^2}{S} \geq 0$$

ainsi $(6 - S) \leq \frac{9}{S}$. L'inégalité (I_2) est meilleure que (I_1) (sauf si $S = 3$).

Exercice de khôlle 148

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.

- Justifier que si x et y sont deux réels alors $(x + y)^2 \geq 4xy$.
- Montrer, par récurrence, que pour $n \geq 2$ on a $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i \times a_j) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{n-1}$.
- En déduire que

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \geq \left(2^n \prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

Solution :

- Evident car $(x + y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$.
- Par récurrence sur n , on montre $\mathcal{P}(n) \leftarrow \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i \times a_j) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{n-1} \rightarrow$.

Si $n = 2$, alors $\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_i \times a_j) = a_1 a_2 = \left(\prod_{k=1}^2 a_k \right)^{2-1}$, ainsi $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Supposons, à $n \geq 2$ fixé, que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On écrit

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i \times a_j) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i \times a_j) \times \prod_{1 \leq i < j = n+1} (a_i \times a_j) \stackrel{HR_n}{=} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{n-1} \times \prod_{1 \leq i < n+1} (a_i \times a_{n+1}) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{n-1} \times a_{n+1}^n \times \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = \left(a_{n+1} \times \prod_{k=1}^n a_k \right)^n = \left(\prod_{k=1}^{n+1} a_k \right)^{n+1-1} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Puisque les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont positifs, on a $\sqrt{(a_i + a_j)^2} = a_i + a_j \geq \sqrt{4a_i a_j} \geq 0$ d'où

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \geq \prod_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{4a_i a_j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{2a_i} \sqrt{2a_j} = \left(\prod_{k=1}^n \sqrt{2a_k} \right)^{n-1}$$

d'après la question 2. Mais $\prod_{k=1}^n \sqrt{2a_k} = \sqrt{\prod_{k=1}^n 2a_k} = \sqrt{2^n \prod_{k=1}^n a_k} = \left(2^n \prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{2}}$ d'où le résultat.

Exercice de khôlle 149

Soient $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1$.

- Montrer que pour $x > 0$ on a $\ln(x) \leq x - 1$.
- En déduire que $\sum_{k=1}^n p_k \ln q_k \leq \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k)$.

Solution :

1. Méthode ① : Convexité, car $\ln$ est concave donc sous sa tangente en $x = 1$. Or la tangente en $x = 1$ à la courbe représentative de $\ln$ a pour équation $y = \frac{1}{1}(x - 1) + \ln(1) = x - 1$. On a donc, pour $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

Méthode ② : on pose $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$ dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. On en déduit les variations de φ

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		- 0 +	
$\varphi(x)$		↘ 0 ↗	

Conclusion : φ a un minimum en $x = 1$, avec $\varphi(1) = 0$ on a $\varphi(x) \geq 0$ i.e. $x - 1 \geq \ln x$.

2. On a

$$\sum_{k=1}^n p_k \ln(q_k) - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k) = \sum_{k=1}^n p_k (\ln(q_k) - \ln(p_k)) = \sum_{k=1}^n p_k \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$$

Avec $x = \frac{q_k}{p_k} > 0$ et l'inégalité de la première question, il vient pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$

$$\ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right) \leq \frac{q_k}{p_k} - 1 \text{ d'où } p_k \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right) \leq q_k - p_k \text{ car } p_k \geq 0$$

On somme ces inégalités pour obtenir

$$\sum_{k=1}^n p_k \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right) \leq \sum_{k=1}^n (q_k - p_k) = \sum_{k=1}^n q_k - \sum_{k=1}^n p_k = 1 - 1 = 0$$

Conclusion

$$\sum_{k=1}^n p_k \ln(q_k) - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k) \leq 0 \text{ soit } \sum_{k=1}^n p_k \ln(q_k) - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k)$$

Exercice de khôlle 150

1. Soient $(a, b) \in [0, +\infty[$, montrer que $\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.
2. Montrer que $\forall (a_1, \dots, a_n) \in [0, +\infty[^n$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} \leq n - 1 + \frac{1}{1+a_1 + \dots + a_n}.$$

3. Soient $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, montrer que

$$\frac{|z_1 + \dots + z_n|}{1 + |z_1 + \dots + z_n|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$$

Solution :

1. On pose, pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x} + \frac{b}{1+b} - \frac{x+b}{1+x+b}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x-1}{1+x} + \frac{b}{1+b} - \frac{1+x+b-1}{1+x+b} \\ &= \frac{b}{1+b} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x+b} \end{aligned}$$

La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x+b)^2} = \frac{(1+x+b)^2 - (1+x)^2}{(1+x)^2(1+x+b)^2} \geq 0$ car $b \geq 0$ donc $1+x+b \geq 1+x \geq 0$ et par croissance de $x \mapsto x^2$. Ainsi f est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que $f(x) \geq f(0) = 0$.

Remarque : On peut aussi faire un gros calcul pour avoir

$$f(x) = \frac{bx(2+x+b)}{(b+x+1)(x+1)(b+1)} \geq 0$$

2. Par récurrence sur n , on montre $\mathcal{P}(n) = \langle \forall (a_1, \dots, a_n) \in [0, +\infty[^n, \frac{a_1 + \dots + a_n}{1 + a_1 + \dots + a_n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + a_k} \rangle$. C'est vrai si $n = 1$ (ou $n = 2$ d'après la question qui précède). Puis, si $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in [0, +\infty[^{n+1}$, on a (avec $a = a_1 + \dots + a_n$ et $b = a_{n+1}$)

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{1 + a_1 + \dots + a_{n+1}} = \frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{1 + a_1 + \dots + a_n} + \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}}$$

Puis avec (HR_n) , $\frac{a_1 + \dots + a_n}{1 + a_1 + \dots + a_n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + a_k}$ d'où

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{1 + a_1 + \dots + a_{n+1}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + a_k} + \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{1 + a_k}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{1 + a_1 + \dots + a_{n+1}} &= \frac{1 + a_1 + \dots + a_{n+1} - 1}{1 + a_1 + \dots + a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n} \\ \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + a_k - 1}{1 + a_k} = \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + a_k} = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + a_k} \end{aligned}$$

On conclut car

$$1 - \frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n} \leq n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + a_k} \iff \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + a_k} \leq n - 1 + \frac{1}{1 + a_1 + \dots + a_n}$$

3. Par IT, on a $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$ d'où (décroissance de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$)

$$\frac{1}{1 + |z_1| + \dots + |z_n|} \leq \frac{1}{1 + |z_1 + \dots + z_n|}$$

Avec, pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $a_k = |z_k| \in [0, +\infty[$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + |z_k|} \leq n - 1 + \frac{1}{1 + |z_1| + \dots + |z_n|} \leq n - 1 + \frac{1}{1 + |z_1 + \dots + z_n|}$$

Mais cette dernière inégalité équivaut à

$$1 - \frac{1}{1 + |z_1 + \dots + z_n|} = \frac{|z_1 + \dots + z_n|}{1 + |z_1 + \dots + z_n|} \leq n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + |z_k|} = \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$$

3.2 Calcul de dérivées

Exercice de khôlle 151

Calculer la dérivée de $f(x) = \left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right) \sin(2x)$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 8\cos^4(x) - 3$.

Solution : La fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = \cos^2(x) + \frac{3}{2}$ et $v(x) = \sin(2x)$, ainsi $u'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin(2x)$ et $v'(x) = 2\cos(2x)$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\sin^2(2x) + 2\left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right)\cos(2x)$$

Puis en posant $C = \cos(x)$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 = 2C^2 - 1 \\ \sin^2(2x) &= (2\sin(x)\cos(x))^2 = 4\sin^2(x)\cos^2(x) = 4(1 - C^2)C^2\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}f'(x) &= -4(1 - C^2)C^2 + 2\left(C^2 + \frac{3}{2}\right)(2C^2 - 1) \\ &= -4C^2 + 4C^4 + 2\left(2C^4 - C^2 + 3C^2 - \frac{3}{2}\right) \\ &= 8C^4 - 3 = 8\cos^4(x) - 3\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 152

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{e^{x-\frac{2}{x}}}{x^2+2x}$, quel est son signe sur $]0, +\infty[$?

Solution : La fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$. Si on pose

$$u(x) = e^{x-\frac{2}{x}} \text{ et } v(x) = x^2 + 2x$$

Alors $u(x) = \exp(w(x))$ où $w(x) = x - \frac{2}{x}$ ainsi

$$\begin{aligned}w'(x) &= 1 + \frac{2}{x^2}, \\ u'(x) &= w'(x)\exp(w(x)) = \frac{x^2+2}{x^2}u(x) \\ v'(x) &= 2x+2 = 2(x+1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ u'(x)v(x) &= \frac{x^2+2}{x^2}u(x) \times (x^2+2x) = \frac{(x^2+2)(x+2)}{x}u(x) \\ u(x)v'(x) &= 2(x+1)u(x) \\ u'(x)v(x) - u(x)v'(x) &= \left(\frac{(x^2+2)(x+2)}{x} - 2(x+1)\right)u(x) \\ &= \frac{(x^2+2)(x+2) - 2x^2 - 2x}{x}u(x) = \frac{x^3+4}{x}u(x)\end{aligned}$$

d'où

$$f'(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2(x+2)^2} e^{x-\frac{2}{x}} = \frac{x^3 + 4}{x^3(x+2)^2} e^{x-\frac{2}{x}} > 0 \text{ sur }]0, +\infty[$$

Conclusion : faire des petits calculs intermédiaires.

3.3 IAF

Exercice de khôlle 153

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$, étudier les variations de f' . En déduire que f est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Solution : La fonction f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, en écrivant que $f(x) = \frac{2+e^x-2}{2+e^x} = 1 - \frac{2}{2+e^x}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2e^x}{(2+e^x)^2} = 2e^x(2+e^x)^{-2}$$

On redérive (on peut !) pour avoir

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \left[e^x(2+e^x)^{-2} + (-2) \times e^x \times e^x \times (2+e^x)^{-3} \right] \\ &= 2 \times \left[\frac{e^x}{(2+e^x)^2} - \frac{2(e^x)^2}{(2+e^x)^3} \right] = \frac{2e^x}{(2+e^x)^2} \left(1 - \frac{2e^x}{2+e^x} \right) \\ &= \frac{2e^x(2-e^x)}{(2+e^x)^3} \end{aligned}$$

On en déduit les variations de f'

x	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
f''		$+$	$-$
f'		$\nearrow$	$\searrow$

Ainsi f' a un maximum en $x = \ln 2$ qui vaut $f'(\ln 2) = \frac{2 \times 2}{(2+2)^2} = \frac{1}{4}$, puisque, clairement $f'(x) \geq 0$, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f'(x) = |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Par l'IAF, f est bien $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Pour montrer que f est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne, on peut aussi écrire que (puisque de manière évidente $f'(x) > 0$)

$$\begin{aligned} |f'(x)| - \frac{1}{4} &= f'(x) - \frac{1}{4} = \frac{2e^x}{(2+e^x)^2} - \frac{1}{4} = \frac{8e^x - (2+e^x)^2}{4(2+e^x)^2} \\ &= -\frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{4(2+e^x)^2} = -\frac{(e^x - 2)^2}{4(2+e^x)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Exercice de khôlle 154

Soit f définie par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

- Déterminer le domaine de définition, noté D_f , de f puis étudier ses variations. Déterminer M majorant de f sur D_f .
- Soit h définie par $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, étudier les variations de h et donner un majorant de $|h(x)|$ sur $[e, +\infty[$.
- Justifier que f est lipschitzienne sur $[e, +\infty[$ en précisant un rapport de lipschitz (celui qui vous semble le meilleur).

Solution :

- On a $f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ est défini si $x > 0$. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

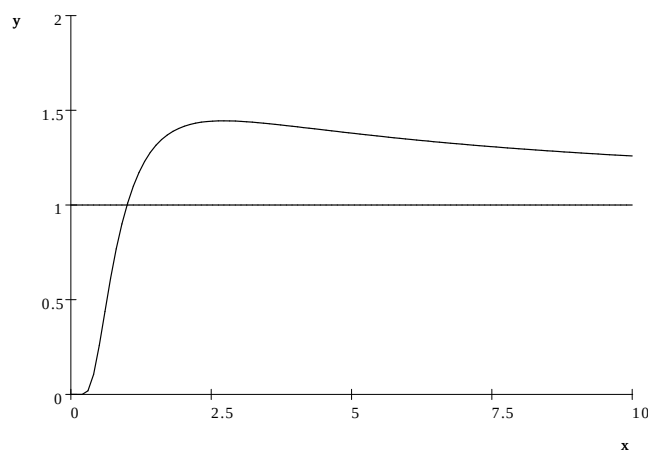
$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} f(x) \quad \text{du type} \quad (e^u)' = u' e^u$$

$$u = \frac{\ln x}{x} \quad u' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Ainsi $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ (signe simple car on connaît la courbe de $\ln$), d'où les variations

x	0	e	$+\infty$
f'		+	-
f		0 ↗ $f(e)$	↘ 1

Par les croissances comparées, $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1$ (continuité de $\exp$ en 0). Clairement $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (composition de limites). On en déduit le graphique suivant (repère non normé)



En particulier $M = \max_{]0, +\infty[} f = f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ majore f sur D_f .

- Avant tout h est bien définie car $f(x) \neq 0$ et $h(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = (1 - \ln x) x^{-2}$ qui est dérivable sur $[e, +\infty[$ avec

$$h'(x) = -\frac{1}{x} \times x^{-2} - 2(1 - \ln x) x^{-3} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

du signe de $2 \ln(x) - 3$. On a $2 \ln x - 3 = 0 \iff x = e^{\frac{3}{2}}$ d'où les variations (par les croissances comparées, $\frac{\ln x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$)

x	e	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
h'	-	-	
h	0 ↘ $h\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$	↗ 0	

En particulier si $x \geq e$, $|h(x)| \leq \left| h\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \right| = \left| \frac{1 - \frac{3}{2}}{e^3} \right| = \frac{1}{2e^3}$.

3. Conclusion, si $x \geq e$, on a

$$|f'(x)| = |h(x)| |f(x)| \leq \frac{1}{2e^3} \times e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2e^{3-\frac{1}{e}}}$$

Avec l'IAF, on en déduit que f est $k = \frac{1}{2e^{3-\frac{1}{e}}}$ lipschitzienne sur $[e, +\infty[$.

Remarque : Avec une calculatrice, on a donc $|f'(x)| \leq 0,03596 \dots$ alors que $\max_{[e, +\infty[} |f'(x)| = 0,03483 \dots$. Le rapport trouvé est donc très bon !

3.4 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice de khôlle 155

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0, 1]$. Montrer que si $x \in [0, 1]$, alors $f(x) \in [0, 1]$ (on dit que $[0, 1]$ est stable par f).
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Montrer que f est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$.
4. On définit une suite u par $u_0 \in [0, 1]$ et, pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.
 - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$.

Que peut-on en déduire pour u_n ? Comment obtenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?

Solution :

1. On a $f(x) = \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$. Puisque $x \mapsto 1 + e^x$ est croissante et positive (somme de fonctions croissantes), en composant par $u \mapsto \frac{1}{u}$ qui est décroissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ est décroissante et ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$. On peut aussi dire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$.

Ainsi par croissance $0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq f(0) = \frac{1}{2} \leq f(x) \leq f(1) = \frac{e}{e+1} \leq 1$ donc

$$x \in [0, 1] \implies f(x) \in [0, 1]$$

2. On pose $g(x) = f(x) - x$ qui est dérivable sur $[0, 1]$ avec $g'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} - 1 = \frac{e^x - (1 + e^x)^2}{(1 + e^x)^2} = -\frac{(e^x)^2 + e^x + 1}{(1 + e^x)^2}$.
Puisque $X^2 + X + 1$ n'a pas de racines réelles (car $\Delta = -3$ ou bien ses racines sont connues pour être j et j^2), on en déduit que $\forall X \in \mathbb{R}$, $X^2 + X + 1 > 0$ donc que $f'(x) < 0$. Ainsi f est continue, strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[g(1), g(0)] = \left[-\frac{1}{e+1}, \frac{1}{2}\right]$. Puisque $0 \in \left[-\frac{1}{e+1}, \frac{1}{2}\right]$, il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$ (donc $f(\alpha) = \alpha$).

3. Il suffit de prouver que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ si $x \in [0, 1]$ (d'après l'IAF). Or

$$|f'(x)| = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \text{ donc } \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \geq 0$$

$$\text{car } (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \text{ (développer et OB).}$$

Ainsi

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4} \text{ et } f \text{ est bien } \frac{1}{4}\text{-lipschitzienne sur } [0, 1]$$

Remarque : ① On peut aussi étudier les variations de f' (qui est dérivable) car $f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3} \leq 0$ sur

$[0, +\infty[$ (et ainsi $0 \leq f'(x) \leq f'(0) = \frac{1}{4}$).

② On peut remarquer que $0 \leq e^x \leq e$ sur $[0, 1]$ donc $0 \leq f'(x) \leq \frac{e}{4}$. On en déduit que f est $\frac{e}{4}$ lipschitzienne.

Cela suffit à montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (car $0 < \frac{e}{4} < 1$).

4.

(a) Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \ll u_n \text{ existe et } u_n \in [0, 1] \gg$. C'est vrai si $n = 0$, puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang n , alors $\frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$ est défini (car $e^{u_n} > 0$ donc $e^{u_n} + 1 \neq 0$). Puis on a montré que

$$x \in [0, 1] \implies f(x) \in [0, 1]$$

or $u_n \in [0, 1]$ (HR_n) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$. Ce qui termine la récurrence.

(b) On a $u_n \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$, puisque f est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$, on en déduit que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

Puis par récurrence que $\mathcal{P}(n) = \ll |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha| \gg$. C'est vrai si $n = 0$ car $\frac{1}{4^0} = 1$, puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha| = \frac{1}{4^{n+1}} |u_0 - \alpha|$.

Puisque $4^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que $\frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par l'encadrement

$$0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$$

que $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

Pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-3} près, on écrit que

$$0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} (|u_0| + |\alpha|) \underset{IT}{\leq} \frac{1}{4^n} \text{ si on prend } u_0 = 0 \text{ et sachant que } \alpha \in [0, 1]$$

Il suffit donc d'avoir $\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3}$. Mais

$$\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3} \iff 4^n \geq 10^3 \iff 2^{2n} \geq 10^3$$

Puisque $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$, $n = 6$ convient. Conclusion, on calcule u_5 en partant de u_0 pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Remarque : On obtient $u_5 = 0,6586279096 \dots$ alors que $\alpha = 0,6590460684 \dots$

Exercice de khôlle 156

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x(1-x)+1}{2}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (on calculera la valeur de α).
3. Montrer que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$.
4. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
5. A partir de quel rang est-on sûr que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} ? Quelle valeur approchée de $\sqrt{5}$ peut-on en déduire ?

Solution :

1. Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \langle u_n \text{ existe et } u_n \in [0, 1] \rangle$. C'est vrai si $n = 0$, puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang n alors $u_{n+1} = \frac{u_n(1-u_n)+1}{2}$ est défini. Puis (HR_n) $0 \leq u_n \leq 1$ d'où $0 \leq 1-u_n \leq 1$, par produit d'inégalités positives

$$0 \leq u_n(1-u_n) \leq 1 \text{ d'où } \frac{1}{2} \leq \frac{u_n(1-u_n)+1}{2} \leq 1$$

ce qui prouve que $u_{n+1} \in [0, 1]$.

2. On résout $f(x) = x$ qui équivaut à $x(1-x)+1-2x = 1-x^2-x = 0$, dont les solutions sont

$$-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < 0 \text{ et } 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$$

(on a bien $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{9}-1}{2} = 1$). Il y a donc une unique solution $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dans $[0, 1]$.

3. Puisque f est dérivable sur $[0, 1]$, d'après l'IAF, il suffit de montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. On a $f'(x) = \frac{1}{2} - x$ qui est une fonction affine décroissante donc

$$\forall x \in [0, 1], f'(1) = -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq f'(0) = \frac{1}{2}$$

d'où $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Par l'IAF, f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

Remarque : On peut aussi écrire que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{x(1-x)+1}{2} - \frac{y(1-y)+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (x - y - (x^2 - y^2)) \\ &= \frac{1}{2} (x - y) (1 - x - y) \end{aligned}$$

Donc

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2} |x + y - 1| |x - y|$$

Mais $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$ donc $0 \leq x + y \leq 2$, et ainsi $-1 \leq x + y - 1 \leq 1$. Bref $|x + y - 1| \leq 1$ ce qui prouve que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

(et c'est la définition de f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$!).

4. On sait que u_n et α sont dans $[0, 1]$ et que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$ ainsi (relire la définition d'une fonction lipschitzienne)

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

mais $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

Puis on montre par récurrence $\mathcal{P}(n) = \ll |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \gg$. C'est vrai si $n = 0$ car $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$ d'où ($\frac{1}{2} \geq 0$), $\frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$. Mais $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$, d'où par transitivité de l'ordre $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$. Ceci termine la récurrence.

Enfin $|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha \leq 1$ car $\alpha \in [0, 1]$ d'où $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} < .$

On en déduit que $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) puis que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

5. Il suffit d'avoir $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$ pour être sûr que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ (car dans ce cas $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$). Mais

$$2^9 = 512 \text{ et } 2^{10} = 1024$$

donc on est certain que u_{10} est une valeur approchée de α à 10^{-3} .

Enfin $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc $\sqrt{5} = 2\alpha + 1$, si on pose $v_n = 2u_n + 1$, on a

$$|v_n - \sqrt{5}| = |(2u_n + 1) - (2\alpha + 1)| = 2|u_n - \alpha|$$

d'où

$$|v_{10} - \sqrt{5}| \leq 2 \times 10^{-3}$$

On obtient donc une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 2×10^{-3} en calculant $2u_{10} + 1$.

Remarque : Si on tabule u_n sur une calculatrice (ou avec Python), on obtient

$$v_{10} = 2,2360679780 \dots \text{ et } \sqrt{5} = 2.2360679774 \dots$$

On constate que v_{10} est une bien meilleure valeur approchée de $\sqrt{5}$ que ce qui est prévu !

Exercice de khôlle 157

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{3}e^{-x}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.
- Montrer qu'il existe un unique $\alpha \geq 0$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et justifier que $\alpha \in [1, 2]$.
- Montrer que f est $\frac{1}{3}$ -lipschitzienne sur $[0 + \infty[$.
- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$. Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- A partir de quel rang est-on sûr que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} ?

Solution :

- Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \ll u_n \text{ existe et } u_n \in [0, 1] \gg$. C'est vrai si $n = 0$, puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang n alors $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}e^{-u_n}$ est défini et est positif (somme de nombres positifs), d'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2. On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $\forall x \geq 0, g'(x) = -\frac{1}{3}e^{-x} - 1 < 0$. Ainsi g est continue, strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\left] \lim_{+\infty} g, g(0) \right[= \left] -\infty, \frac{4}{3} \right[$. Puisque $0 \in \left] -\infty, \frac{4}{3} \right[$, il existe un unique $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ (donc $f(\alpha) = \alpha$). De plus $g(1) = e^{-1} > 0$ et $g(2) = e^{-2} - 1 < 0$ (car $e^u < 1$ si $u < 0$), d'où $\alpha \in [1, 2]$.
3. Puisque f est dérivable sur $[0, +\infty[$, d'après l'IAF, il suffit de montrer que $\forall x \in [0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$. On a $f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-x}$ d'où $\forall x \in [0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{3}e^{-x} \leq \frac{1}{3}$ car $e^{-x} \leq 1$ si $x \geq 0$. Par l'IAF, f est $\frac{1}{3}$ -lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
4. On sait que u_n et α sont dans $[0, +\infty[$ et que f est $\frac{1}{3}$ -lipschitzienne sur $[0, +\infty[$ ainsi (relire la définition d'une fonction lipschitzienne)

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$$

mais $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$.

Puis on montre par récurrence $\mathcal{P}(n) = \ll |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} |u_0 - \alpha| \gg$. C'est vrai si $n = 0$ car $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{3^0} |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} |u_0 - \alpha|$ d'où ($\frac{1}{2} \geq 0$), $\frac{1}{3} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} |u_0 - \alpha| = \frac{1}{3^{n+1}} |u_0 - \alpha|$. Mais $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$, d'où par transitivité de l'ordre $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3^{n+1}} |u_0 - \alpha|$. Ceci termine la récurrence.

Enfin $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1 \leq 1$ car $\alpha \in [1, 2]$ d'où $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} < .$

On en déduit que $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$ et $\frac{1}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) puis que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

5. Il suffit d'avoir $\frac{1}{3^n} \leq 10^{-2}$ pour être sûr que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$ (car dans ce cas $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} \leq 10^{-2}$). Mais

$$3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 \geq 100$$

donc on est certain que u_5 est une valeur approchée de α à 10^{-3} .

Exercice de khôlle 158

On souhaite donner un sens à l'égalité

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (le nombre d'or)}$$

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Sans les calculer, donner u_1, u_2, u_3 sous forme de racines imbriquées.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.
- Soit $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et justifier que $\alpha \in [1, 2]$.
- Montrer que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$. Ceci donne-t-il un sens à l'égalité annoncé en début du sujet ?

Solution :

1. On a $u_1 = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}$, $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$.
2. Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \langle u_n \text{ existe et } u_n \geq 0 \rangle$. C'est vrai si $n = 0$, puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang n alors $1 + u_n \geq 1$ donc $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ existe et est positif (comme toutes racines carrées), d'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. On a $1 + \alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} = \alpha^2$ donc $\sqrt{1 + \alpha} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \alpha$ car $\alpha \geq 0$ (attention $\sqrt{x^2} \neq x$ si $x < 0$). Puis

$$4 \leq 5 \leq 9 \xRightarrow{\sqrt{}} 2 \leq \sqrt{5} \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \frac{1+2}{2} \leq \alpha \leq \frac{1+3}{4} = 2$$

4. Puisque f est dérivable sur $[0, +\infty[$, d'après l'IAF, il suffit de montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Mais

$$x \geq 0 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+x} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f'(x) = |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

Par l'IAF, f est $\frac{1}{3}$ -lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

5. On sait que u_n et α sont dans $[0, +\infty[$ et que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[0, +\infty[$ ainsi (relire la définition d'une fonction lipschitzienne)

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

mais $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

Puis on montre par récurrence $\mathcal{P}(n) = \langle |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| \rangle$. C'est vrai si $n = 0$ car $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$ d'où ($\frac{1}{2} \geq 0$), $\frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$. Mais $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$, d'où par transitivité de l'ordre $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$. Ceci termine la récurrence.

On en déduit que $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$ et $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) puis que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α . Ceci permet d'écrire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots \sqrt{1}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ où il y a } n \text{ racines imbriquées}$$

CHAPITRE 4

FONCTIONS USUELLES

4.1 Inégalités et sommes (encore !)

Exercice de khôlle 159

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 8$, on a $n^{\sqrt{n+1}} \geq (n+1)^{\sqrt{n}}$.

Solution : En passant au $\ln$ (qui est croissant) cela revient à prouver que $\sqrt{n+1} \ln(n) \geq \sqrt{n} \ln(n+1)$ soit à

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

On pose alors $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ qui est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} < 0 \text{ si } x > e^2$$

Donc f est décroissante sur $[e^2, +\infty[$, ainsi pour $n \geq e^2$ on a $f(n) \leq f(n+1)$. Il se trouve que $e^2 = 7,38\dots$ donc pour $n \geq 8$, l'inégalité demandée est vérifiée.

Exercice de khôlle 160

Montrer que $\forall u \geq 0, \left(\frac{1+u}{2}\right)^{(1+u)} \leq u^u$.

Solution : Pour $u = 0$ c'est évident (cela s'écrit $\frac{1}{2} \leq 1$). Sinon, pour $u > 0$, en passant au $\ln$, cela revient à prouver que

$$\forall u > 0, (1+u) \ln\left(\frac{1+u}{2}\right) \leq u \ln(u)$$

On pose $f(u) = u \ln(u) - (1+u) \ln\left(\frac{1+u}{2}\right)$, qui est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

$$f'(u) = \ln(u) + 1 - \ln\left(\frac{1+u}{2}\right) - 1 = \ln(u) - \ln\left(\frac{1+u}{2}\right) = \ln\left(\frac{2u}{1+u}\right) = \ln\left(1 + \frac{u-1}{u+1}\right)$$

Par croissance du $\ln$, on a $f'(u) > 0 \iff \frac{u-1}{u+1} > 0 \iff u > 1$. Ainsi (faire un tableau) f admet un minimum en $x = 1$ qui vaut 0 ! Gagné !

Exercice de khôlle 161

Déterminer les réels $x \in]1, +\infty[$ pour lesquels

$$\ln(x+1) + \ln(x-1) < 2\ln(x) - 1$$

Solution : On y va simplement en posant $f(x) = 2\ln(x) - 1 - \ln(x+1) - \ln(x-1)$ qui est définie, dérivable sur $]1, +\infty[$ avec

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2-1)} - \frac{x(x-1)}{x(x^2-1)} - \frac{x(x+1)}{x(x^2-1)} = -\frac{2}{x(x^2-1)}$$

Sur $]1, +\infty[$ on a $x^2 > 1$ donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante. On a

$$2\ln(x) = \ln(x^2), \quad \ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(x^2-1) \quad \text{donc} \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) - 1$$

En particulier

$$f(x) = 0 \iff \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) = 1 \iff \frac{x^2}{x^2-1} = e \iff x^2 = e(x^2-1) \iff x^2 = \frac{e}{e-1}$$

puisque $x > 1$, on a $f(x) = 0 \iff x = \sqrt{\frac{e}{e-1}}$. Par stricte décroissance de f , on en déduit que

$$\ln(x+1) + \ln(x-1) < 2\ln(x) - 1 \iff x \in \left]1, \sqrt{\frac{e}{e-1}}\right[$$

Remarque : Autre méthode, par stricte croissance de la fonction $\exp$, on a, pour $x > 1$

$$\begin{aligned} \ln(x+1) + \ln(x-1) < 2\ln(x) - 1 &\iff \exp(\ln(x+1) + \ln(x-1)) < \exp(2\ln(x) - 1) \\ &\iff x^2 - 1 \leq \frac{x^2}{e} \iff x^2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Les racines de $\left(1 - \frac{1}{e}\right)X^2 - 1 = 0$ sont $\pm\sqrt{\frac{e}{e-1}}$, ainsi $x^2 \left(1 - \frac{1}{e}\right) - 1 \leq 0$ si et seulement si $x \in \left]-\sqrt{\frac{e}{e-1}}, \sqrt{\frac{e}{e-1}}\right[$.
Puisque l'on impose $x > 1$, les réels solutions sont bien ceux de $\left]1, \sqrt{\frac{e}{e-1}}\right[$.

Exercice de khôlle 162

Résoudre $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$.

Solution : Avant tout le terme $\ln|x+1| - \ln|2x+1|$ n'est défini que si $x \neq -1$ et $x \neq -\frac{1}{2}$ et, dans ce cas, vaut $\ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|$. Par stricte croissance de la fonction $\ln$, on a

$$\ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq \ln 2 \iff \left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq 2 \iff -2 \leq \frac{x+1}{2x+1} \leq 2$$

Puis

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2x+1} &\leq 2 \iff 0 \leq 2 - \frac{x+1}{2x+1} \iff 0 \leq \frac{3x+1}{2x+1} \\ -2 &\leq \frac{x+1}{2x+1} \iff 0 \leq \frac{x+1}{2x+1} + 2 \iff 0 \leq \frac{5x+3}{2x+1}\end{aligned}$$

donc

$$\ln \left| \frac{x+1}{2x+1} \right| \leq \ln 2 \iff \begin{cases} 0 \leq \frac{3x+1}{2x+1} \text{ et } 0 \leq \frac{5x+3}{2x+1} \\ \text{et } x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

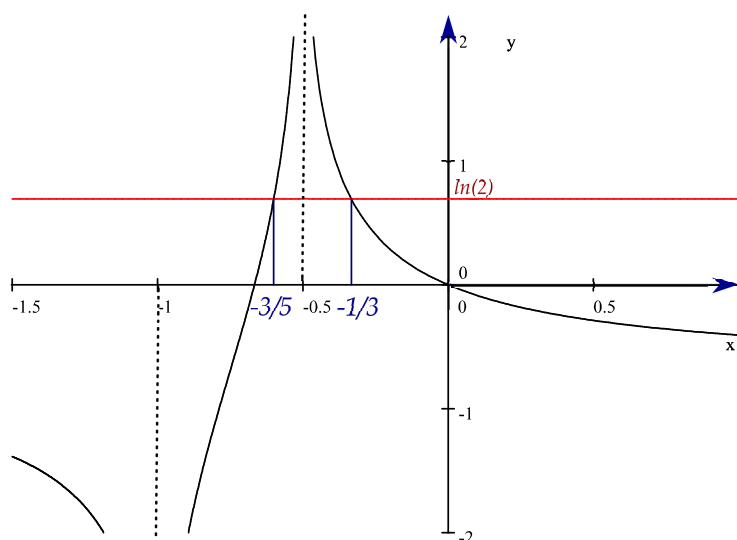
On fait un tableau de signe

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$2x+1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$3x+1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$\frac{3x+1}{2x+1}$	$+$	$ $	$+$	$ $	$-$	0	$+$
$5x+3$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$\frac{5x+3}{2x+1}$	$+$	0	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$

Conclusion

$$\ln \left| \frac{x+1}{2x+1} \right| \leq \ln 2 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]-1, -\frac{3}{5}[\cup]-\frac{1}{3}, +\infty[$$

On peut le visualiser en traçant le graphe de $f(x) = \ln|x+1| - \ln|2x+1|$.



Exercice de khôlle 163

(★) On veut montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 < x < y \text{ on a } \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} \leq \frac{x+y}{2}$$

1. Méthode 1 : En posant $x = e^a$ et $y = e^b$ (et en pensant angle moitié).
2. Méthode 2 : En posant $t = \frac{y}{x}$, montrer que cela revient à prouver que $2\frac{t-1}{t+1} \leq \ln(t)$ et établir cette dernière inégalité.
3. Méthode 3 : Pour $y > 0$, en étudiant, sur $]0, y]$ la fonction φ définie par $\varphi(x) = \ln(y) - \ln(x) + 2\frac{x-y}{x+y}$.
4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{k}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \leq \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$$

Solution :

1. On pose $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$ (et ainsi $x = e^a$, $y = e^b$), cela revient à montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}, a < b, \frac{e^b - e^a}{b - a} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$$

soit

$$e^b - e^a \leq \frac{b-a}{2} (e^b + e^a)$$

Mais $e^b - e^a = e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{b-a}{2}\right)$ et $e^b + e^a = e^{\frac{a+b}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{b-a}{2}\right)$ donc cela revient à montrer que

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{b-a}{2}\right)} \leq \frac{b-a}{2}$$

On pose $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ et on montre que pour $x \geq 0$ on a $\operatorname{th} x \leq x$.

Méthode ① : On pose $f(x) = x - \operatorname{th}(x)$ qui est dérivable de dérivée égale à

$$f'(x) = 1 - \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}^2(x) \geq 0$$

Ainsi f est croissante donc $\forall x \geq 0$ on a $f(x) \geq f(0) = 0$, ce qui prouve l'inégalité demandée.

Méthode ② : La fonction th est dérivable avec $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$ donc $\operatorname{th}'' = -\frac{2\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2}$ négative sur $[0, +\infty[$. Ainsi th est concave donc sous sa tangente en $x = 0$ qui est (miracle) la droite $y = x$.

2. L'inégalité demandée peut s'écrire

$$2(y-x) \leq (x+y)(\ln y - \ln x) \iff 2\left(\frac{y}{x} - 1\right) \leq \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

Si on pose $t = \frac{y}{x} > 1$ cela revient à montrer que

$$\forall t > 1, 2\frac{t-1}{t+1} \leq \ln(t)$$

Soit $f(t) = \ln(t) - 2\frac{t-1}{t+1}$, alors f est dérivable sur $[1, +\infty[$ avec $f'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$ donc $f(t) \geq f(1) = 0$.

3. Pour $y > 0$, on pose donc $\varphi(x) = \ln(y) - \ln(x) + 2\frac{x-y}{x+y}$. La fonction φ est définie et dérivable sur $]0, y]$ avec

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + 2\frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{2xy - (x+y)^2}{x(x+y)^2} = -\frac{x^2 + y^2}{x(x+y)^2} < 0 \text{ car } 0 < x < y$$

Ainsi φ est strictement décroissante sur $]0, y]$. Puisque $\varphi(y) = 0$ on en déduit que pour $x \in]0, y[$, on a $\varphi(x) > 0$. Mais pour $0 < x < y$

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} &\leq \frac{x+y}{2} && \begin{aligned} &\iff \ln y - \ln x > 0 \\ &\iff x+y > 0 \\ &\iff \end{aligned} && \begin{aligned} y-x &\leq \frac{x+y}{2} \times (\ln(y) - \ln(x)) \\ 2\frac{y-x}{x+y} &\leq \ln(y) - \ln(x) \\ 0 &\leq \varphi(y) \end{aligned} \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'inégalité demandée.

4. Avec $x = k$ et $y = k+1$ on obtient

$$\frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \leq k + \frac{1}{2}$$

puis en sommant les inégalités

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \leq \sum_{k=1}^n k \left(k + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$$

Exercice de khôlle 164

(★)

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^{\text{sh } x}$ puis

$$\forall x \in [0, 1[, 1+x \leq e^{\text{sh } x} \leq \frac{1}{1-x}$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right) + \text{sh}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \text{sh}\left(\frac{1}{kn}\right)$, déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. On pose $\varphi(x) = e^{\text{sh } x} - (1+x)$ qui est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \text{ch}(x) e^{\text{sh } x} - 1 \text{ et } \varphi''(x) = \text{sh}(x) e^{\text{sh}(x)} + \text{ch}^2(x) e^{\text{sh}(x)}$$

Puisque $\text{ch}^2(x) = 1 + \text{sh}^2(x)$, on a

$$\varphi''(x) = (\text{sh}^2(x) + \text{sh}(x) + 1) e^{\text{sh}(x)} > 0$$

car $e^{\text{sh } x} > 0$ et $X^2 + X + 1 > 0$ (ses racines sont j et j^2 et son coefficient dominant est positif). Ainsi φ' est strictement croissante, puisque $\varphi'(0) = 0$, on en déduit les variations suivantes pour φ (car $\varphi(0) = 0$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''		+	
φ'	-	0	+
φ		$\searrow$ 0 $\nearrow$	

Conclusion $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0$ qed.

Remarque : En fait l'inégalité de gauche est une inégalité de convexité (car $x \mapsto e^{\text{sh } x}$ a pour dérivée seconde

$\varphi''(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$), «la courbe est alors au dessus de sa tangente à l'origine».

L'inégalité de gauche est vérifiée. Puis en remplaçant x par $-x$, on obtient

$$1 - x \leq e^{\operatorname{sh}(-x)} = \frac{1}{e^{\operatorname{sh}(x)}}$$

Si x est dans $[0, 1[$, on a $0 < 1 - x$ et par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\frac{1}{1 - x} \geq e^{\operatorname{sh} x}$$

ce qui est l'autre moitié de l'inégalité demandée.

2. Puis comme tout est strictement positif, pas croissance de $\ln$, on en déduit

$$\forall x \in [0, 1[, \ln(1 + x) \leq \operatorname{sh}(x) \leq \ln\left(\frac{1}{1 - x}\right) = -\ln(1 - x)$$

Puis $u_n = \sum_{j=0}^{(k-1)n} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n+j}\right)$, avec $j \in \llbracket 0; (k-1)n \rrbracket$, on a $x = \frac{1}{n+j} \in [0, 1[$ donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+j}\right) \leq \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n+j}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n+j}\right)$$

On somme ces inégalités pour avoir

$$\sum_{j=0}^{(k-1)n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+j}\right) \leq u_n \leq -\sum_{j=0}^{(k-1)n} \ln\left(1 - \frac{1}{n+j}\right)$$

Puis un soupçon de piraterie donne

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{(k-1)n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+j}\right) &= \sum_{j=0}^{(k-1)n} \ln(n+j+1) - \ln(n+j) = \ln(kn+1) - \ln(n) \\ -\sum_{j=0}^{(k-1)n} \ln\left(1 - \frac{1}{n+j}\right) &= \sum_{j=0}^{(k-1)n} \ln(n+j) - \ln(n+j-1) = \ln(kn) - \ln(n-1) \quad (\text{ah ah donc on prend } n \geq 2) \end{aligned}$$

Pour finir

$$\ln\left(\frac{kn+1}{n}\right) \leq \ln(kn+1) - \ln(n) \leq u_n \leq \ln(kn) - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{kn}{n-1}\right)$$

puisque $\frac{kn+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k$ et $\frac{kn}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k$, par continuité du $\ln$ en k , on a

$$\ln\left(\frac{kn+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln k \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{kn}{n-1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln k$$

d'où par encadrement $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(k)$ (ouf!).

Exercice de khôlle 165

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que $\forall x \geq 0$ on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.
2. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Quelle est la limite de $\frac{n!}{n^n}$?

Solution :

1. On pose $\varphi(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ qui est définie, dérivable sur $[0, +\infty[$ avec, pour $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$$

Ainsi φ est croissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $\varphi(0) = 0$, on en déduit que $\forall x \geq 0, \varphi(x) \geq 0$.

2. Pour $n \geq 1$, u_n est un produit de nombres positifs et non nuls, ainsi

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

(Rappel $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ n'est pas vrai si a et b sont négatifs!). Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\frac{k}{n^2} \geq 0$ d'où

$\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \geq \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2$. On somme les inégalités pour avoir

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \geq \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^n k^2$$

: $\frac{1}{12}(2n+1)(n+1)n^{-1}$ ce qui donne

$$\ln(u_n) \geq \frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n} = \frac{(n+1)}{2} \times \left(1 - \frac{2n+1}{6n}\right)$$

Puisque $1 - \frac{2n+1}{6n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$, on en déduit que $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ puis avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on obtient

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

3. En réalité, on a $u_n = \prod_{k=0}^n \left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n^{n+1}} \prod_{k=0}^n (k+1) = \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ d'où $u_n = \frac{n!}{n^n} \times \frac{n+1}{n}$

$$\text{ainsi } \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n+1} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

4.2 Manipulations (avec des sommes et des produits)

Exercice de khôlle 166

Calculer

$$\textcircled{1} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) \quad \textcircled{2} \quad \tan\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

Solution : Rappel : $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ et $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, ainsi

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

Avec $\cos(\arcsin(\frac{3}{5})) = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, $\sin(\arcsin(\frac{3}{5})) = \frac{3}{5}$, on obtient

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$$

Puis $\tan(\arcsin(\frac{4}{5})) = \frac{4}{3}$ et $\tan(\arcsin(\frac{3}{5})) = \frac{3}{4}$ donne

$$\tan\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + 1} = \frac{7}{24}$$

Remarque : Il faudrait commencer par justifier que $\arcsin(\frac{4}{5}) - \arcsin(\frac{3}{5}) \neq \pm\frac{\pi}{2}$, mais c'est bien le cas car $\arcsin(\frac{4}{5})$ et $\arcsin(\frac{3}{5})$ sont dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, la différence est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$!

Exercice de khôlle 167

Soient ABC un triangle rectangle en C dont aucun des côtés n'est de longueur nulle.

1. Calculer

$$\tan\left(\arcsin\left(\frac{AC}{AB}\right) - \arcsin\left(\frac{BC}{AB}\right)\right)$$

On posera, selon l'usage, $c = AB$, $a = BC$ et $b = AC$.

2. Que dire de $\tan\left(\arcsin\left(\frac{AC}{AB}\right) + \arcsin\left(\frac{BC}{AB}\right)\right)$?

Solution : On sait que $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (si $x \neq 1$) et que $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ lorsque tous les termes sont définis.

1. Le triangle étant rectangle en C , on a $c^2 = a^2 + b^2$ donc $c > a$ et $c > b$ car $a > 0$ et $b > 0$. Ainsi $\frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \in]0, 1[$ et de même $\frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \in]0, 1[$. On sait alors que $\arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$ sont dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, leur différence est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Cela permet d'écrire que

$$\tan\left(\arcsin\left(\frac{b}{c}\right) - \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right) = \frac{\tan\left(\arcsin\left(\frac{b}{c}\right)\right) - \tan\left(\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right)}{1 + \tan\left(\arcsin\left(\frac{b}{c}\right)\right) \times \tan\left(\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right)}$$

Mais $\tan \arcsin\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c\sqrt{1-\frac{b^2}{c^2}}} = \frac{b}{c\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2}}} = \frac{b}{c\sqrt{\frac{a^2}{c^2}}} = \frac{b}{a}$ car a et c sont positifs. De même $\tan\left(\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right) = \frac{a}{b}$ d'où

$$\tan\left(\arcsin\left(\frac{b}{c}\right) - \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right) = \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{1 + \frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} = \frac{\frac{b^2 - a^2}{ab}}{\frac{2ab}{ab}} = \frac{b^2 - a^2}{2ab}$$

2. Si on fait, sans se poser de questions, le calcul de $\tan\left(\arcsin\left(\frac{b}{c}\right) + \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\right)$, on obtient un dénominateur nul ! C'est normal car si on note $\hat{A}$ et $\hat{B}$ les angles aux sommets A et B respectivement, alors $\sin(\hat{A}) = \frac{a}{c}$ et $\sin(\hat{B}) = \frac{b}{c}$. Mais $(\hat{A}, \hat{B}) \in]0, \frac{\pi}{2}]^2$ (car ils sont positifs et $\hat{A} + \hat{B} + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc $\hat{A} + \hat{B} = \frac{\pi}{2}$). On a donc

$$\arcsin\left(\frac{b}{c}\right) = \hat{B} \text{ et } \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \hat{A}$$

d'où $\arcsin\left(\frac{b}{c}\right) + \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \hat{A} + \hat{B} = \frac{\pi}{2}$!

Remarque : On retrouve le résultat en remarquant que pour $x \geq 0$

$$\arcsin \sqrt{1-x^2} = \arcsin(\sin(\arccos(x)))$$

Mais puisque $x \geq 0$, on a $\arccos(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\arcsin(\sin(\arccos(x))) = \arccos(x)$. On en déduit que

$$\arcsin \sqrt{1-x^2} + \arcsin x = \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

Ici, puisque a, b, c sont positifs et $c^2 = a^2 + b^2$, on a $\sqrt{1 - \frac{a}{c}} = \frac{b}{c} \dots$

Exercice de khôlle 168

Soient $(x, y) \in [-1, 1]^2$ et $\alpha = \arccos x + \arccos y$. Montrer que

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

Solution : On sait que si $u \in [-1, 1]$ alors $\sin(\arcsin u) = \cos(\arccos u) = u$ et $\sin(\arccos u) = \cos(\arcsin u) = \sqrt{1-u^2}$. Avec les formules d'addition, on a

$$\cos(\alpha) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \text{ et } \sin \alpha = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)^2 = x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ &= x^2 + y^2 - 2xy(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 169

- Résoudre $5 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{sh} x = 3$.
- Etudier rapidement la fonction f définie par $f(x) = 5 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{sh} x$ et en déduire, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solution de l'équation $(E_m) : 5 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{sh} x = m$.
- Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \ln 3)$ à l'aide de $\operatorname{ch} x$. Qu'en déduisez vous ?

Solution :

- On remplace $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ par leur définition, cela revient à résoudre

$$5 \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 4 \frac{e^x - e^{-x}}{2} - 3 = 0 \quad (E)$$

On pose $X = e^x$, ainsi $\frac{1}{X} = e^{-x}$ et (E) s'écrit $\frac{5}{2} \left(X + \frac{1}{X} \right) - 2 \left(X - \frac{1}{X} \right) - 3 = 0$, en multipliant par $2X$, on obtient

$$X^2 - 6X - 9 = (X - 3)^2 = 0$$

qui a une seule solution $X = 3$ qui est bien positive et donne $x = \ln(3)$.

- La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 5 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x = 5 \frac{e^x - e^{-x}}{2} - 4 \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - 9e^{-x}}{2} = e^{-x} \frac{e^{2x} - 9}{2}$ est du signe de $e^{2x} - 9$. On en déduit les variations de f

x	$-\infty$	$\ln(3)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\ln(3)) = 3$	$+\infty$

Pour les limites, sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Puis $f(x) = \operatorname{ch} x + 4 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x + 4e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit que pour $m = 3$, (E_3) a une unique solution (ouf). Pour $m > 3$, (E_m) a deux solutions et pour $m < 3$ aucune.

$$3. \text{ On a } f(x) = 5 \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 4 \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{9}{2}e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f(x + \ln 3) &= \frac{1}{2}e^{x+\ln 3} + \frac{9}{2}e^{-x-\ln 3} = \frac{1}{2}e^x \times e^{\ln 3} + \frac{9}{2}e^{-x} \times e^{-\ln 3} \\ &= \frac{1}{2}e^x \times 3 + \frac{9}{2}e^{-x} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}(e^x + e^{-x}) = 3 \operatorname{ch}(x) \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) \geq 3$ (on retrouve que (E_m) n'a pas de solution si $m < 3$) puis que $f(x + \ln 3) = f(-x + \ln 3)$. Ainsi pour $m > 3$, les solutions de (E_m) sont de la forme $a + \ln 3$ et $-a + \ln 3$. La somme des deux solutions vaut $2 \ln 3$, si x est une solution, la seconde est $2 \ln 3 - x$.

Remarque : En fait, le graphe de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \ln 3$.

Exercice de khôlle 170

Résoudre l'équation $(E) \quad 2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$.

Solution : Ceux qui se ressemblent ensemble ! Cette équation équivaut à $2^{x+4} - 2^{x+2} = 3^{x+2} - 3^x$ donc

$$(E) \iff 2^{x+2}(2^2 - 1) = 3^x(3^2 - 1) \iff 3 \times 2^{x+2} = 8 \times 3^x \iff \frac{2^{x+2}}{2^3} = \frac{3^x}{3} \iff 2^{x-1} = 3^{x-1} \iff \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = 1$$

En passant au $\ln$, on obtient $(x-1) \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ soit $x = 1$ car $\ln\left(\frac{3}{2}\right) \neq 0$. Décevant ...

Exercice de khôlle 171

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $e^{2i \arctan x} = \frac{i-x}{i+x}$.

Solution : Simple calcul car

$$e^{2i \arctan x} = \cos(2 \arctan x) + i \sin(2 \arctan x)$$

Mais

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos(2 \arctan x) &= \cos^2(\arctan x) - \sin^2(\arctan x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \sin(2 \arctan x) &= 2 \sin(\arctan x) \cos(\arctan x) = \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

d'où

$$e^{2i \arctan x} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i \times \frac{2x}{1+x^2}$$

et

$$\frac{i-x}{i+x} = \frac{(i-x)\overline{(i+x)}}{1+x^2} = \frac{(i-x)(-i+x)}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i \times \frac{2x}{1+x^2}$$

Exercice de khôlle 172

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Montrer que pour tout réel x et tout entier n , $\left(\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}\right)^n = \frac{1 + \operatorname{th} nx}{1 - \operatorname{th} nx}$.

Solution : Immédiat car

$$\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x} = \frac{1 + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}{1 - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}} = \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$$

donc avec nx à la place de x (petite case)

$$\frac{1 + \operatorname{th} nx}{1 - \operatorname{th} nx} = e^{2nx} = (e^{2x})^n = \left(\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}\right)^n$$

Exercice de khôlle 173

(★)

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2(x) - 1$ puis exprimer $4 \operatorname{ch}^2(x) - 1$ à l'aide de $\operatorname{ch}(2x)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^n (2 \operatorname{ch}(2^k a) - 1)$.

(a) Simplifier $(2 \operatorname{ch}(a) + 1) \times P_n$.

(b) En déduire une forme close (i.e. sans symbole $\prod$) de P_n .

Solution :

1. On a $2 \operatorname{ch}^2(x) - 1 = 2 \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + 1 = \operatorname{ch}(2x)$ (OB : $(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2 + e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2 \dots$).

Puis $4 \operatorname{ch}^2(x) - 1 = 2(2 \operatorname{ch}^2(x) - 1) + 1 = 2 \operatorname{ch}(2x) + 1$.

2.

(a) On a

$$P_n = (2 \operatorname{ch} a - 1) \times \prod_{k=1}^n (2 \operatorname{ch}(2^k a) - 1)$$

d'où

$$\begin{aligned} (2 \operatorname{ch}(a) + 1) \times P_n &= (2 \operatorname{ch}(a) + 1) \times (2 \operatorname{ch} a - 1) \times \prod_{k=1}^n (2 \operatorname{ch}(2^k a) - 1) \\ &= (4 \operatorname{ch}^2 a - 1) \prod_{k=1}^n (2 \operatorname{ch}(2^k a) - 1) \\ &= (2 \operatorname{ch}(2a) + 1) \prod_{k=1}^n (2 \operatorname{ch}(2^k a) - 1) \\ &= (2 \operatorname{ch}(2a) + 1) (2 \operatorname{ch}(2a) - 1) \prod_{k=2}^n (2 \operatorname{ch}(2^k a) - 1) \\ &= (2 \operatorname{ch}(4a) + 1) \prod_{k=2}^n (2 \operatorname{ch}(2^k a) - 1) = \dots = 2 \operatorname{ch}(2^{n+1} a) + 1 \end{aligned}$$

Si on veut le prouver proprement, on montre par récurrence $\mathcal{P}(n) = \ll (2 \operatorname{ch}(a) + 1) \times P_n = 2 \operatorname{ch}(2^{n+1}a) + 1 \gg$. C'est vrai si $n = 0$ car $P_0 = 2 \operatorname{ch} a - 1$ et $(2 \operatorname{ch}(a) + 1) \times (2 \operatorname{ch} a - 1) = 4 \operatorname{ch}^2 a - 1 = 2 \operatorname{ch}(2^{0+1}a) + 1$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 0$ fixé alors

$$\begin{aligned} (2 \operatorname{ch}(a) + 1) \times P_{n+1} &= (2 \operatorname{ch}(a) + 1) \times P_n \times (2 \operatorname{ch}(2^{n+1}a) - 1) \\ \text{or } (2 \operatorname{ch}(2^{n+1}a) + 1) \times (2 \operatorname{ch}(2^{n+1}a) - 1) &= 2 \operatorname{ch}(2^{n+2}a) + 1 \text{ d'où } \mathcal{P}(n+1) \end{aligned}$$

Conclusion

$$P_n = \frac{2 \operatorname{ch}(2^{n+1}a) + 1}{2 \operatorname{ch}(a) + 1}$$

Exercice de khôlle 174

Soit f définie par $f(x) = \arctan(2x - 1)$.

- Déterminer son domaine de définition, de dérivabilité et sa dérivée. Quelle est la monotonie de f ?
- Avec l'IAF, montrer que pour $x \geq 1$, on a

$$0 \leq f(x+1) - f(x) \leq 1$$

- Simplifier, pour $x \geq 1$, $\tan(f(x+1) - f(x))$ et en déduire que pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\arctan(2k+1) - \arctan(2k-1) = \arctan \frac{1}{2k^2}$$

- En déduire la valeur de

$$S_n = \sum_{k=0}^n \arctan(2k^2)$$

Solution : On sait que $\arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Puisque $x \mapsto 2x - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition f l'est aussi et pour $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2}{1 + (2x - 1)^2}$$

En particulier $f' > 0$ donc f est strictement croissante.

- On encadre f' sur $[1, +\infty[$. Soit $p : x \mapsto 1 + (2x - 1)^2$ (qui est dérivable) alors $p'(x) = 4(2x - 1)$ donc p est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, ainsi

$$\forall x \in [1, +\infty[, 1 + (2 - 1)^2 = 2 < p(x)$$

d'où

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{2} = 1$$

Avec l'IAF, on en déduit que $0 \leq f(x+1) - f(x) \leq 1$ (car $x+1 - x = 1$).

- Si $x \geq 1$, on a $0 \leq f(x+1) - f(x) \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, on peut en prendre la tangente pour avoir

$$\begin{aligned} \tan(f(x+1) - f(x)) &= \frac{\tan(f(x+1)) - \tan(f(x))}{1 + \tan(f(x+1)) \tan(f(x))} = \frac{(2(x+1) - 1) - (2x - 1)}{1 + (2(x+1) - 1) \times (2x - 1)} \\ &= \frac{(2x + 1) - (2x - 1)}{1 + (2x + 1) \times (2x - 1)} = \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

Pour $k \geq 1$, soit $a_k = f(k+1) - f(k) = \arctan(2k+1) - \arctan(2k-1)$ alors

$$a_k \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ d'où } \arctan(\tan(a_k)) = a_k$$

Ainsi

$$\arctan(2k+1) - \arctan(2k-1) = \arctan \frac{1}{2k^2}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^n \arctan(2k^2) = \sum_{k=1}^n \arctan(2k^2) \text{ car } \arctan 0 = 0 \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \right) \text{ car } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \text{ et } 2k^2 > 0 \\
 &= \frac{n\pi}{2} - \sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) = \frac{n\pi}{2} - (f(n+1) - f(1)) \text{ (Pirate)} \\
 &= \frac{n\pi}{2} - \arctan(2n+1) + \arctan(1) = \frac{(2n+1)\pi}{4} - \arctan(2n+1)
 \end{aligned}$$

4.3 Encore l'IAF mais avec de nouvelles fonctions

Exercice de khôlle 175

Soit $f : x \mapsto f(x) = 1 + \frac{1}{2} \arctan(x)$.

1. Montrer que f possède un unique point fixe α . Vérifier que $\alpha \in [1, 2]$.
2. Montrer qu'il existe $C \in]0, 1[$ telle que $|f'| \leq C$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq C^n$.
4. Montrer que (u_n) converge. Pour quel terme de la suite est-on sûr d'avoir une valeur approchée de α à 10^{-2} ?

Solution :

1. On pose $g(x) = f(x) - x$ qui est définie, continue, dérivable sur $[1, 2]$ avec $g'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} - 1 = -\frac{2x^2+1}{x^2+1} < 0$ sur $[1, 2]$. Ainsi g est continue, strictement décroissante sur $[1, 2]$ donc réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $[g(2), g(1)] = \left[\frac{\arctan(2)}{2} - 1, \frac{\pi}{8} \right]$. Puisque $2 \leq \sqrt{3}$ on a $\arctan(2) \leq \frac{\pi}{3}$ et ainsi

$$\frac{\arctan(2)}{2} - 1 \leq \frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\pi - 6}{6} < 0$$

On en déduit que $0 \in [g(2), g(1)]$, donc admet un unique antécédent α qui vérifie bien $f(\alpha) = \alpha$.

2. Sur $\mathbb{R}$ on a f dérivable avec

$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \text{ (car } 1+x^2 \geq 1)$$

Ainsi $C = \frac{1}{2}$ convient.

3. Par récurrence immédiate, u_n existe. Puisque f est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Puis on montre par récurrence $\mathcal{P}(n) \equiv |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$. C'est vrai si $n = 0$ car $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha|$ d'où $(\frac{1}{2} \geq 0)$, $\frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$. Mais $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$, d'où par transitivité de l'ordre $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_0 - \alpha|$.

4. On a $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$. Ensuite on a

$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1 \text{ car } 1 \leq \alpha \leq 2$$

d'où

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$$

Pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-2} près, il suffit d'avoir $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-2}$ soit $2^n \geq 100$. Or $2^7 = 128$ donc u_7 est une valeur approchée de α à 10^{-2} .

Exercice de khôlle 176

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{5} \operatorname{ch}(x)$. On utilisera, si nécessaire $\operatorname{sh}(1) \leq \frac{4}{3}$ et $\operatorname{ch}(1) \leq 2$.

- Montrer que f possède, sur $[0, 1]$, un point fixe et un seul noté α . (un point fixe est une solution de $f(x) = x$).
- Montrer, pour tout $a, b \in [0, 1]$: $|f(b) - f(a)| \leq \frac{8}{15} |b - a|$.
- On définit la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite. On admet que $\operatorname{ch}(1) \leq 2$.

Solution :

- On pose $g(x) = f(x) - x$ qui est définie, continue, dérivable sur $[0, 1]$ avec $g'(x) = \frac{2}{5} \operatorname{sh}(x) - 1$. Par croissance du sh , on a $0 \leq x \leq 1 \implies -1 = g'(0) \leq g'(x) \leq g'(1)$. Mais

$$g'(1) = \frac{2}{5} \operatorname{sh}(1) - 1 \leq \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{15}$$

Ainsi g est continue, strictement décroissante donc réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[g(1), g(0)]$. On a $g(0) = \frac{2}{5} > 0$ et

$$g(1) = \frac{2}{5} \operatorname{ch}(1) - 1 < \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} \leq 0$$

On a donc $0 \in [g(1), g(0)]$ donc admet un unique antécédent α qui vérifie donc $f(\alpha) = \alpha$.

- Puisque f est dérivable sur $[0, 1]$, il suffit, d'après l'IAF de prouver que sur $[0, 1]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{2}{5}$. Mais

$$\forall x \in [0, 1], |f'(x)| = \frac{2}{5} \operatorname{sh}(x) \leq \frac{2}{5} \operatorname{sh}(1) \leq \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \text{ par croissance du } \operatorname{sh}$$

Ainsi f est $\frac{8}{15}$ lipschitzienne sur $[0, 1]$ d'où le résultat.

- On suit la méthode. On montre par récurrence $\mathcal{P}(n) = \ll u_n \text{ existe et } u_n \in [0, 1] \gg$. C'est vrai si $n = 0$, puis u_n existe alors u_{n+1} aussi. Puis $0 \leq u_n \leq 1 \xrightarrow{\text{ch croissant}} \frac{2}{5} \operatorname{ch}(0) = \frac{2}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{5} \operatorname{ch}(1) \leq \frac{4}{5} \leq 1$. Ceci termine la récurrence.

Puis $(u_n, \alpha) \in [0, 1]$ et f est $\frac{8}{15}$ lipschitzienne sur $[0, 1]$ d'où

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{8}{15} |u_n - \alpha|$$

Puis on montre par récurrence $\mathcal{P}(n) = \ll |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{8}{15}\right)^n |u_0 - \alpha| \gg$. C'est vrai si $n = 0$ car $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{8}{15}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{8}{15}\right)^n |u_0 - \alpha|$ d'où ($\frac{1}{2} \geq 0$), $\frac{8}{15} |u_n - \alpha| \leq \frac{8}{15} \times \left(\frac{8}{15}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{8}{15}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$. Mais $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{8}{15} |u_n - \alpha|$, d'où par transitivité de l'ordre $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{8}{15}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$. Ceci termine la récurrence. Enfin

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{8}{15}\right)^n |u_0 - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } 0 \leq \frac{8}{15} < 1$$

d'où l'on déduit que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

4.4 Hyperbolique

Exercice de khôlle 177

(★) Montrer que les courbes représentatives des fonctions exp et ch ont une tangente commune.

Solution : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, la tangente à exp en $x = a$ a pour équation

$$y = e^a (x - a) + e^a$$

La tangente à ch en $x = b$ a pour équation

$$y = \text{sh}(b)(x - b) + \text{ch}(b)$$

ces deux droites sont confondues si et seulement si

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} e^a = \text{sh}(b) & \text{même pente} \\ -ae^a + e^a = -b \text{sh}(b) + \text{ch}(b) & \text{même ordonnée à l'origine} \end{cases}$$

Il s'agit donc de prouver que ce système admet une unique solution.

Mais

$$\begin{cases} e^a = \text{sh}(b) \\ -ae^a + e^a = -b \text{sh}(b) + \text{ch}(b) \end{cases} \iff \begin{cases} e^a = \text{sh}(b) \\ (1 - a) \text{sh}(b) = -b \text{sh}(b) + \text{ch}(b) \end{cases}$$

$b = 0$ n'est pas solution (en fait $e^a = \text{sh}(b)$ implique que $\text{sh } b > 0$ donc $b > 0$) ainsi

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} a = \ln(\text{sh}(b)) \\ (1 - \ln(\text{sh}(b))) \text{sh}(b) + b \text{sh}(b) - \text{ch}(b) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \ln(\text{sh}(b)) \\ b + 1 - \ln(\text{sh}(b)) - \frac{\text{ch}(b)}{\text{sh}(b)} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

on définit alors $f(x) = x + 1 - \ln(\text{sh}(x)) - \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)}$ qui est définie sur $]0, +\infty[$, dérivable de dérivée égale à

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} - \frac{\text{sh}^2(x) - \text{ch}^2(x)}{\text{sh}^2(x)} = 1 - \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} - 1 + \frac{\text{ch}^2(x)}{\text{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} \left(\frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} - 1 \right) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}^2(x)} (\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) = \frac{e^x \text{ch}(x)}{\text{sh}^2(x)} > 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc continue, strictement croissante donc réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left] \lim_{0^+} f, \lim_{+\infty} f \right[$.

Puisque $\operatorname{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$, on a

$$\begin{aligned} \ln(\operatorname{sh}(x)) &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \text{ et } \ln(\operatorname{sh}(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \\ \text{donc } f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \end{aligned}$$

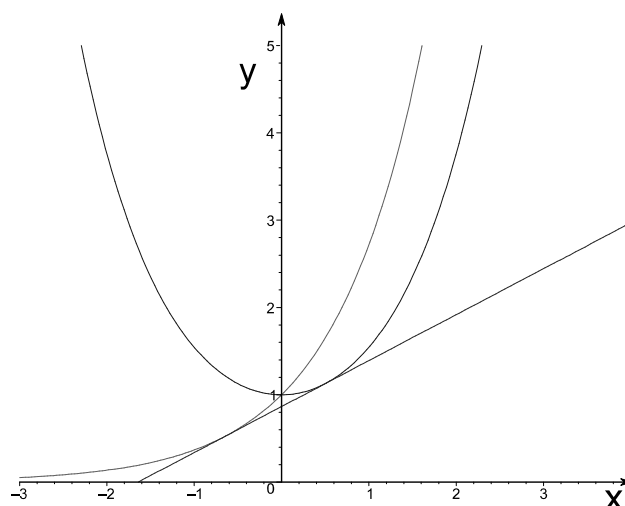
En $+\infty$, c'est plus compliqué. Mais on peut juste calculer $f(\ln 2)$ qui vaut

$$f(\ln(2)) = 3 \ln(2) - \frac{2}{3} - \ln(3) = 0,31416 \dots > 0$$

(Tiens c'est amusant cela, $\ln\left(\frac{8}{3}\right) \simeq \frac{2}{3} + \frac{\pi}{10}$!). Ce qui prouve que f s'annule une unique fois.

Conclusion, il existe un unique $b > 0$ tel que $f(b) = 0$ et avec $a = \ln(\operatorname{sh}(b))$, on a une unique solution à (S) . Il existe une unique tangente commune à $\exp$ et à ch .

Un calcul approché donne $b = 0,5048 \dots$ et $a = 1,6567 \dots$. Pour finir un petit dessin !



Exercice de khôlle 178

Résoudre $(1 + b^2) \operatorname{ch} x + (1 - b^2) \operatorname{sh} x = 2b$ d'inconnue x et de paramètre b .

Solution : Tout simplement si on pose $X = e^x$, on a $\operatorname{ch}(x) = \frac{X + \frac{1}{X}}{2} = \frac{X^2 + 1}{2X}$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{X^2 - 1}{2X}$. On résout donc

$$(1 + b^2) \frac{X^2 + 1}{2X} + (1 - b^2) \frac{X^2 - 1}{2X} - 2b = 0$$

qui équivaut à $(1 + b^2)(X^2 + 1) + (1 - b^2)(X^2 - 1) - 4bX = 0$ ou encore à

$$2X^2 - 4Xb + 2b^2 = 2(X - b)^2 = 0$$

Premier cas : $b \leq 0$, $X = e^x = b$ n'a pas de solution.

Secons cas : $b > 0$ alors $e^x = b$ d'où $x = \ln(b)$ est l'unique solution.

Exercice de khôlle 179

Résoudre le système (S)
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{25}{12} \end{cases} \quad \text{où } x \leq y.$$

Solution : Par analyse-synthèse. Si (x, y) est une solution, en sommant les deux lignes on a (car $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$)

$$e^x + e^y = \frac{60}{12} = 5$$

Et avec la différence (car $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$)

$$e^{-x} + e^{-y} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Mais alors, $e^{-x} + e^{-y} = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^y} = \frac{e^y + e^x}{e^x \times e^y} = \frac{5}{e^x \times e^y} = \frac{5}{6}$ d'où $e^x \times e^y = 6$. Super, on la somme et le produit de e^x et e^y donc e^x et e^y sont solutions de $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3) = 0$. Puisque $x \leq y$, on a $e^x = 2$ et $e^y = 3$ donc

$$x = \ln 2 \text{ et } y = \ln 3$$

Synthèse : Si $x = \ln(2)$ et $y = \ln(3)$ alors

$$\operatorname{ch} x = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}, \quad \operatorname{ch} y = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3} \text{ et } \frac{5}{4} + \frac{5}{3} = \frac{35}{12}$$

Puis

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = e^x + e^y - (\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y) = 2 + 3 - \frac{35}{12} = \frac{25}{12}$$

Conclusion $x = \ln 2$ et $y = \ln 3$ est la seule solution.

Exercice de khôlle 180

Résoudre (E)
$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Solution : On sait que $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, ainsi

$$(E) \iff e^x = \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} \iff \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = e^{-2x}$$

Mais $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$ (OB) donc

$$(E) \iff e^{2x} - e^{-2x} = 4e^{-2x}$$

On pose $X = e^{2x}$ ainsi $(E) \iff X = \frac{5}{X}$ soit $X^2 = 5$, puisque $X > 0$ (c'est une exponentielle) on a $X = \sqrt{5}$.

Conclusion $x = \frac{1}{2} \ln(X) = \frac{1}{4} \ln(5)$ est l'unique solution.

Exercice de khôlle 181

Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Justifier que l'on peut poser $x = \operatorname{ch}^2(t)$ et simplifier alors $f(x)$.

Solution :

1. $\sqrt{x-1}$ est défini si $x \geq 1$ et dans ce cas $x + 2\sqrt{x-1} \geq x \geq 1$ donc $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ l'est également. Puis, pour $x \geq 1$ (donc positif)

$$x \geq 2\sqrt{x-1} \iff x^2 \geq 4(x-1) \iff x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$$

ce qui est toujours vrai. Conclusion $D_f = [1, +\infty[$.

2. Soit φ définie par $\varphi(t) = \text{ch}^2(t)$, alors φ continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (la croissance s'obtient par exemple par $\varphi'(t) = 2 \text{sh } t \text{ ch } t \geq 0$ si $t \geq 0$) donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\left[\varphi(0), \lim_{+\infty} \varphi \right] = [1, +\infty[$. Il existe donc un unique $t \geq 0$ tel que $x = \varphi(t) = \text{ch}^2(t)$ (on a également $x = \text{ch}^2(-t)$, le « t » n'est pas unique!). Mais dans ce cas (on utilise $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$)

$$x - 1 = \text{ch}^2 t - 1 = \text{sh}^2 t \text{ d'où } \sqrt{x-1} = |\text{sh } t| = \text{sh } t \text{ car } t \geq 0$$

et $x + 2\sqrt{x-1} = \text{ch}^2(t) + 2 \text{sh}(t) = 1 + \text{sh}^2(t) + 2 \text{sh}(t) = (\text{sh}(t) + 1)^2$ et $x + 2\sqrt{x-1} = (\text{sh}(t) - 1)^2$. Ainsi

$$f(x) = \sqrt{(\text{sh}(t) + 1)^2} + \sqrt{(\text{sh}(t) - 1)^2} = |\text{sh}(t) + 1| + |\text{sh}(t) - 1|$$

Puisque $t \geq 0$, on a $\text{sh } t \geq 0$ donc $|\text{sh}(t) + 1| = \text{sh}(t) + 1$. En revanche, ce n'est pas si simple pour $|\text{sh}(t) - 1|$. La fonction sh est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left] \lim_{-\infty} \text{sh}, \lim_{+\infty} \text{sh} \right[= \mathbb{R}$, il existe donc un unique t_0 tel que $\text{sh}(t_0) = 1$ et par stricte croissance

$$t \geq t_0 \iff \text{sh}(t) \geq 1$$

Par stricte croissance de φ , on a

$$t \geq t_0 \iff x = \text{ch}^2(t) \geq x_0 = \text{ch}^2(t_0) + \text{sh}^2(t_0) = 1 + 1^2 = 2$$

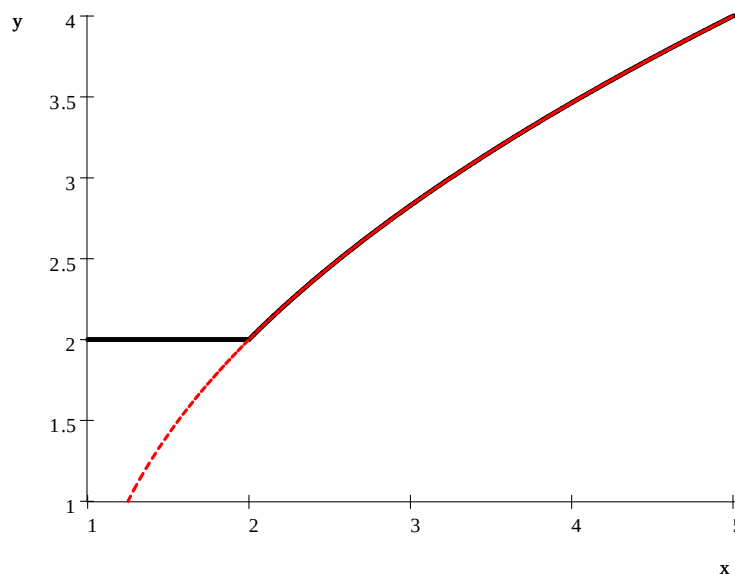
Donc si $x \leq 2$ on a $t \leq t_0$ d'où $\text{sh}(t) \leq 1$, ce qui donne $|\text{sh}(t) - 1| = 1 - \text{sh}(t)$ et $f(x) = 2$.

Si $x \geq 2$ on a $t \geq t_0$ d'où $\text{sh}(t) \geq 1$, ce qui donne $|\text{sh}(t) - 1| = \text{sh}(t) - 1$ et $f(x) = 2 \text{sh}(t) = 2\sqrt{x-1}$ (on a montré un peu plus haut que $\sqrt{x-1} = \text{sh } t$).

Remarque : On vient donc ce montrer que si $x \in [1, 2]$ on a

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$$

Ci dessous le graphe de f et en rouge celui de $x \mapsto 2\sqrt{x-1}$.



Exercice de khôlle 182

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f définie par $f(x) = e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh}(a))$, calculer la dérivée d'ordre 2023 de f .

Solution : La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que produit de composées de telles fonctions). On écrit que

$$f(x) = e^{x \operatorname{ch} a} \times \frac{e^{x \operatorname{sh}(a)} + e^{-x \operatorname{sh}(a)}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{x(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)} + e^{x(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{xe^a} + e^{xe^{-a}} \right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(e^a \times e^{xe^a} + e^{-a} \times e^{xe^{-a}} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{xe^a+a} + e^{xe^{-a}-a} \right) \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \left(e^a \times e^{xe^a+a} + e^{-a} \times e^{xe^{-a}-a} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{xe^a+2a} + e^{xe^{-a}-2a} \right) \end{aligned}$$

et par récurrence (immédiate que je vous laisse rédiger) la dérivée énième (notée $f^{(n)}$) vérifie

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(e^{xe^a+na} + e^{xe^{-a}-na} \right)$$

Exercice de khôlle 183

Pour $x \neq 0$, on pose $\coth(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$.

1. Montrer que si $x \neq 0$, $\coth(x) - \coth(2x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(2x)}$.
2. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(2^k)}$, calculer S_n et montrer que sa limite vaut $\frac{2}{e-1}$

Solution :

1. On a $\coth(x) - \coth(2x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} - \frac{\operatorname{ch}(2x)}{\operatorname{sh}(2x)} = \frac{\operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(2x) - \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(2x)}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(2x)}$. Il suffit donc de prouver que

$$\operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(2x) - \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}(x)$$

On revient simplement aux formes exponentielles, il suffit de prouver que

$$(e^x + e^{-x}) \operatorname{sh}(2x) - (e^x - e^{-x}) \operatorname{ch}(2x) = e^x - e^{-x}$$

Mais

$$(e^x + e^{-x}) \operatorname{sh}(2x) - (e^x - e^{-x}) \operatorname{ch}(2x) = e^x (\operatorname{sh}(2x) - \operatorname{ch}(2x)) + e^{-x} (\operatorname{sh}(2x) + \operatorname{ch}(2x))$$

avec $\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u = e^u$ et $\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u = e^{-u}$, on obtient

$$e^x (\operatorname{sh}(2x) - \operatorname{ch}(2x)) + e^{-x} (\operatorname{sh}(2x) + \operatorname{ch}(2x)) = e^x \times (-e^{-2x}) + e^{-x} (e^{2x}) = e^x - e^{-x}$$

2. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{sh}(2^k)} &= \sum_{k=0}^n \coth(2^{k-1}) - \coth(2 \times 2^{k-1}) = \sum_{k=0}^n \coth(2^{k-1}) - \coth(2^k) \\ &= \coth(2^{-1}) - \coth(2^n) \quad (\text{pirate}) \end{aligned}$$

Puis $\coth(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ donc $\coth(2^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (car $2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$). Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \coth\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

Pour finir, $\coth(x) - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 1 = \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^x(e^x - e^{-x})} = \frac{2}{e^{2x} - 1}$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{e - 1}$$

ce que l'on écrit $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(2^k)} = \frac{2}{e - 1}$.

4.5 Un arc en ciel d'égalités et d'équations

Exercice de khôlle 184

Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2}) + \arcsin(x)$.

1. Soit $x \in [-1, 1]$, que vaut $\sin(\arccos x)$?
2. Pour $x \in [0, 1]$, simplifier $f(x)$.
3. A l'aide de la parité, exprimer $f(x)$ uniquement à l'aide de $\arcsin x$ lorsque $x \in [-1, 0]$.

Solution : Rappel : $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$ uniquement lorsque $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

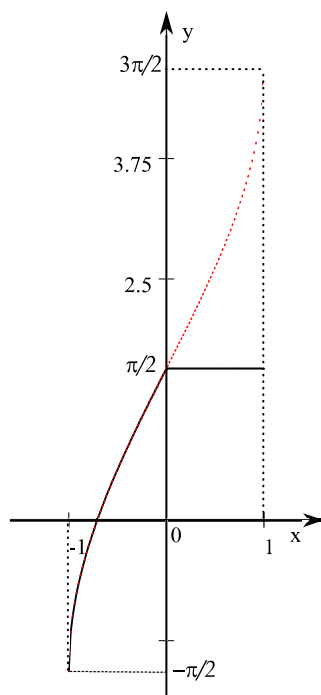
1. C'est du cours, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
2. Puisque $x \in [0, 1]$, on a $\arccos(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin(\sin(\arccos(x))) = \arccos(x)$. On en déduit que

$$\arcsin \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x = \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

3. On a $f(-x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2}) - \arcsin(x) = f(x) - 2 \arcsin(x)$. Pour $x \in [-1, 0]$, on a $-x \in [0, 1]$ donc

$$f(-x) = \frac{\pi}{2} = f(x) - 2 \arcsin(x) \text{ d'où } f(x) = 2 \arcsin(x) + \frac{\pi}{2}$$

Sur le graphe suivant, la courbe représentative de f est en noire, celle de $x \mapsto 2 \arcsin(x) + \frac{\pi}{2}$ est en rouge.



Exercice de khôlle 185

(★) On considère l'équation $\tan x = \cos x$.

- Montrer qu'il existe une unique solution α sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
- Exprimer cette solution à l'aide de la fonction arcsin et vérifier ensuite que $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$ où $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (indication $\frac{1}{\varphi} = \dots$).
- Montrer que les courbes représentatives des fonctions $\cos$ et $\tan$ ont des tangentes perpendiculaires au point où elles se coupent.

Solution :

- Soit $f(x) = \tan x - \cos x$, f est définie, dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée égale à $f'(x) = 1 + \tan^2(x) + \sin(x) > 0$. Ainsi f est continue, strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right] = [-1, +\infty[$. Puisque $0 \in [-1, +\infty[$, il existe un unique $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$$\tan x = \cos x \iff \sin(x) = \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

On résout alors $X^2 + X - 1 = 0$ dont les solutions sont $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\varphi$ (le nombre d'or) et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi}$ (le produit des racines vaut 1). Puisque $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin x > 0$ d'où

$$\sin x = \frac{1}{\varphi} \iff x = \arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right) \text{ car } x \text{ est dans l'intervalle fondamental du sinus}$$

Enfin $\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)} = \frac{\frac{1}{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{1}{\varphi^2}}}$ mais $\frac{1}{\varphi}$ est solution de $X^2 + X - 1 = 0$ donc

$$1 - \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi} \text{ et ainsi}$$

$$\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$$

d'où

$$\arctan\left(\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$$

Mais $\arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (intervalle fondamental de la tangente) donc $\arctan\left(\tan\left(\arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\varphi}\right)$, ce qui prouve bien que $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$.

3. Plus généralement si φ et ψ sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I non trivial et si $\alpha \in I$, la tangente T_φ à $\mathcal{C}_\varphi$ en α a pour équation $y = \varphi'(\alpha)(x - \alpha) + \varphi(\alpha)$ et celle, notée T_ψ à $\mathcal{C}_\psi$ a pour équation $y = \psi'(\alpha)(x - \alpha) + \psi(\alpha)$.

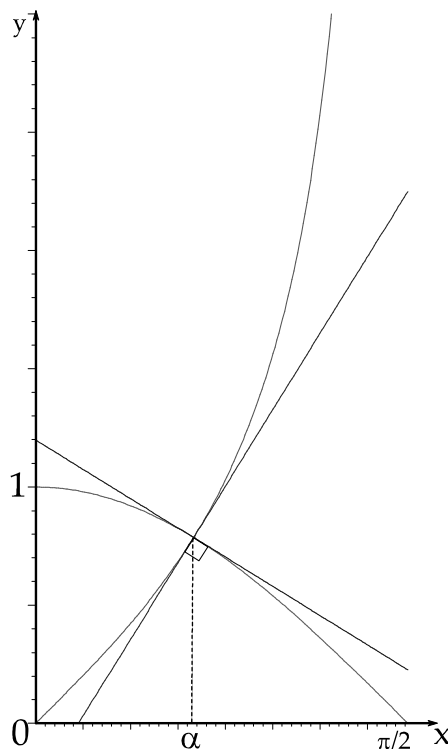
Un vecteur directeur de T_φ est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\alpha) \end{pmatrix}$ (pour mémoire un vecteur directeur à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$) et un vecteur directeur de T_ψ est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi'(\alpha) \end{pmatrix}$. Les deux tangentes T_φ et T_ψ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (le produit scalaire) donc si et seulement si $\varphi'(\alpha)\psi'(\alpha) = -1$ (c'est un résultat simple, les droites sont perpendiculaires si le produit de leur pente vaut -1).

Revenons à notre problème, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \times (-\sin(\alpha)) = -1$$

sachant que $\tan \alpha = \cos \alpha$ (les deux courbes se coupent au point d'abscisse α). C'est immédiat car $\tan \alpha = \cos \alpha \iff \sin(\alpha) = \cos^2(\alpha)$.

Un petit dessin pour finir :



Exercice de khôlle 186

On veut déterminer les réels x tels que

$$\arctan(x-1) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{19}{8}\right)$$

1. Soit $f(x) = \arctan(x-1) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Etudier rapidement la fonction f , en déduire que l'équation admet une unique solution plus grande que 1.
2. Résoudre l'équation. (Indication $8 \times \frac{1}{16} - 46 \times \frac{1}{4} + 11 = 0$)

Solution :

1. Puisque $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Avec la relation fondamentale de l'arctangente, on a

$$\begin{aligned} \forall x < 0, f(x) &= \arctan(x-1) + \arctan x + \frac{\pi}{2} \\ \forall x > 0, f(x) &= \arctan(x-1) + \arctan x - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ainsi f strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$ (somme de fonctions croissantes).

Sur $] -\infty, 0[$, f est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $] -\infty, 0[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right[$.

Mais si $x < 0$, on a $f(x) = \arctan(x-1) + \arctan x + \frac{\pi}{2}$ d'où

$$\begin{aligned} f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \\ f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \arctan(-1) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ainsi $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right[= \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right[$. De la même manière f réalise une bijection de $] 0, +\infty[$ sur $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Puisque $\frac{19}{8} > 1$, on a $\arctan\left(\frac{19}{8}\right) > \frac{\pi}{4}$ d'où

$$\arctan\left(\frac{19}{8}\right) \notin \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right[\text{ et } \arctan\left(\frac{19}{8}\right) \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = \arctan\left(\frac{19}{8}\right)$ et puisque $f(1) = \frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{19}{8}\right)$, cette solution est bien plus grande que 1.

2. On sait qu'il existe une unique solution, soit α cette solution alors $\alpha > 0$ donc

$$\arctan(\alpha-1) - \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \arctan\left(\frac{19}{8}\right) \neq \frac{\pi}{2}$$

On peut donc prendre la tangente de chaque terme pour obtenir

$$\tan\left(\arctan(\alpha-1) - \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) = \frac{\alpha-1 - \frac{1}{\alpha}}{1 + (\alpha-1) \times \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha^2 - \alpha - 1}{2\alpha - 1} = \tan\left(\arctan\left(\frac{19}{8}\right)\right) = \frac{19}{8}$$

Soit

$$8(\alpha^2 - \alpha - 1) - 19(2\alpha - 1) = 8\alpha^2 - 46\alpha + 11 = 0$$

L'indication nous dit que $\frac{1}{4}$ est solution, l'autre solution est alors $\frac{11}{2}$ (produit des racines). Donc $\alpha \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{11}{2}\right\}$, or $\alpha \geq 1$ donc $\alpha = \frac{11}{2}$. La seule solution de $\arctan(x-1) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{19}{8}\right)$ est $x = \frac{11}{2}$.

Exercice de khôlle 187

Résoudre $\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x+7}\right) = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

(Indication $5 \times 4 + 3 \times 2 - 26 = 0$).

Solution : Par analyse-synthèse.

Analyse : Soit x une solution (on suppose qu'il en existe une) alors

$$\frac{x^2-1}{x+7} = \sin\left(\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x+7}\right)\right) = \sin\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

d'où

$$5(x^2-1) - 3(x+7) = 5x^2 - 3x - 26 = 0$$

L'indication nous dit que -2 est une solution, l'autre est donc $\frac{13}{5}$. Les seules solutions possibles sont donc $x = -2$ et $x = \frac{13}{5}$.

Synthèse : L'analyse nous dit que pour $x = -2$ ou $x = \frac{13}{5}$, on a $\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x+7}\right)$ et $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ ont même sinus. On a toujours $\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x+7}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (intervalle fondamental du sinus) et puisque $\frac{4}{5} > 0$, on sait que $\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Conclusion pour $x = -2$ ou $x = \frac{13}{5}$, $\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x+7}\right)$ et $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ ont même sinus et sont dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel sinus est bijectif. Ils sont donc égaux. Conclusion : -2 et $\frac{13}{5}$ sont solutions.

Exercice de khôlle 188

Que vaut $\alpha = \arctan 5 + \arctan \frac{3}{2}$?

Solution : On veut passer à la tangente, mais est-on sûr que $\arctan 5 + \arctan \frac{3}{2} \neq \frac{\pi}{2}$ (π) ? On localise α , puisque $\frac{3}{2}$ et 5 sont strictement supérieurs à 1 , on a $\left(\arctan 5, \arctan \frac{3}{2}\right) \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ d'où $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Ainsi $\tan \alpha$ existe et

$$\tan \alpha = \frac{5 + \frac{3}{2}}{1 - 5 \times \frac{3}{2}} = -1$$

Le seul réel de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ dont la tangente vaut -1 est $\frac{3\pi}{4}$ d'où

$$\arctan 5 + \arctan \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

Exercice de khôlle 189

Résoudre $2 \arcsin(x) = \arccos(2x)$.

Solution : Analyse : Soit x une solution alors $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (pour que $\arccos(2x)$ soit défini) et

$$\cos(2 \arcsin x) = \cos \arccos(2x)$$

Avec $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ on obtient

$$1 - 2x^2 = 2x \text{ d'où } 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

Les solutions de cette dernière équation sont $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2}$ donc à exclure et $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ que l'on conserve.

Remarque : On peut être tenté de passer au sinus au lieu du cosinus. C'est alors un peu plus compliqué. En effet on a

$$\begin{aligned} \sin(2 \arcsin x) &= 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} \\ \sin(\arccos 2x) &= \sqrt{1-4x^2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2 \arcsin(x) &= \arccos(2x) \implies 2x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-4x^2} \\ \iff \begin{cases} 4x^2(1-x^2) = 1-4x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 4x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de $4X^2 - 8X + 1 = 0$ sont $X = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ qui sont toutes les deux positives. Puis $x^2 = X$ et $x \geq 0$ donne deux solutions possibles

$$x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ ou } x = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

La seconde solution est à exclure car $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \geq 1$. La seule solution possible est donc

$$x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{1-2\sqrt{3}+1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ (ouf)}$$

Synthèse : Méthode ① : Si $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ alors $2 \arcsin(x)$ et $\arccos(2x)$ ont même sinus. Mais puisque $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\arccos(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puis

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sqrt{3}-1 \leq \sqrt{2} \iff 4-2\sqrt{3} \leq 2 \iff 1 \leq \sqrt{3}$$

donc $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et ainsi $\arcsin(x) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. En conclusion, pour $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $2 \arcsin(x)$ et $\arccos(2x)$ ont même sinus, sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel $\sin$ est injectif donc sont égaux.

Il y a donc une unique solution qui est $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Méthode ② : Soit $f(x) = 2 \arcsin(x) - \arccos(2x)$, alors f est continue, strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (en dérivant ou en utilisant les monotonies, connues, de $\arcsin$ et $\arccos t$). Donc f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $\left[f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ qui contient 0. Il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ et comme

$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ est la seule possible, c'est la solution !

Remarque : Dans la méthode ②, il n'est pas nécessaire de montrer que f réalise une bijection. En effet, puisque f est continue (et ça c'est important), de $f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ on en déduit (TVI) l'existence d'une solution à $f(x) = 0$. Puisque $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ est la seule possible, c'est terminé.

Exercice de khôlle 190

Résoudre $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Solution : On tente par analyse-synthèse. Analyse : Soit x une solution alors

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$\tan(a+b) = \dots$ (en supposant que tout existe)

$$\begin{aligned} \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) &= \frac{\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{1}{x} \frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1+x(x-1)}{x(x+1)}}{1 - \frac{x-1}{x(x+1)}} \\ &= \frac{x+1+x(x-1)}{x(x+1) - (x-1)} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \end{aligned}$$

Bon, on réfléchit $\dots$. Cela doit signifier que $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ est constant (ou presque...). On change donc de stratégie.

On pose $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ qui est définie et dérivable (car $\arctan$ l'est sur $\mathbb{R}$) sur $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Pour $x \in D_f$, on a

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = 0$$

(Pour dériver $\frac{x-1}{x+1}$, utiliser $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$). Ainsi f est constante sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Sur $]-\infty, -1[$, on obtient la valeur de la constante en considérant

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arctan 0 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

car $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, $\frac{x-1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$ et $\arctan$ est continue en 0 et en 1.

Sur $]-1, 0[$, on obtient la valeur de la constante en considérant $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. On a

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty \text{ et } \arctan X \xrightarrow{X \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2} \text{ donc } \arctan \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x-1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -1 \text{ et par continuité de } \arctan \text{ en } -1, \arctan \frac{x-1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

Enfin sur $]0, +\infty[$, on a la constante en prenant $x = 1$ (ou par les limites, mais il faut varier les plaisirs), car

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x < -1 \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ est donc $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

Remarque : En particulier $f(\sqrt{3}) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ donc

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \tan\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

que l'on simplifie avec $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice de khôlle 191

Résoudre $2 \arcsin(x) = \arccos\left(\frac{7}{25}\right)$.

Solution : Le domaine d'étude est $[-1, 1]$.

Analyse : on suppose qu'il existe une solution notée x . On a

$$\begin{aligned} 2 \arcsin(x) &= \arccos\left(\frac{7}{25}\right) \implies \cos(2 \arcsin(x)) = \cos\left(\arccos\left(\frac{7}{25}\right)\right) \\ \iff 1 - 2 \sin^2(\arcsin x) &= \frac{7}{25} \iff 1 - 2x^2 = \frac{7}{25} \iff x^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{7}{25}\right) = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

Ainsi $x = \frac{3}{5}$ ou $x = -\frac{3}{5}$.

Synthèse :

Méthode ① : L'analyse montre que $2 \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$, $2 \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ et $\arccos\left(\frac{7}{25}\right)$ ont même cosinus.

Mais $\arccos\left(\frac{7}{25}\right) \in [0, \pi]$ et $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ d'où $2 \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) \in]-\pi, 0[$, il ne sont donc pas égaux (l'un est positif, l'autre strictement négatif!).

En revanche, $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ d'où $2 \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \in [0, \pi]$. Ainsi $2 \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ et $\arccos\left(\frac{7}{25}\right)$ ont même cosinus, sont dans l'intervalle fondamental du cosinus (intervalle sur lequel le cosinus est injectif) donc sont égaux.

La seule solution est donc $x = \frac{3}{5}$.

Méthode ② : La fonction $x \mapsto 2 \arcsin x$ est strictement croissante, continue donc réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $[2 \arcsin(-1), 2 \arcsin(1)] = [-\pi, \pi]$. Or $\arccos\left(\frac{7}{25}\right) \in [-\pi, \pi]$, il existe donc une unique solution. Puisque $\arccos\left(\frac{7}{25}\right) > 0$ (et que $2 \arcsin 0 = 0$), cette solution est positive. Ainsi $x = \frac{3}{5}$ est l'unique solution.

Exercice de khôlle 192

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$(E_n) \quad \arcsin(x) + \arcsin(nx) = \frac{\pi}{2}$$

1. Résoudre (E_0) et (E_1) .
2. On définit f_n par $f_n(x) = \arcsin(x) + \arcsin(nx)$.
 - (a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f_n . Calculer $f'_n(x)$ sur son domaine de définition.
 - (b) Justifier que f_n réalise une bijection entre deux intervalles I_n et J_n , que l'on précisera, et en déduire que (E_n) admet une unique solution notée x_n . Quel est le signe de x_n ?
3. Déterminer x_n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Plus généralement, pour $y \in J_n$, déterminer $f_n^{-1}(y)$. On commencera par les deux cas $n = 0$ et $n = 1$.

Solution :

1. Pour $n = 0$, puisque $\arcsin 0 = 0$, on a $(E_0) \iff \arcsin x = \frac{\pi}{2} \iff x = 1$ ainsi $x_1 = 1$.
 Pour $n = 1$, on a $(E_1) \iff 2 \arcsin x = \frac{\pi}{2} \iff \arcsin x = \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ainsi $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. On sait que $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$.

- (a) On a donc $f_n(x)$ défini si et seulement si $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq nx \leq 1 \end{cases} \iff x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, et f_n est alors dérivable en x si et seulement si $nx \neq \pm 1$ donc f_n dérivable sur $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ et sur cet intervalle

$$f'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{n}{\sqrt{1-n^2x^2}}$$

- (b) On a clairement $f'_n(x) > 0$ sur $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, ainsi f_n étant **continue** sur $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, elle est **strictement croissante** sur $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. En particulier f_n réalise une bijection de $I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ sur $J_n = \left[f_n\left(-\frac{1}{n}\right), f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.
 Or $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\pi}{2}$ et par imparité, $J_n = \left[-\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right), \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$. En particulier puisque $\arcsin \frac{1}{n} > 0$, on en déduit que $\frac{\pi}{2} \in J_n$ donc admet un unique antécédent $x_n \in I_n$. Conclusion (E_n) a une unique solution.

De plus, par stricte croissante de f_n , $0 = f_n(0) < f_n(x_n) = \frac{\pi}{2}$ donne $0 < x_n$.

- (c) On sait que x_n existe et est unique. De plus $f_n(x_n) = \frac{\pi}{2}$ équivaut à $\arcsin(nx) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ d'où

$$\sin(\arcsin nx) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

soit $nx = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. En élevant au carré chaque membre, il vient $n^2x_n^2 = 1 - x_n^2$ d'où

$$x_n^2 = \frac{1}{n^2 + 1} \text{ et par positivité de } x_n, \text{ on en déduit } x_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$$

- (d) Plus généralement.
 Si $n = 0$, on a $f_0(x) = \arcsin x$ donc

$$\arcsin x = y \implies \sin(\arcsin x) = \sin y \implies x = \sin y$$

ainsi $f_0^{-1}(y) = \sin(y)$.

Si $n = 1$, on a $f_1(x) = 2 \arcsin x$ et

$$2 \arcsin x = y \implies \sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{y}{2}\right) \implies x = \sin\left(\frac{y}{2}\right)$$

ainsi $f_1^{-1}(y) = \sin\left(\frac{y}{2}\right)$.

On suppose donc $n \geq 2$.

Soit $y \in J_n$ et $x_n \in I_n$ (on sait qu'il existe et est unique) tel que $f_n(x) = y$.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= y \iff \arcsin(nx) = y - \arcsin x \implies nx = \sin(y - \arcsin x) \\ &\implies nx = \sin(y) \cos(\arcsin x) - \sin(\arcsin x) \cos(y) \\ &\implies nx = y\sqrt{1-x^2} - x \cos(y) \implies (n - \cos y)x = \sin(y) \sqrt{1-x^2} \\ &\implies ((n - \cos y)x)^2 = \sin^2(y) (1-x^2) \\ &\implies ((n - \cos y)^2 + \sin^2(y)) x^2 = \sin^2(y) \end{aligned}$$

On sait que x existe, donc si $y \in J_n$, on a $(n - \cos y)^2 + \sin^2(y) \neq 0$. Mais si vous n'êtes pas convaincu,

$$n^2 - 2\cos(y)n + 1 = 0 \iff (n - \cos y)^2 + \sin^2(y) = 0 \iff \begin{cases} (n - \cos y)^2 = 0 \\ \sin^2(y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n = \cos y \\ \sin y = 0 \end{cases}$$

ce qui est impossible car $n \geq 2$ et $\cos y \leq 1$.

Bref, on obtient

$$x^2 = \frac{\sin^2(y)}{(n - \cos y)^2 + \sin^2(y)} \text{ d'où } |x| = \frac{|\sin y|}{\sqrt{(n - \cos y)^2 + \sin^2(y)}}$$

Enfin, par stricte monotonie de f_n^{-1} , puisque $f_n^{-1}(0) = 0$, on en déduit que $x = f_n^{-1}(y)$ ont même signe. Comme, de plus, $\sin y$ et y ont même signe, on a, pour $y \in J_n$.

$$x = f_n^{-1}(y) = \frac{\sin y}{\sqrt{(n - \cos y)^2 + \sin^2(y)}} = \frac{\sin y}{\sqrt{n^2 - 2n \cos(y) + 1}}$$

Exercice de khôlle 193

1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. On note θ l'unique argument de z situé dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Montrer que

$$\theta = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } b > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } b < 0 \end{pmatrix}$$

2. Donner la forme cartésienne de $z = \frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i}$.

3. En déduire que

$$\arctan 2 - \arctan(5\sqrt{3} - 8) = \frac{\pi}{6}$$

Solution :

1. Question classique, on écrit que $z = \rho e^{i\theta} = \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta$ avec θ l'unique argument de z dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Par unicité des parties réelles et imaginaires, on a $a = \rho \cos \theta$ et $b = \rho \sin \theta$. Puisque $z \notin i\mathbb{R}$ on a $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ d'où $\sin \theta \neq 0$ et $b \neq 0$ (car $\rho \neq 0$). Par quotient

$$\frac{b}{a} = \tan \theta$$

Si $b > 0$ alors $\sin \theta > 0$ donc $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ceci permet d'affirmer que $\theta = \arctan \tan \theta = \arctan \left(\frac{b}{a} \right)$. Si $b < 0$ alors $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ d'où $\theta - \pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Mais alors $\frac{b}{a} = \tan \theta = \tan (\theta - \pi)$ d'où

$$\arctan \frac{b}{a} = \arctan \tan (\theta - \pi) = \theta - \pi$$

et ainsi $\theta = \pi + \arctan \frac{b}{a}$.

2. On a $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{2^2+1} = \frac{1}{5}(2+i)$. Puis

$$\begin{aligned} & \frac{(2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i) \times (2 + i)}{2 \times (2 + \sqrt{3}) - (2\sqrt{3} - 1)} + \frac{i((2 + \sqrt{3}) + 2(2\sqrt{3} - 1))}{5 + i(5\sqrt{3})} \\ &= \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i} = 1 + i\sqrt{3} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

3. On en déduit que

$$\arg \left(\frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i} \right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

mais

$$\arg \left(\frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i} \right) = \arg (2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i) - \arg (2 - i) \quad (2\pi)$$

D'après ce qui précède, $\arg (2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i) = \arctan \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right) \quad (2\pi)$ et

$$\begin{aligned} \arg (2 - i) &= \pi + \arctan \left(-\frac{1}{2} \right) = \pi - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2 \right) = \frac{\pi}{2} + \arctan 2 \end{aligned}$$

$$\text{car } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0$$

. Puisque $\frac{2\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 5\sqrt{3} - 8$, on a donc

$$\arctan (5\sqrt{3} - 8) - \frac{\pi}{2} - \arctan 2 = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

soit

$$\arctan (5\sqrt{3} - 8) - \arctan 2 = \frac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$$

Pour finir, avec $5\sqrt{3} - 8 > 0$ et $2 > 0$ on a

$$0 \leq \arctan (5\sqrt{3} - 8) \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq -\arctan 2 \leq 0$$

d'où $\arctan (5\sqrt{3} - 8) - \arctan 2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le seul angle congru à $\frac{5\pi}{6}$ modulo 2π qui soit dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $-\frac{\pi}{6}$ (faire un cercle trigonométrique) d'où

$$\arctan (5\sqrt{3} - 8) - \arctan 2 = -\frac{\pi}{6}$$

Exercice de khôlle 194

Résoudre (E) $a^{b+a^2} = b^{a^2}$ où $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$.

Solution : On passe au $\ln$ (qui est une bijection sur $]0, +\infty[$), ainsi (sachant que $a \neq 0$ et $b \neq 0$)

$$(E) \iff (b + a^2) \ln a = a^2 \ln b \iff b \ln a = a^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \iff \frac{b \ln a}{a} = \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{a}{b} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

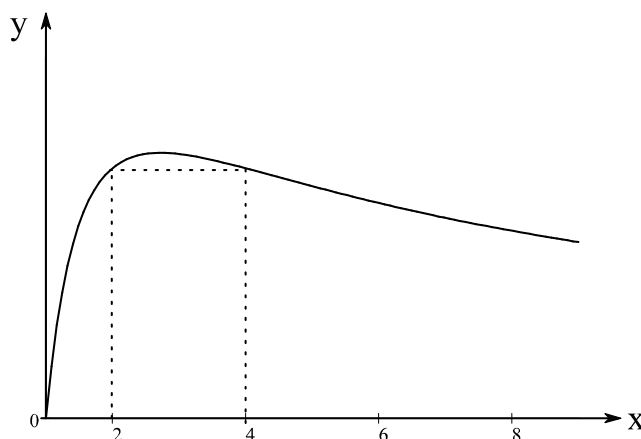
Si on pose $x = \frac{b}{a} \in]0, +\infty[$, on obtient

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln x}{x}$$

Cas ① : $x = a$ soit $a^2 = b$, et on a bien

$$a^{2a^2} = (a^2)^{a^2}$$

Cas ② : $x \neq a$. Une étude rapide de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]1, +\infty[$, car $a \in \mathbb{N}^*$ (dont la dérivée vaut $\frac{1 - \ln x}{x}$, ainsi f a un maximum en $x = e$), donne le graphe de f suivant



Puisque $a \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que : ou bien $a = 2$ et $x = 4$ donc $b = 8$ (et on a bien $2^{8+4} = 8^4$), ou bien $a = 4$ et $x = 2$ donc $b = 8$ (encore) et $4^{8+16} = 8^{16}$. Conclusion : les solutions sont (a, a^2) où $a \in \mathbb{N}^*$, $(2, 8)$ et $(4, 8)$.

4.6 Dériver pour simplifier

Exercice de khôlle 195

Déterminer le domaine de définition, puis de dérivabilité de f définie par $f(x) = 2 \arctan(\sqrt{x+1}) - \arcsin\left(\frac{x}{x+2}\right)$.

Dériver f et en déduire ainsi f .

Solution : On sait que $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ ainsi $2 \arctan(\sqrt{x+1})$ est défini si et seulement si $\sqrt{x+1}$, i.e. $x \geq -1$. En revanche, $u \mapsto \sqrt{u}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et par composition $x \mapsto \arctan(\sqrt{x+1})$ est définie et continue sur $] -1, +\infty[$, dérivable sur $] -1, +\infty[$.

Pour $\arcsin\left(\frac{x}{x+2}\right)$, on sait que arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$, ainsi $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{x+2}\right)$ est définie si et seulement si $x+2 \neq 0$ et $-1 \leq \frac{x}{x+2} \leq 1$ et dérivable si $x+2 \neq 0$ et $-1 < \frac{x}{x+2} < 1$. Or

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{x}{x+2} \iff 0 \leq \frac{x}{x+2} + 1 = 2\frac{x+1}{x+2} \\ \frac{x}{x+2} &\leq 1 \iff 0 \leq 1 - \frac{x}{x+2} = \frac{2}{x+2} \end{aligned}$$

On fait un tableau de signe

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$		
$x+1$		$-$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{2}{x+2}$		$-$	$ $	$+$	$+$	
$\frac{x+1}{x+2}$		$+$	$ $	$-$	0	$+$

On en déduit que $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{x+2}\right)$ est définie et continue sur $[-1, +\infty[$, dérivable sur $] -1, +\infty[$ (car $x \mapsto \frac{x}{x+2}$ y est dérivable, à valeurs dans $] -1, 1[$). Au final

f est définie et continue sur $[-1, +\infty[$, dérivable sur $] -1, +\infty[$

Remarque : Pour la dérivabilité, on ne sait pas si f est dérivable ou pas en -1 . Ce qui précède permet simplement de dire que f est au moins dérivable sur $] -1, +\infty[$.

Puis pour $x > 1$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1})' &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ \left(\frac{x}{x+2}\right)' &= \left(\frac{x+2-2}{x+2}\right)' = \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)' = \frac{2}{(x+2)^2} \\ 1 - \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 &= \frac{(x+2)^2 - x^2}{(x+2)^2} = 4\frac{(x+1)}{(x+2)^2} \\ \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x+2}\right)^2} &= \sqrt{4\frac{(x+1)}{(x+2)^2}} = 2\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \text{ car } x+1 \geq 0 \text{ et } x+2 \geq 0 \\ f'(x) &= 2 \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1 + (\sqrt{x+1})^2} - \frac{\frac{2}{(x+2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x+2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2 \times 2\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est continue sur $[-1, +\infty[$, dérivable sur $] -1, +\infty[$ de dérivée nulle donc constante sur $[-1, +\infty[$. La valeur de la constante est par exemple

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \arctan(\sqrt{2+1}) - \arcsin\left(\frac{2}{2+2}\right) \\ &= 2 \arctan(\sqrt{3}) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

En particulier, avec $x = 2(\sqrt{2}+1)$ (obtenu en résolvant $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) on a

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$$

d'où

$$2 \arctan(\sqrt{2} + 1) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

ce qui donne $\tan(\arctan(\sqrt{2} + 1)) = \sqrt{2} + 1 = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice de khôlle 196

Montrer, en utilisant la dérivée, que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$. En déduire la nature de

la suite $u_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

Solution : Avant tout puisque $x^2 + x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ (ses racines sont j et j^2 donc complexe et le coefficient dominant vaut 1) on a

$$\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x^2 + x + 1)$$

On pose alors $f(x) = \arctan(x+1) - \arctan x + \arctan(x^2 + x + 1)$ qui est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que combinaison linéaire de composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+1}{1+(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{1+x^2 - (1+(x+1)^2)}{(1+x^2)(1+(x+1)^2)} + \frac{2x+1}{1+(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{2x+1}{1+(x^2+x+1)^2} - \frac{2x+1}{(1+x^2)(1+(x+1)^2)} \end{aligned}$$

Comme on sait que l'on doit trouver 0 (car f est censée être constante), il suffit de prouver que

$$(1+x^2)(1+(x+1)^2) = 1+(x^2+x+1)^2$$

Mais

$$\begin{aligned} (1+x^2)(1+(x+1)^2) &= 1+x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2 \\ &= 1+x^4+2x^3+2x^2+(x+1)^2 \\ &= 1+x^4+2x^2(x+1)+(x+1)^2 \\ &= 1+(x^2+(x+1))^2 \end{aligned}$$

Ainsi $f' = 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $f(0) = \arctan(1) - \arctan(0) + \arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
Puis

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = u_n = \sum_{k=0}^n (\arctan(k+1) - \arctan(k)) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan 0 \text{ (somme télescopique)} \\ &= \arctan(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 197

Soient f et g définies par $f(x) = \arccos(1 - x^2)$ et $g(x) = 2 \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

1. Donner les domaines de définition puis de dérivabilité de f et g .
2. Calculer les dérivées de f et g sur leur ensemble de dérivabilité. Que peut-on en conclure sur f et g ?

Solution :

1. On sait que $\arccos$ est définie sur $[-1, 1]$ ainsi $f(x)$ est défini si et seulement si $1 - x^2$ l'est et si $-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$.
Or

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - x^2 \iff x^2 \leq 2 \iff x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ 1 - x^2 &\leq 1 \iff 0 \leq x^2 \end{aligned}$$

Ainsi $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Pour la dérivabilité, f est dérivable en $x \in D_f$ si et seulement si $1 - x^2 \neq \pm 1$. Cela revient à exclure les cas d'égalités dans le raisonnement précédent. Ainsi f est dérivable sur $] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.

Pour g , on sait que $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$ ainsi $g(x)$ est défini si et seulement si $\frac{x}{\sqrt{2}}$ l'est et si $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1$.
Or

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Ainsi $D_g = D_f$. Puis g est dérivable en $x \in D_g$ tel que $\frac{x}{\sqrt{2}} \neq \pm 1$ donc g est dérivable sur $] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.

2. Pour $x \in] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-2x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2(2 - x^2)}} = 2 \frac{x}{|x|} \times \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} \text{ car } \sqrt{x^2} = |x| \\ g'(x) &= 2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2 - x^2}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } f'(x) = g'(x) \text{ si } x \geq 0 \text{ et } f'(x) = -g'(x) \text{ si } x \leq 0$$

On en déduit que sur $[0, \sqrt{2}]$, $f - g$ est continue, dérivable sur $[0, \sqrt{2}[$ de dérivée nulle donc est constante sur $[0, \sqrt{2}]$. La valeur de la constante est $f(0) - g(0) = \arccos 1 - \arcsin 0 = 0$

Sur $[-\sqrt{2}, 0]$, $f + g$ est continue, dérivable sur $] -\sqrt{2}, 0]$ de dérivée nulle donc est constante sur $[-\sqrt{2}, 0]$. La valeur de la constante est $f(0) - g(0) = \arccos 1 - \arcsin 0 = 0$. Au final

$$f(x) = g(x) \text{ sur } [0, \sqrt{2}] \text{ et } f(x) = -g(x) \text{ sur } [-\sqrt{2}, 0]$$

Exercice de khôlle 198

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$, il est clair que th est défini sur $\mathbb{R}$ et y est dérivable.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < \text{th } x < 1$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, justifier que $f(x) = \arctan(\text{sh}(x)) + \arccos(\text{th } x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et simplifier son expression.
3. Résoudre $\text{th } x = \frac{5}{13}$, en déduire la valeur de $\arctan \frac{5}{12} + \arccos \frac{5}{13}$.

Solution :

1. Puisque $\operatorname{ch} x > 0$, on a

$$-1 < \operatorname{th} x \iff -\operatorname{ch} x < \operatorname{sh} x \iff 0 < \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$$

ce qui est vrai car $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x > 0$. De même

$$\operatorname{th} x < 1 \iff \operatorname{sh} x < \operatorname{ch} x \iff 0 < \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

ce qui est vrai car $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$.

2. Les fonctions sh et arctan sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi $x \mapsto \operatorname{arctan}(\operatorname{sh}(x))$ est défini sur $\mathbb{R}$. La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $] -1, 1[$, or arccos est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$, par composition $x \mapsto \operatorname{arccos}(\operatorname{th} x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Conclusion, f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Puis si $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} - \frac{\operatorname{th}'(x)}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(x)}}$$

Mais $\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$ et $1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$ d'où

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x}}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{|\operatorname{ch} x|}{\operatorname{ch}^2 x} = 0 \text{ car } \operatorname{ch} > 0$$

On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $f(0) = \operatorname{arctan} 0 + \operatorname{arccos} 0 = 0 + \frac{\pi}{2}$.

3. On a

$$\operatorname{th} x = \frac{5}{13} \iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{5}{13} \iff \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{5}{13}$$

On pose $X = e^x$, l'équation devient

$$\frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = \frac{5}{13} \text{ soit } 13(X^2 - 1) = 5(X^2 + 1)$$

ou encore $13(X^2 - 1) - 5(X^2 + 1) = 8X^2 - 18 = 0$ ce qui donne $X^2 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ d'où $X = \pm \frac{3}{2}$. Or $X = e^x > 0$ d'où

$$X = e^x = \frac{3}{2} \text{ soit } x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \text{ est l'unique solution}$$

(Si on a un doute sur les équivalences, on peut vérifier que $\operatorname{th}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = \frac{5}{13}$).

On en déduit que $f\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \operatorname{arctan}\left(\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) + \operatorname{arccos}\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$. Mais

$$\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{12}$$

d'où le résultat !

Exercice de khôlle 199

Soit f définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f .
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D'_f$.
3. Simplifier alors $f(x)$ pour $x \in D_f$.

Solution :

1. On sait que $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Ainsi $f(x)$ existe si et seulement si $\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} \in [-1, 1]$. Mais pour $u \in \mathbb{R}$, on a

$$-1 \leq u \leq 1 \iff 0 \leq |u| \leq 1 \iff 0 \leq |u|^2 = u^2 \leq 1$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} \in [-1, 1] &\iff 0 \leq \frac{(x+1)^2}{2x^2+2} \leq 1 \iff 0 \leq_{2x^2+2>0} (x+1)^2 \leq 2(x^2+1) \\ &\iff 0 \leq 2(x^2+1) - (x+1)^2 \iff 0 \leq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \text{ toujours vrai} \end{aligned}$$

Ainsi $D_f = \mathbb{R}$. Pour la dérivabilité, on a f dérivable en x si et seulement si $\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} = -1 &\iff x+1 = -\sqrt{2x^2+2} \iff \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ (x+1)^2 = 2x^2+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \text{ impossible} \\ \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} = 1 &\iff x+1 = \sqrt{2x^2+2} \iff \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (x+1)^2 = 2x^2+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \iff x = 1 \end{aligned}$$

Conclusion f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Soit $u(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - (x+1) \times x}{\sqrt{2}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(x^2+1) - (x^2+x)}{\sqrt{2}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{\sqrt{2}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ \sqrt{1-u^2(x)} &= \sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{2x^2+2}} = \sqrt{\frac{2x^2+2 - (x+1)^2}{2x^2+2}} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}} = \frac{|x-1|}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Ainsi pour $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \frac{1-x}{\sqrt{2}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \times \frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} \\ &= \frac{1-x}{|1-x|} \times \frac{1}{1+x^2} \text{ car } |1-x| = |x-1| \end{aligned}$$

3. La fonction f est continue sur $]-\infty, 1]$ dérivable sur $]-\infty, 1[$ avec

$$\text{si } x < 1, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ car } 1-x > 0$$

Il existe donc $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x < 1, f(x) = \arctan x + C_1$$

Mais $f(1) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right) = \frac{\pi}{2}$ d'où $\arctan 1 + C_1 = \frac{\pi}{4} + C_1 = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $C_1 = \frac{\pi}{4}$.

De même, la fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ dérivable sur $]1, +\infty[$ avec

$$\text{si } x > 1, f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \text{ car } 1-x < 0$$

Il existe donc $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que

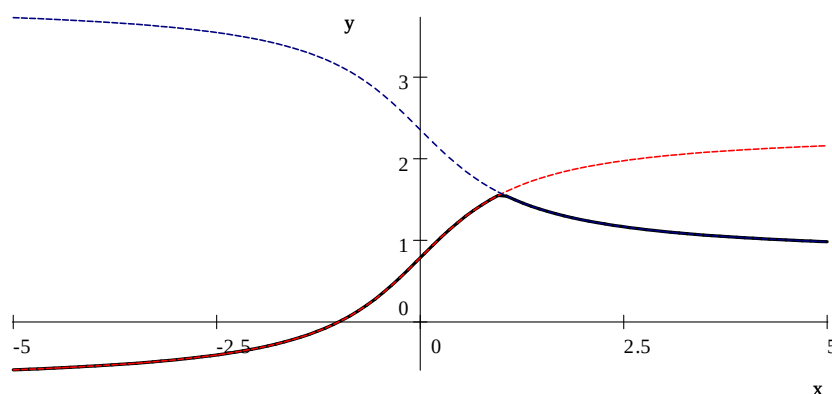
$$\forall x < 1, f(x) = -\arctan x + C_2$$

D'où avec $x = 1$, $\frac{\pi}{2} = -\arctan 1 + C_2 = -\frac{\pi}{4} + C_2$, ce qui donne $C_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Conclusion

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x + \frac{\pi}{4} & \text{si } x < 1 \\ -\arctan x + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Voici le graphe de f et des fonctions $x \mapsto \arctan x + \frac{\pi}{4}$ (en rouge) et $x \mapsto -\arctan x + \frac{3\pi}{4}$ (en bleu).



Exercice de khôlle 200

- Factoriser $1 + X^6$ par $1 + X^2$.
- Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(x) + \arctan(x^3) = \arctan(2x + \sqrt{3}) + \arctan(2x - \sqrt{3})$$

Solution :

- On a $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ donc $X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$.
- On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan(x^3)$ et $g(x) = \arctan(2x + \sqrt{3}) + \arctan(2x - \sqrt{3})$ qui sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $\arctan$ l'est ainsi que $x \mapsto x^3$ et les fonctions affines). Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^6} = \frac{x^4 - x^2 + 1 + 3x^2}{1+x^6} = \frac{(x^2+1)^2}{1+x^6} = \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$$

et

$$g'(x) = \frac{2}{1 + (2x + \sqrt{3})^2} + \frac{2}{1 + (2x - \sqrt{3})^2}$$

Mais

$$\begin{aligned} 2 + (2x + \sqrt{3})^2 + (2x - \sqrt{3})^2 &= 8x^2 + 8 = 8(x^2 + 1) \\ \left(1 + (2x + \sqrt{3})^2\right) &= 4((x^2 + 1) + x\sqrt{3}) \\ \left(1 + (2x - \sqrt{3})^2\right) &= 4((x^2 + 1) - x\sqrt{3}) \\ \left(1 + (2x + \sqrt{3})^2\right) \times \left(1 + (2x - \sqrt{3})^2\right) &= 16((x^2 + 1)^2 - 3x^2) \\ &= 16(x^4 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

d'où

$$g'(x) = 2 \times \frac{8(x^2 + 1)}{16(x^4 - x^2 + 1)} = f'(x)$$

On en déduit que $(f - g)' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, ce qui permet d'affirmer que $f - g$ est constante sur $\mathbb{R}$. On a la valeur de la constante à l'aide de $f(0) = 0$ et $g(0) = \arctan(\sqrt{3}) + \arctan(-\sqrt{3}) = 0$ (par imparité ou par calcul). Ce qui prouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x) + \arctan(x^3) = \arctan(2x + \sqrt{3}) + \arctan(2x - \sqrt{3})$$

Exercice de khôlle 201

Soit f définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) - \arctan(1 + 2e^x)$.

- Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Préciser la limite de f en $-\infty$ puis simplifier f .
- Résoudre $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et en déduire $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Solution :

- On sait que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$, ainsi $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient (tout comme $x \mapsto 1 + 2e^x$). La fonction $\arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition et différence, il en est de même de f . Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \text{ d'où } u'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \\ 1 + u^2(x) &= 1 + \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)^2 = \frac{(e^x + 1)^2 + e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f'(x) = \frac{\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}}{\frac{(e^x + 1)^2 + e^{2x}}{(e^x + 1)^2}} - \frac{2e^x}{1 + (1 + 2e^x)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2 + e^{2x}} - \frac{2e^x}{1 + (1 + 2e^x)^2}$$

Mais

$$\begin{aligned} 1 + (1 + 2e^x)^2 &= 2 + 4e^x + 4e^{2x} = 2(1 + 2e^x + 2e^{2x}) \\ (e^x + 1)^2 + e^{2x} &= e^{2x} + 2e^x + 1 + e^{2x} = (1 + 2e^x + 2e^{2x}) \end{aligned}$$

permet d'affirmer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$.

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 2e^x = 1$. Par continuité de $\arctan$ en 0 et 1, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(1 + 2e^x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$. Conclusion $f = -\frac{\pi}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

3. On a

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{3}e^x = 1 + e^x \iff 1 = (\sqrt{3} - 1)e^x \iff e^x = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \iff x = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right)$$

Mais si $x = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right)$ alors $e^x = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ d'où $1 + 2e^x = 2 + \sqrt{3}$ et ainsi

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right)\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{6} - \arctan(2 + \sqrt{3}) = -\frac{\pi}{4}$$

d'où l'on déduit que $\arctan(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$. En passant à la tangente, on obtient

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

CHAPITRE 5

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

5.1 Simple décomposition (yoda a dit)

Exercice de khôlle 202

Donner la décomposition en éléments simples de $F(X) = \frac{X^4 + 5}{X^3 + 2X^2 - X - 2}$.

Solution : On factorise $Q(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2 = X^3 - X + 2(X^2 - 1) = X(X^2 - 1) + 2(X^2 - 1) = (X + 2)(X - 1)(X + 1)$. Si $P(X) = X^4 + 5$, on a $\deg P \geq \deg Q$, on commence donc par faire la division euclidienne de P par Q pour obtenir

$$X^4 + 5 = (X - 2)Q(X) + 5X^2 + 1$$

Ainsi, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{aligned} F(X) &= X - 2 + \frac{5X^2 + 1}{X^3 + 2X^2 - X - 2} \\ \text{et } \frac{5X^2 + 1}{X^3 + 2X^2 - X - 2} &= \frac{5X^2 + 1}{(X + 2)(X - 1)(X + 1)} = \frac{a}{X + 2} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - 1} \end{aligned}$$

On a

$$a = \frac{5 \times (-2)^2 + 1}{(-2 - 1)(-2 + 1)} = 7, \quad b = \frac{5 \times (-1)^2 + 1}{(-1 + 2)(-1 - 1)} = -3 \quad \text{et} \quad c = \frac{5 \times (1)^2 + 1}{(1 + 2)(1 + 1)} = 1$$

On peut aussi écrire que $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 5$ et $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a + b + c$ donc par unicité de la limite, $a + b + c = 5$.

Ainsi

$$F(X) = X - 2 + \frac{7}{X + 2} - \frac{3}{X + 1} + \frac{1}{X - 1}$$

Exercice de khôlle 203

Soit $F(X) = \frac{X^2 + 3}{X^4 - 1}$.

1. Décomposer $F(X)$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
2. En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

3. Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2+3}{x^4-1} dx$ (justifier que cette intégrale existe!).

Solution : On a $\deg(X^2 + 3) = 3 < \deg(X^4 - 1) = 4$ et

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$

1. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{X-i}$$

On peut calculer a, b, c, d par la méthode du cache. Mais la fraction est paire donc

$$\begin{aligned} F(-X) &= \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{c}{-X+i} + \frac{d}{-X-i} \\ &= \frac{-b}{X-1} + \frac{-a}{X+1} + \frac{-d}{X+i} + \frac{-c}{X-i} \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition, on a $a = -b$ et $c = -d$. Puis le cache donne

$$\begin{aligned} a &= \frac{1+3}{(1+1)(1+i)(1-i)} = \frac{4}{2 \times (1-i^2)} = 1 \text{ et } b = -1 \\ c &= \frac{i^3+3}{(i+1)(i-1)(i+i)} = \frac{2}{(i^2-1) \times 2i} = \frac{i}{2} \text{ et } d = -\frac{i}{2} \end{aligned}$$

Conclusion

$$F(X) = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{X+i} - \frac{1}{X-i} \right)$$

2. On a $\frac{i}{2} \left(\frac{1}{X+i} - \frac{1}{X-i} \right) = \frac{i}{2} \left(\frac{X-i - (X+i)}{(X+i)(X-i)} \right) = \frac{1}{X^2+1}$ d'où

$$F(X) = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X^2-1}$$

3. Soit f définie par $f(t) = \frac{t^2+3}{t^4-1}$ alors $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Puisque 0 et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sont dans $] -1, 1[$, f est continue sur l'intervalle d'intégration donc I existe et

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = [\ln|t-1| - \ln|t+1| + \arctan(t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \ln \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1} \right| - 0 + \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1} = \sqrt{3}-2 \text{ d'où}$$

$$I = \ln(2 - \sqrt{3}) - \frac{\pi}{6}$$

5.2 Encore des sommes !

Exercice de khôlle 204

Décomposer en éléments simples $F(X) = \frac{3X+2}{X^3+3X^2+2X}$ et en déduire $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{3k+2}{k^3+3k^2+2k}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Solution : On a $Q(X) = X^3 + 3X^2 + 2X = X(X+1)(X+2)$ et $P(X) = 3X+2$, puisque $\deg P < \deg Q$ donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

On a avec la méthode du cache, $a = \frac{2}{(0+1)(0+2)} = 1$ (ou bien $Q'(X) = 3X^2 + 6X + 2$ donc $a = \frac{P(0)}{Q'(0)} = 1$) et de même $b = \frac{-3+2}{(-1) \times (-1+2)} = 1$ et $c = -2$ (car $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a+b+c$ et par unicité de la limite). Au final

$$\frac{3X+2}{X^3+3X^2+2X} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} - \frac{2}{X+2}$$

Puis

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} \right) - 2 \left(\sum_{i=3}^n \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \end{aligned}$$

On peut aussi écrire que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

pour jouer au pirate !

Exercice de khôlle 205

(★) Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a \in \mathbb{U}_n \setminus \{-1, 1\}$ (donc a est une racine n ième de 1 différente de 1 et -1) et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k (z + a^{k+1})}{(z - a^k)(z - a^{k+1})(z - a^{k+2})}$$

Solution : Avant tout la somme demandée existe bien. En effet, $|z| \neq 1 = |a^k|$ pour $k \in [0; n+1]$, on ne divise donc jamais par 0. On pose ensuite

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{a^k (X + a^{k+1})}{(X - a^k)(X - a^{k+1})(X - a^{k+2})} \\ &= \frac{1}{(a-1)^2 (X - a^k)} - \frac{2}{(a-1)^2 (X - a^{k+1})} + \frac{1}{(a-1)^2 (X - a^{k+2})} \end{aligned}$$

On décompose $F(X)$ (le degré du numérateur est 1 et $1 < 3$). Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$F(X) = \frac{\alpha}{X - a^k} + \frac{\beta}{X - a^{k+1}} + \frac{\gamma}{X - a^{k+2}}$$

On a

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a^k(a^k + a^{k+1})}{(a^k - a^{k+1})(a^k - a^{k+2})} = \frac{a^k \times a^k \times (a+1)}{a^k(1-a) \times a^k(1-a^2)} = \frac{1}{(1-a)^2} \\ \beta &= \frac{a^k(a^{k+1} + a^{k+1})}{(a^{k+1} - a^k)(a^{k+1} - a^{k+2})} = \frac{2a^{2k+1}}{a^k(a-1)a^{k+1}(1-a)} = -\frac{2}{(1-a)^2} \\ \gamma &= \frac{a^k(a^{k+2} + a^{k+1})}{(a^{k+2} - a^k)(a^{k+2} - a^{k+1})} = \frac{a^{2k+1}(a+1)}{a^k(a^2-1)a^{k+1}(a-1)} = \frac{1}{(1-a)^2}\end{aligned}$$

Ainsi

$$F(X) = \frac{1}{(1-a)^2} \times \left(\frac{1}{X - a^k} - \frac{2}{X - a^{k+1}} + \frac{1}{X - a^{k+2}} \right)$$

Puis

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(1-a)^2} \times \left(\frac{1}{z - a^k} - \frac{2}{z - a^{k+1}} + \frac{1}{z - a^{k+2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(1-a)^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z - a^k} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z - a^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z - a^{k+2}} \right) \\ &= \frac{1}{(1-a)^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{z - a^k} - \frac{1}{z - a^{k+1}} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{z - a^{k+1}} - \frac{1}{z - a^{k+2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(1-a)^2} \left(\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-a^n} \right) - \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a^{n+1}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(1-a)^2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a^n} + \frac{1}{z-a^{n+1}} \right)\end{aligned}$$

On peut aussi écrire que (avec des changements d'indices)

$$\begin{aligned}(1-a)^2 S_n &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{z - a^j} - 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - a^j} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{z - a^j} \right) \\ &= \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-a} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{z - a^j} - 2 \left(\frac{1}{z-a} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{z - a^j} + \frac{1}{z-a^n} \right) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{z - a^j} + \frac{1}{z-a^n} + \frac{1}{z-a^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-a} - 2 \left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-a^n} \right) + \frac{1}{z-a^n} + \frac{1}{z-a^{n+1}} \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a^n} + \frac{1}{z-a^{n+1}}\end{aligned}$$

Enfin puisque $a^n = 1$, on a $a^{n+1} = a$ et

$$S_n = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-a} = 0$$

Exercice de khôlle 206

Soit $F(X) = \frac{1}{(X+1)(X+2)(X+3)}$.

1. Décomposer en éléments simples $F(X)$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

Solution :

1. Puisque $\deg 1 = 0 < \deg (X+1)(X+2)(X+3) = 3$ la décomposition est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{X+3}$$

Avec la méthode du cache, on a

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{1}{2} \\ b &= \frac{1}{(-2+1)(-2+3)} = -1 \\ c &= \frac{1}{(-3+1)(-3+2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On peut vérifier avec $x F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ que $a + b + c = 0$.

2. On a alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{\frac{1}{2}}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{\frac{1}{2}}{k+3} \right) = \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{\frac{1}{2}}{k+1} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2} \right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{k+3} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} \right) \quad (\text{double pirate}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{0+2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+3)} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 207

Soit

$$F(X) = \frac{X+2}{X^4 + 8X^3 + 19X^2 + 12X}$$

1. Décomposer en éléments simples $F(X)$.
2. En déduire la valeur de

$$S_n = \frac{3}{(1 \times 2) \times (4 \times 5)} + \frac{4}{(2 \times 3) \times (5 \times 6)} + \frac{5}{(3 \times 4) \times (6 \times 7)} + \cdots + \frac{n}{(n-2)(n-1) \times (n+1)(n+2)}$$

Solution : On a bien $\deg(X+2) = 1 < \deg(X^4 + 8X^3 + 19X^2 + 12X) = 4$.

1. On factorise par X , puis on factorise $X^3 + 8X^2 + 19X + 12$ en cherchant une solution évidente (qui est -1) ou bien en regardant la question 2 pour se dire que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)(k+3)(k+4)}$ donc qu'il y a des chances que

$$X(X+1)(X+3)(X+4) = X^4 + 8X^3 + 19X^2 + 12X$$

ce que l'on vérifie facilement. Bref la forme de la décomposition est donc

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+3} + \frac{d}{X+4}$$

On a (avec $P(X) = X+2$ et $Q(X) = X^4 + 8X^3 + 19X^2 + 12X$, $Q'(X) = 4X^3 + 24X^2 + 38X + 12$)

$$\begin{aligned} a &= \frac{0+2}{(0+1)(0+3)(0+4)} = \frac{1}{6}, \text{ ou bien } a = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\ b &= \frac{-1+2}{(-1) \times (-1+3)(-1+4)} = -\frac{1}{6} \text{ ou bien... bah non trop de calculs} \\ c &= \frac{-3+2}{(-3)(-3+1)(-3+4)} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Et puisque $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a+b+c+d$, par unicité de la limite, $a+b+c+d=0$ d'où $d = \frac{1}{6}$.

Au final

$$F(X) = \frac{1}{6} \left(\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} \right) - \left(\frac{1}{X+3} - \frac{1}{X+4} \right) \right)$$

2. Et par les pirates

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n F(k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{1+3} - \frac{1}{n+4} \right) \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(n+1)(n+4)} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n+5}{n+4} \text{ jolie!} \end{aligned}$$

On peut vérifier que

$$\frac{3}{(1 \times 2) \times (4 \times 5)} + \frac{4}{(2 \times 3) \times (5 \times 6)} + \frac{5}{(3 \times 4) \times (6 \times 7)} = \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{3}{28}$$

Exercice de khôlle 208

Soit $(\alpha, r) \in \mathbb{C}^3$ avec $r \neq 0$ et $-\frac{\alpha}{r} \notin \mathbb{N}$, on définit

$$F(X) = \frac{1}{(\alpha + rX)(\alpha + 2rX)}$$

- Décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = u_n + r$, on définit pour $n \geq 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{2k}}$$

- Justifier que S_n existe. Quel est le lien entre S_n et F ?
- On suppose que $\alpha = 2r$, calculer S_n en fonction de n .

Solution :

- Les degrés, c'est ok ! On se ramène au cours en écrivant

$$F(X) = \frac{1}{2r^2} \times \frac{1}{\left(X + \frac{\alpha}{r}\right) \left(X + \frac{\alpha}{2r}\right)}$$

On sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$F(X) = \frac{a}{X + \frac{\alpha}{r}} + \frac{b}{X + \frac{\alpha}{2r}}$$

Avec le cache, on a

$$a = \frac{1}{2r^2} \times \frac{1}{\left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{2r}\right)} = -\frac{1}{\alpha r} \text{ et } b = \frac{1}{2r^2} \times \frac{1}{\left(-\frac{\alpha}{2r} + \frac{\alpha}{r}\right)} = -a = \frac{1}{\alpha r}$$

Ainsi

$$F(X) = \frac{1}{\alpha r} \left(\frac{1}{X + \frac{\alpha}{2r}} - \frac{1}{X + \frac{\alpha}{r}} \right)$$

2.

- (a) Il s'agit de vérifier que u_n (et donc u_{2n}) n'est jamais nul, mais on sait que $u_n = \alpha + nr$ ainsi $u_n = 0 \iff n = -\frac{\alpha}{r}$ impossible.
On a alors

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(\alpha + kr)(\alpha + 2kr)} = \sum_{k=0}^n F(k)$$

- (b) Si $\alpha = 2r$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^n F(k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2r^2} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)$$

Exercice de khôlle 209

Soit $F(X) = \frac{1}{X(1-X^2)}$ et $G(X) = \frac{3X^2-1}{(X-1)^2 X^2 (X+1)^2}$.

- Décomposer en éléments simples F puis en déduire celle de G .
- Calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{3k^2-1}{(k-1)^2 k^2 (k+1)^2}$$

Solution : **Attention**, on a

$$F(X) = \frac{-1}{X(X^2-1)} = \frac{-1}{X(X-1)(X+1)}$$

- La décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

avec

$$a = \frac{-1}{(0-1)(0+1)} = 1, b = \frac{-1}{1 \times (1+1)} = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{-1}{(-1)(-1-1)} = \frac{-1}{2}$$

(on a bien $a+b+c=0$ en calculant de deux manières $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x)$). Ainsi

$$F(X) = \frac{1}{X} - \frac{\frac{1}{2}}{(X+1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(X-1)}$$

Puis on remarque que $X(1-X^2) = X - X^3$ se dérive en $1 - 3X^2$ ainsi

$$G(X) = F'(X) = \frac{-1}{X^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(X-1)^2}$$

2. Mais alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{3k^2 - 1}{(k-1)^2 k^2 (k+1)^2} = \sum_{k=2}^n G(k) \\ &= \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{k^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(k+1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(k-1)^2} \right) \end{aligned}$$

Méthode ① : On coupe en trois sommes,

$$S_n = -\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)^2}$$

Dans la seconde somme, on pose $j = k + 1$ et dans la troisième, $\ell = k - 1$ pour avoir

$$\begin{aligned} S_n &= -\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell^2} \\ &= -\left(\frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k^2} \right) \\ &= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

Méthode ② : Pirates !

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(k+1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(k-1)^2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

CHAPITRE 6

INTÉGRATION I

6.1 Intégrales usuelles

Exercice de khôlle 210

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) e^{-3x} dx$.

Solution : On a $I = \operatorname{Re} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2ix} e^{-3x} dx \right)$. Mais

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2ix} e^{-3x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(-3+2i)x} dx = \frac{1}{-3+2i} \left[e^{(-3+2i)x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{-3-2i}{9+4} (e^{-3\frac{\pi}{2}+i\pi} - 1) \\ &= \frac{-3-2i}{13} (-e^{-\frac{3\pi}{2}} - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$I = \frac{3}{13} \left((e^{-\frac{3\pi}{2}} + 1) \right)$$

Exercice de khôlle 211

Soient $a = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{11}-1}{2}$, Calculer $\int_a^b \frac{dx}{x^2+x+3}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} x^2 + x + 3 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = \frac{11}{4} \left(\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} + 1 \right) \\ &= \frac{11}{4} \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}} \right)^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

Si on dérive $\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)$, on obtient $\frac{\frac{2}{\sqrt{11}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1}$ donc

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + x + 3} = \frac{1}{\frac{11}{4}} \times \frac{\sqrt{11}}{2} \times \int_a^b \frac{\frac{2}{\sqrt{11}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{11}} \left[\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{11}} \right]_a^b$$

Mais $\frac{2b+1}{\sqrt{11}} = 1$ et $\frac{2a+1}{\sqrt{11}} = \sqrt{3}$ donc

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + x + 3} = \frac{2}{\sqrt{11}} \left(\arctan(1) - \arctan(\sqrt{3}) \right) = \frac{2}{\sqrt{11}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\pi}{6\sqrt{11}}$$

Exercice de khôlle 212

Calculer $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 4}$.

Solution : On a

$$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 = 3 \left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)$$

Si on dérive $\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$, on obtient $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 213

Montrer qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 4}$$

En déduire les primitives de $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.

Solution : Puisque l'on donne la décomposition, on réduit au même dénominateur

$$\frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 4} = \frac{(a+c)x^3 + (b+d)x^2 + (4a+c)x + 4b+d}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

On résout alors le système

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \\ 4a + c = 1 \\ 4b + d = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 1 \\ 3a = 1 \\ 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{3} \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{x}{x^2 + 4}$$

Puis

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2 + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln |x^2 + 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 + 4| + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} \right) + C \text{ où } C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 214

Calculer $A = \int_0^\pi \cos(2x) e^{-x} dx$ et $B = \int_0^\pi \sin(2x) e^{-x} dx$.

Solution : Les deux intégrales existent et

$$\begin{aligned} Z &= A + iB = \int_0^\pi e^{2ix} e^{-x} dx = \int_0^\pi e^{x(-1+2i)} dx = \left[\frac{1}{-1+2i} e^{x(-1+2i)} \right]_0^\pi \\ &= \frac{-1-2i}{1+4} (e^{\pi(-1+2i)} - 1) = \frac{-1-2i}{5} (e^{-\pi} \times e^{2i\pi} - 1) \\ &= \frac{-1-2i}{5} (e^{-\pi} - 1) = \left(\frac{1-e^{-\pi}}{5} + i \frac{2(1-e^{-\pi})}{5} \right) \end{aligned}$$

Puisque $A = \operatorname{Re}(Z)$ et $B = \operatorname{Im}(Z)$, on a

$$\int_0^\pi \cos(2x) e^{-x} dx = \frac{1-e^{-\pi}}{5} \text{ et } \int_0^\pi \sin(2x) e^{-x} dx = \frac{2(1-e^{-\pi})}{5}$$

Exercice de khôlle 215

Soit $I = \int_{-4}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

- Justifier que I existe et la calculer.
- Simplifier $\tan(I)$ et en déduire la valeur de $\frac{1}{\pi} \int_{-4}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Solution :

1. On pose $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{(x+2)^2 + 1}$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-4, 1]$, ainsi I existe.
Puis

$$I = \int_{-4}^1 \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = [\arctan(x+2)]_{-4}^1 = \arctan(3) - \arctan(-2) = \arctan(3) + \arctan(2)$$

(On dérive $\arctan(x+2)$ pour se convaincre)

2. On a alors $\tan(I) = \tan(\arctan(3) + \arctan(2)) = \frac{2+3}{1-2 \times 3} = -1$. Mais $(2, 3) \in [1, +\infty[^2$ donc

$$\arctan 2 \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } \arctan 3 \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$$

d'où $I \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ et le seul réel de cet intervalle dont la tangente vaut -1 est $\frac{3\pi}{4}$ d'où $I = \frac{3\pi}{4}$ et

$$\frac{1}{\pi} \int_{-4}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \frac{3}{4}$$

Exercice de khôlle 216

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, on pose $I(a, b) = \int_a^b \frac{\sqrt{3}dx}{x^2 + 6x + 12}$.

- Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 6x + 12}$ et préciser le domaine de validité.
- Calculer $I(-6, 0)$.
- On suppose que $I(a, b) = \frac{2\pi}{3}$, en simplifiant $\tan(I(a, b))$, déterminer une relation simple entre a et b .
- Quels sont les couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $a < b$ et $I(a, b) = \frac{2\pi}{3}$?
(On remarquera que $(a+4)(b+2) = ab + 2a + 4b + 8$)

Solution :

1. Puisque $x^2 + 6x + 12 = (x+3)^2 + 3$, la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On a

$$\int \frac{dx}{(x+3)^2 + 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C \text{ sur } \mathbb{R}$$

(Si on dérive $\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)$ on obtient $\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$, ceci permet de ne pas se tromper).

2. On a

$$I(-6, 0) = \left[\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) \right]_{-6}^0 = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

3. Plus généralement

$$I(a, b) = \left[\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) \right]_a^b = \arctan\left(\frac{b+3}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{a+3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{d'où } \tan(I(a, b)) = \frac{\frac{b+3}{\sqrt{3}} - \frac{a+3}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{b+3}{\sqrt{3}} \times \frac{a+3}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \frac{b-a}{3 + (a+3)(b+3)}. \text{ Si } I(a, b) = \frac{2\pi}{3} \text{ alors } \tan(I(a, b)) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$-\sqrt{3}$ d'où

$$\sqrt{3} \frac{b-a}{3 + (a+3)(b+3)} = -\sqrt{3}$$

ce qui donne

$$b - a = -3 - (a + 3)(b + 3)$$

d'où

$$ab + 2a + 4b + 12 = 0$$

4. Si $I(a, b) = \frac{2\pi}{3}$, on a donc (avec l'indication)

$$(a + 4)(b + 2) = ab + 2a + 4b + 8 = -4$$

Puisque $(a + 4)$ et $(b + 2)$ sont entiers, cela donne comme possibilités (ne pas oublier que $a < b$)

$$\begin{aligned} a + 4 &= 4 \text{ et } b + 2 = -1 \text{ soit } (a, b) = (0, -3) \text{ exclus} \\ a + 4 &= 2 \text{ et } b + 2 = -2 \text{ soit } (a, b) = (-2, -4) \text{ exclus} \\ a + 4 &= 1 \text{ et } b + 2 = -4 \text{ soit } (a, b) = (-3, -6) \text{ exclus} \\ a + 4 &= -1 \text{ et } b + 2 = 4 \text{ soit } (a, b) = (-5, 2) \\ a + 4 &= -2 \text{ et } b + 2 = 2 \text{ soit } (a, b) = (-6, 0) \text{ dont on sait qu'il convient} \\ a + 4 &= -4 \text{ et } b + 2 = 1 \text{ soit } (a, b) = (-8, -1) \end{aligned}$$

Il reste à déterminer si les autres couples fonctionnent.

On a pour les deux autres candidats

$$\begin{aligned} \left[\arctan \left(\frac{x+3}{\sqrt{3}} \right) \right]_{-5}^2 &= \arctan \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \arctan \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right) + \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \\ \left[\arctan \left(\frac{x+3}{\sqrt{3}} \right) \right]_{-8}^{-1} &= \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(-\frac{5}{\sqrt{3}} \right) = \arctan \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right) + \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Mais $\frac{5}{\sqrt{3}} < \sqrt{3}$ (car $5 < 6$) et a fortiori $\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{3}$ donc (stricte croissance de $\arctan$)

$$\arctan \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right) + \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) < 2 \arctan \left(\sqrt{3} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

Ainsi la seule solution est $a = -6, b = 0$.

Exercice de khôlle 217

Déterminer tous les couples d'entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $I(a, b) = \int_a^b \frac{\sqrt{3}dx}{x^2 + 6x + 12} = \frac{\pi}{3}$.

(Indication : Calculer cette intégrale. Peut-on supposer $a < b$? Développer $(a + 2)(b + 4)$).

Solution : Comme indiqué, on commence par calculer

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_a^b \frac{\sqrt{3}dx}{x^2 + 6x + 12} = \frac{1}{3} \int_a^b \frac{\sqrt{3}dx}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \int_a^b \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dx}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \left[\arctan \left(\frac{x+3}{\sqrt{3}} \right) \right]_a^b \\ &= \arctan \left(\frac{b+3}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(\frac{a+3}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Puisque $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{x^2 + 6x + 12} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, si $a \geq b$ on a $I(a, b) = \int_a^b f(x) dx \leq 0$ donc ne peut pas être égal à $\frac{\pi}{3}$. Les solutions sont donc telles que $a < b$. Puis par analyse-synthèse.

Analyse : on suppose que $a < b$ et $I(a, b) = \frac{\pi}{3}$ ainsi $\tan(I(a, b)) = \sqrt{3}$ ce qui équivaut à

$$\frac{\frac{b+3}{\sqrt{3}} - \frac{a+3}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{b+3}{\sqrt{3}} \times \frac{a+3}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{b-a}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{(a+b)}{3}} = \sqrt{3} \frac{a-b}{3 + (a+3)(b+3)} = \sqrt{3}$$

Ainsi

$$\tan(I(a, b)) = \sqrt{3} \iff b - a = 3 + (a+3)(b+3) \iff 4a + 2b + ab + 12 = 0$$

Mais, suivant l'indication, $(a+2)(b+4) = 4a + 2b + ab + 8$ ainsi

$$\tan(I(a, b)) = \sqrt{3} \iff (a+2)(b+4) = -4$$

Puisque $a+2$ et $b+4$ sont des entiers, les seules solutions sont

$$\begin{aligned} a+2 &= 4 \text{ et } b+4 = -1 \text{ soit } (a, b) = (2, -5) \text{ exclus car on cherche } a < b \\ a+2 &= 2 \text{ et } b+4 = -2 \text{ soit } (a, b) = (0, -6) \text{ exclus} \\ a+2 &= 1 \text{ et } b+4 = -4 \text{ soit } (a, b) = (-1, -8) \text{ exclus} \\ a+2 &= -1 \text{ et } b+4 = 4 \text{ soit } (a, b) = (-3, 0) \\ a+2 &= -2 \text{ et } b+4 = 2 \text{ soit } (a, b) = (-4, -2) \\ a+2 &= -4 \text{ et } b+4 = 1 \text{ soit } (a, b) = (-6, -3) \end{aligned}$$

Synthèse : On vérifie que

$$\begin{aligned} I(-3, 0) &= \arctan\left(\frac{0+3}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-3+3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ ok!} \\ I(-4, -2) &= \arctan\left(\frac{-2+3}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-4+3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ ok!} \\ I(-6, -3) &= \arctan\left(\frac{-3+3}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-6+3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ ok!} \end{aligned}$$

Les seules solutions sont donc les couples $(a, b) \in \{(-3, 0), (-4, -2), (-6, -3)\}$.

6.2 IPP

Exercice de khôlle 218

On pose $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$, $J = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx$ et $K = \int_0^1 \ln(x^2 + x + 1) dx$.

1. Calculer I et J .
2. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{2x^2 + x}{x^2 + x + 1} = a + b \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} + \frac{c}{x^2 + x + 1}$$

3. Justifier que K existe, puis à l'aide d'une IPP calculer K .

Solution : Avant tout I, J et K existe car $x^2 + x + 1 > 0$ sur $[0, 1]$, on intègre donc des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$.

1. On a

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{4}{3} \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

La dérivée de $\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ est $\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Puis

$$J = [\ln(x^2 + x + 1)]_0^1 = \ln 3$$

2. On a

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 + x}{x^2 + x + 1} &= \frac{2x^2 + 2x + 2 - x - 2}{x^2 + x + 1} = 2 - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = 2 - \frac{\frac{1}{2}(2x + 1) + \frac{3}{2}}{x^2 + x + 1} \\ &= 2 - \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{\frac{3}{2}}{x^2 + x + 1}\end{aligned}$$

3. On fait une IPP

$$\begin{aligned}u'(x) &= 1 & v(x) &= \ln(x^2 + x + 1) \\ u(x) &= x & v'(x) &= \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\end{aligned}, \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1]$$

d'où

$$\begin{aligned}K &= [x \ln(x^2 + x + 1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2 + x}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \ln 3 - \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{\frac{3}{2}}{x^2 + x + 1} \right) dx \\ &= \ln 3 - 2 \int_0^1 dx + \frac{1}{2} J + \frac{3}{2} I = \ln 3 - 2 + \frac{\ln 3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2} \ln(3) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 2\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 219

Calculer $I = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$ à l'aide d'une IPP.

Indication : dans l'IPP, poser $f'(x) = x$ et bien choisir la primitive (la constante!).

Solution : L'intégrale existe car $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ est bien définie et continue sur $[1, 2]$. On suit l'indication

$$\begin{aligned}f'(x) &= x & f(x) &= \frac{x^2 + C}{2} \\ g(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+2}} = (x+2)^{-\frac{1}{2}} & g'(x) &= -\frac{1}{2} (x+2)^{-\frac{3}{2}}, \quad f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1, 2]\end{aligned}$$

ce qui donne

$$I = \left[\frac{x^2 + C}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right]_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{x^2 + C}{(x+2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Reste à bien choisir C ! Pour cela, on écrit que $\frac{x^2 + C}{(x+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 + C}{(x+2)\sqrt{x+2}}$ donc avec $C = -4$, on obtient

$$\frac{x^2 + C}{(x+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 - 4}{(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{x^2 - 4}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right]_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} dx \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx - \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} I - [\sqrt{x+2}]_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} I - (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

d'où

$$I - \frac{1}{4} I = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2$$

soit

$$I = \frac{4}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2 \right) = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}$$

Remarque : On peut aussi calculer cette intégrale en posant $u = \sqrt{x+2}$ (exercice), ce qui donne

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = 2 \int_{\sqrt{3}}^2 (u^2 - 2) du$$

Ce qui est plus rapide bien sûr !

Exercice de khôlle 220

Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)^2 dx$ à l'aide d'IPP(s).

Solution : Les deux intégrales existent car les fonctions intégrées sont continues sur $[0, 1]$. Pour l'IPP, on pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & u(x) &= x \\ v(x) &= \arcsin(x)^2 & v'(x) &= \frac{2 \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}, \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Ainsi

$$I = \left[x \arcsin(x)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi^2}{72} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Une seconde IPP donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & f(x) &= -\sqrt{1-x^2} \\ g(x) &= \arcsin(x) & g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}, \quad f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

d'où

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[-\sqrt{1-x^2} \arcsin(x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} (-1) dx = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2}$$

Au final,

$$I = \frac{\pi^2}{72} - 2 \left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1$$

Exercice de khôlle 221

Calculer $I = \int_{\sqrt{3}}^3 \arctan\left(\frac{3}{x}\right) dx$.

Solution : Puisque $x \in [\sqrt{3}, 3]$, on peut écrire que $\arctan\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$ (car, pour $u > 0$, $\arctan u + \arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$). Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{3}}^3 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \right) dx = \frac{\pi}{2} (3 - \sqrt{3}) - \int_{\sqrt{3}}^3 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) dx \\ &= \frac{3\pi}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \int_{\sqrt{3}}^3 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) dx \end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale, on fait une IPP

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 & f(x) &= x \\ g(x) &= \arctan\left(\frac{x}{3}\right) & g'(x) &= \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{3}{9 + x^2}, \end{aligned} \quad f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [\sqrt{3}, 3]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^3 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) dx &= \left[x \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \right]_{\sqrt{3}}^3 - \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{3x}{9 + x^2} dx \\ &= 3 \arctan(1) - \sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{3x}{9 + x^2} dx \\ &= \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} \times \frac{\pi}{6} - \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{3x}{9 + x^2} dx = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) - \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{3x}{9 + x^2} dx \end{aligned}$$

Bon, on regarde cela et on se dit que $\frac{3x}{9 + x^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$, ainsi

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{3x}{9 + x^2} dx = \left[\frac{3}{2} \ln |9 + x^2| \right]_{\sqrt{3}}^3 = \frac{3}{2} \ln 18 - \frac{3}{2} \ln 12 = \frac{3}{2} \ln \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

ce qui donne

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) dx = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

Au final

$$\begin{aligned} I &= \frac{3\pi}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9} \sqrt{3} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 222

Calculer $I = \int_0^{\ln 2} (x \operatorname{ch} x + 5 \operatorname{sh} x) dx$.

Solution : Pour $\int_0^{\ln 2} x \operatorname{ch}(x) dx$, une IPP

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{ch} x & f(x) &= \operatorname{sh} x \\ g(x) &= x & g'(x) &= 1 \end{aligned}, \quad f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \ln 2]$$

donne $\int_0^{\ln 2} x \operatorname{ch}(x) dx = [x \operatorname{sh}(x)]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}(x) dx = \ln(2) \operatorname{sh}(\ln(2)) - \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}(x) dx$. Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \ln(2) \operatorname{sh}(\ln(2)) - \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}(x) dx + 5 \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}(x) dx \\ &= \ln(2) \operatorname{sh}(\ln(2)) + 4 [\operatorname{ch}(x)]_0^{\ln 2} = \ln(2) \operatorname{sh}(\ln(2)) + 4 \operatorname{ch}(\ln 2) - 4 \end{aligned}$$

Pour finir $\operatorname{ch}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$ et $\operatorname{sh}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ d'où

$$I = \frac{3}{4} \ln(2) + 1$$

Exercice de khôlle 223

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) dx$ (qui existe bien!).

1. A l'aide du changement de variable $u = \cos(x)$, montrer que

$$I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{2k+1}$$

2. A l'aide d'une IPP, montrer que, pour $n \geq 0$, $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$.

3. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$.

Solution :

1. On pose $u = \cos x$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ avec $du = -\sin(x) dx$. On a alors

$$\sin^{2n+1}(x) dx = (\sin^2(x))^n \times \sin(x) dx = (1 - \cos^2(x))^n \sin(x) dx = -(1 - u^2)^n du$$

On n'oublie pas de changer les bornes pour avoir

$$I_n = - \int_1^0 (1 - u^2)^n du = \int_0^1 (1 - u^2)^n du$$

Avec le binôme et la linéarité de l'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-u^2)^k du = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 u^{2k} du \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left[\frac{u^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{2k+1} \text{ car } 0^{2k+1} = 0 \text{ (attention au } 0^0) \end{aligned}$$

2. C'est comme Wallis donc du cours, rapidement, une IPP avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(x) & f(x) &= -\cos(x) \\ g(x) &= \sin^{2n+2}(x) & g'(x) &= (2n+2) \sin^{2n+1}(x) \cos(x) \end{aligned}, \quad f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

donne

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+3}(x) dx = [-\cos(x) \sin^{2n+2}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+2) \sin^{2n+1}(x) \cos^2(x) dx \\ &= 0 + (2n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) (1 - \sin^2(x)) dx = (2n+2) (I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

d'où

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$$

3. Par récurrence, on prouve $\mathcal{P}(n) \equiv \left\langle I_n = \frac{1}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \right\rangle$. Pour $n=0$, on a

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \text{ et } \frac{1}{2 \times 0 + 1} \frac{4^0}{\binom{2 \times 0}{0}} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 1$$

ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Puis, si à $n \geq 0$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3} I_n && \text{(montré à la question précédente)} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{1}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2n+3} \frac{4^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}} && \text{(objectif!)} \end{aligned}$$

Il s'agit donc de prouver que $\frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{1}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2n+3} \frac{4^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}}$ soit que $\frac{2(n+1)}{2n+1} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}}$,

ou encore que

$$(n+1) \binom{2n+2}{n+1} = 2 \times (2n+1) \binom{2n}{n}$$

Mais

$$\begin{aligned} (n+1) \binom{2n+2}{n+1} &= (n+1) \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \times (n+1)!} = \frac{(n+1)}{(n+1)!} \times \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1) \times n!} = \frac{1}{n!} \frac{2 \times (2n+1)(2n)!}{n!} \\ &= 2 \times (2n+1) \frac{(2n)!}{n! \times n!} = 2 \times (2n+1) \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité et termine la récurrence.

Remarque : On a alors

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n+1}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$$

mais (JCVD! notre ami belge)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n+1}{2k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-2k) + (2k+1)}{2k+1} \binom{n}{k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n-k}{2k+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n-k}{2k+1} \binom{n}{k} + 0^n \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n-k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{2 \binom{2n}{n}}$$

6.3 Le changement c'est maintenant

Exercice de khôlle 224

Soit f continue sur $[0, 1]$ et telle que $\forall x \in [0, 1], f(x) = f(1-x)$. Montrer que

$$\textcircled{1} \quad I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(x + \frac{1}{2}\right) \sin(x) dx = 0 \text{ et } \textcircled{2} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) e^{\sin(\pi x)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-x) e^{\sin(\pi x)} dx$$

Solution : Pour $\textcircled{1}$, avant tout $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ est continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ donc $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) \sin(x)$ aussi et l'intégrale existe. L'égalité $f(x) = f(1-x)$ pour $x \in [0, 1]$, s'écrit aussi (en posant $x = \frac{1}{2} + v$) $f\left(\frac{1}{2} + v\right) = f\left(\frac{1}{2} - v\right)$ (et traduit le fait que $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie du graphe de f). Ainsi

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(x + \frac{1}{2}\right) \sin(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2} - x\right) \sin(x) dx$$

On pose alors le changement de variable $v = -x$ pour avoir

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2} - x\right) \sin(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2} + v\right) \sin(-v) \times (-dv) = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(x + \frac{1}{2}\right) \sin(x) dx$$

d'où $I_1 = -I_1$ et ainsi $I_1 = 0$.

Pour $\textcircled{2}$: On pose $u = 1-x$ dans $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) e^{\sin(\pi x)} dx$ pour avoir

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) e^{\sin(\pi x)} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} f(1-u) e^{\sin(\pi(1-u))} \times (-du) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-u) e^{\sin(\pi(1-u))} du$$

Mais $\sin(\pi(1-u)) = \sin(\pi - \pi u) = \sin(\pi u)$ d'où

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) e^{\sin(\pi x)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-u) e^{\sin(\pi u)} du$$

Exercice de khôlle 225

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ en posant $u = \sqrt{\cos x}$.

Solution : L'intégrale existe car la fonction intégrée est continue sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ (si $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ alors $\cos x \in [\frac{1}{2}, 1]$). Le changement de variable est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{3}]$. On a

$$du = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} dx \text{ puis } \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = -\sin^2(x) \times \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} dx \right) = -(1 - \cos^2 x) \times \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} dx \right) = (1 - u^4) du$$

Puis

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

 d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (u^4 - 1) du = \left[\frac{u^5}{5} - u \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4}{5} - \frac{19}{40}\sqrt{2}$$

Exercice de khôlle 226

Calculer $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}$ en posant $x = (u - 1)^2$.

Solution : L'intégrale existe car la fonction intégrée est continue sur $[0, 1]$. Le changement de variable est bien $\mathcal{C}^1$ sur ? (il l'est sur $\mathbb{R}$ donc cela ne va pas poser de problème). On détermine les nouvelles bornes en choisissant

x	0	1
u	1	2

On a ainsi $\sqrt{x} = \sqrt{(u - 1)^2} = |u - 1| = u - 1$ car on a choisisit $u \geq 1$. Puis

$$dx = -(u - 1) du \text{ d'où } \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx = \frac{(u - 1)^2}{u} \times 2(u - 1) du = \frac{2(u - 1)^3}{u} du.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}} &= 2 \int_1^2 \frac{(u - 1)^3}{u} du = 2 \int_1^2 \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u} du \\ &= 2 \left[\frac{u^3}{3} - 3\frac{u^2}{2} + 3u - \ln|u| \right]_1^2 = \frac{5}{3} - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 227

Calculer $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}$ en posant $u = \sqrt{1 + x}$.

Solution : L'intégrale existe car la fonction intégrée est continue sur $[0, 1]$. Le changement de variable est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx \text{ puis } \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx = 2(u^2 - 1) du \\ \text{car } x &= u^2 - 1 \end{aligned}$$

Puis

x	0	1
u	1	$\sqrt{2}$

 donne

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (u^2 - 1) du = 2 \left[\frac{u^3}{3} - u \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Exercice de khôlle 228

Calculer, après avoir justifié l'existence, $\int_0^\pi \frac{\sin(x) + \cos(x)}{3 + \sin(2x)} dx$ en posant $u = \sin x - \cos x$.

Solution : On sait que $\sin$ est à valeurs dans $[-1, 1]$ ainsi $\forall x \in [-1, 1], 3 + \sin(2x) \geq 2$. La fonction $x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x}$ est donc définie sur $[0, \pi]$ et elle y est continue. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On a

$$du = (\cos x + \sin x) dx$$

$$u^2 = \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 1 - \sin(2x)$$

d'où

$$\frac{\sin(x) + \cos(x)}{3 + \sin(2x)} dx = \frac{du}{3 + 1 - u^2}$$

Puis

x	0	π
u	-1	1

 donne

$$\int_0^\pi \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx = \int_{-1}^1 \frac{du}{4 - u^2} du$$

On utilise ensuite $\frac{1}{4 - u^2} = \frac{-1}{u^2 - 4} = \frac{1}{4(u+2)} - \frac{1}{4(u-2)}$ (par une DSE et la méthode du cache) pour avoir

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4(u+2)} - \frac{1}{4(u-2)} \right) du \\ &= \frac{1}{4} [\ln |u+2| - \ln |u-2|]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 229

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ et $J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$.

1. Justifier l'existence de I et J .
2. À l'aide d'un changement de variable qui échange $\cos$ et $\sin$, calculer I .
3. Soit f continue sur $[-1, 1]$, montrer que $\int_0^{\pi} x f(\sin(x)) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(x)) dx$ (couper en deux et utiliser un changement de variable affine).
4. Que vaut J ?

Solution :

1. On a $\sin^4 x + \cos^4 x \geq 0$ et

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 0 \iff \begin{cases} \sin^4 x = 0 \\ \cos^4 x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \implies \sin^2 x + \cos^2 x = 1 = 0 \text{ absurde}$$

Ainsi $x \mapsto \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ est bien définie, continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui assure l'existence I .

Pour J , on procède de la même manière.

2. Dans $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$, on pose $u = \frac{\pi}{2} - x$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

d'où

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \text{ ainsi } I = \frac{\pi}{4}$$

3. La continuité de f sur $[-1, 1]$ et le fait que $x \mapsto \sin x$ soit à valeurs dans $[-1, 1]$ permet d'assurer que $x \mapsto f(\sin x)$ est définie et continue sur $[0, \pi]$ (par composition). Les deux intégrales considérées existent donc bien.

Pui $\int_0^{\pi} x f(\sin(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin(x)) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin(x)) dx$. Dans $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin(x)) dx$, le changement de variable $u = \pi - x$ donne

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin(x)) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\pi - u) f(\sin(u)) \times (-du) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(u)) du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u f(\sin(u)) du$$

d'où le résultat.

4. On applique ce qui précède avec $f(u) = \frac{u^4}{u^4 + (1 - u^2)^2}$ qui est bien définie et continue sur $[-1, 1]$. On obtient alors $J = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice de khôlle 230

Calculer de deux manières $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$ en posant ① $t = e^x$ et ② $u = \operatorname{sh} x$. Conclusion.

Solution : Puisque $\operatorname{ch} x \geq 1$, $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ est définie et continue sur $[0, \ln 2]$. Le changement de variable $t = e^x$ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} dt &= e^x dx \\ \frac{dx}{\operatorname{ch} x} &= \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{2dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{2e^x dx}{(e^x)^2 + 1} = \frac{2dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

Puis

x	0	$\ln 2$
t	1	2

 donne

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int_1^2 \frac{2dt}{1+t^2} = [2 \arctan t]_1^2 = 2 \arctan(2) - \frac{\pi}{2}$$

Pour l'autre changement de variable (également $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$), on a $du = \operatorname{ch}(x) dx$ et $\frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch}(x) dx}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{du}{1+u^2}$ car

$\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$. Puis $\operatorname{sh}(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ d'où le tableau de bornes

x	0	$\ln 2$
u	0	$\frac{3}{4}$

 et

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{du}{1+u^2} = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

Conclusion

$$2 \arctan(2) - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

Remarque : De manière plus générale pour $a > 0$ on a $\operatorname{sh}(\ln a) = \frac{a^2 - 1}{2a}$

$$\int_0^{\ln a} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int_1^a \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \arctan(a) - \frac{\pi}{2} \text{ et } \int_0^{\ln a} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int_0^{\frac{a^2-1}{2a}} \frac{du}{1+u^2} = \arctan\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)$$

ainsi

$$\forall a > 0, \arctan\left(\frac{a^2-1}{2a}\right) + \frac{\pi}{2} = 2 \arctan(a)$$

Exercice de khôlle 231

Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{x(2-3x)} dx$ en posant $x = \frac{1+\sin(t)}{3}$.

Solution : Avant tout I existe, en effet $x(2-3x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 0 et $\frac{2}{3}$, de coefficient dominant négatif donc positif sur $[0, \frac{2}{3}]$ donc sur $[0, \frac{1}{2}]$. (on peut aussi faire un tableau de signe). La fonction $x \mapsto \sqrt{x(2-3x)}$ est donc définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ et y est continue par les théorèmes généraux. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle décrit par t (que l'on va déterminer tout de suite). Puisque $\sin t = 3x - 1$, on choisit $t = -\frac{\pi}{2}$ pour avoir $x = 0$ et $t = \frac{\pi}{6}$ pour avoir $x = \frac{1}{2}$. En fait on triche et on se dit que, si tout va bien, $t = \arcsin(3x - 1)$ ce qui donne $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ comme nouvelles bornes !
Puis $dx = \frac{1}{3} \cos(t) dt$, $x(2-3x) = \frac{1+\sin(t)}{3} \times (1 - \sin t) = \frac{1 - \sin^2 t}{3} = \frac{\cos^2 t}{3}$ d'où

$$\sqrt{x(2-3x)} = \frac{1}{\sqrt{3}} |\cos t| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(t) \text{ car } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$$

Au final

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(t) \times \frac{1}{3} \cos(t) dt = \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{6\sqrt{3}} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{12\sqrt{3}} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin(-\pi) \right) = \frac{\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{24} \text{ ouf!}
 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 232

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$ en posant $u = \frac{\pi}{4} - x$. En déduire $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$ et $K = \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t} dt$.

Solution : L'intégrale existe car la fonction intégrée est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$ est définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. On a

$$\begin{aligned}
 \tan(x) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} \\
 dx &= -du
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u}\right) du \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan u}\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - (1 + \tan u)) du \\
 &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \text{ d'où } I = \frac{\pi}{8} \ln 2
 \end{aligned}$$

Enfin $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$ existe car la fonction intégrée est définie et continue sur $[0, 1]$. Le changement de variable $t = \tan x$ (qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$) donne

$$dt = (1 + \tan^2 x) dx \text{ d'où } dx = \frac{dt}{1+t^2} \text{ (logique si on pose } x = \arctan t)$$

puis $\frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt = \ln(1 + \tan x) dx$ et le tableau de bornes (en prenant $x = \arctan t$) :

t	0	1
x	0	$\frac{\pi}{4}$

donne alors

$$I = J = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Enfin une IPP

$$\begin{aligned}
 u'(t) &= \frac{1}{1+t^2} & v(t) &= \ln(1+t) \\
 u(t) &= \arctan t & v'(t) &= \frac{1}{1+t}
 \end{aligned}
 , u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1]$$

donne

$$J = [\ln(1+t) \arctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t} dt = \frac{\pi \ln(2)}{4} - \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t} dt$$

d'où

$$K = \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t} dt = I = J = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

Exercice de khôlle 233

Calculer $I = \int_0^1 \frac{x \ln^2(1+x^2)}{1+x^2} dx$ en posant $t = \ln(1+x^2)$, puis $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln^2(\cos u) \tan(u) du$.

Solution : La fonction $x \mapsto \frac{x \ln^2(1+x^2)}{1+x^2}$ est définie et continue sur $[0, 1]$, ainsi I existe. Le changement de variable $t = \ln(1+x^2)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on a $dt = \frac{2x}{1+x^2} dx$ d'où

$$\frac{x \ln^2(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln^2(1+x^2) \times \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} t^2 dt$$

Avec le tableau de bornes

x	0	1
t	0	$\ln 2$

, on obtient

$$I = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{2} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{6} \right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{6} \ln^3(2)$$

Pour K (qui existe car $\dots$), on pose $x = \tan(u)$ (qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$), ainsi $dx = (1 + \tan^2(u)) du$ soit $\frac{dx}{1+x^2} = du$ (logique si on pose $u = \arctan(x)$). Puis on sait que $1+x^2 = 1 + \tan^2(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}$ d'où

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) &= -\ln(1+x^2) = \ln(\cos^2 u) = 2 \ln(\cos u) \text{ car } \cos u > 0 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \text{d'où } \ln^2(\cos u) &= \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) \\ \ln^2(\cos u) \tan(u) du &= \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) \times x \times \frac{dx}{1+x^2} \end{aligned}$$

Avec les nouvelles bornes

u	0	$\frac{\pi}{4}$
x	0	1

, on a

$$K = \int_0^1 \frac{1}{4} \frac{x \ln^2(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{I}{4} = \frac{\ln^3(2)}{24}$$

Exercice de khôlle 234

Calculer $I = \int_0^7 \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}}$ en posant $t = \sqrt[6]{1+x}$.

Solution : Petit rappel : $u \mapsto \sqrt[n]{u}$ est définie, continue sur $[0, +\infty[$. Donc $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ sont définies, continues sur $[0, 7]$. Et puisque pour $u \geq 1$, on a $\sqrt[n]{u} \geq 1$, on en déduit que $\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$ ne s'annule pas sur $[0, 7]$, ce qui prouve que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}}$ est bien définie et continue sur $[0, 7]$. Tout cela pour dire que I existe.

Le changement de variable $t = \sqrt[6]{1+x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 7]$ (car $u \mapsto \sqrt[n]{u}$ l'est sur $]0, +\infty[$ et que $u = 1+x \in [1, 8]$ si $x \in [0, 7]$). Puisque $t^6 = 1+x$, on en déduit que $6t^5 dt = dx$. Puis

$$\begin{aligned} t^3 &= (\sqrt[6]{1+x})^3 = \sqrt{1+x} \text{ (si } u > 0, \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}} \text{ donc } (\sqrt[6]{1+x})^3 = ((1+x)^{\frac{1}{6}})^3 = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}) \\ t^2 &= (\sqrt[6]{1+x})^2 = \sqrt[3]{1+x} \text{ d'où } \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}} = \frac{6t^5}{t^3 + t^2} \end{aligned}$$

Avec le tableau de bornes

x	1	7
t	1	$\sqrt[6]{8} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2}$

on a

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{1+t} dt$$

Puis méthode ① : on effectue la division euclidienne de X^3 par $X+1$, ce qui donne

$$X^3 = (X^2 - X + 1)(X + 1) + 1$$

donc

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{1+t} dt &= \int_1^{\sqrt{2}} \left(t^2 - t + 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t + \ln|t+1| \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 1 + \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + \ln 2 \right) \\ &= \frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{11}{6} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$I = 10\sqrt{2} - 11 - 6 \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ou méthode ② : Belgium one point !

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^3}{1+t} dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^3 - 1 + 1}{1+t} dt$$

Mais $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ (factorisation classique et archi connue!). La suite étant identique.

Exercice de khôlle 235

Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 4)^{\frac{5}{2}}}$ en posant $u = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solution : L'intégrale existe (car $x^2 + 4 \geq 4$, donc on intègre une fonction définie et continue). Le changement de variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{2} \times \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2dx}{x^2 + 4} \\ \frac{dx}{(x^2 + 4)^{\frac{5}{2}}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} \frac{2dx}{x^4 + 4} \end{aligned}$$

Mais $\frac{x}{2} = \tan u$ d'où $x^4 + 4 = 4 \tan^2(u) + 4 = 4(1 + \tan^2(u)) = \frac{4}{\cos^2(u)}$. On en déduit que

$$\frac{dx}{(x^2 + 4)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} \frac{2dx}{x^4 + 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 u}{4} \right)^{\frac{3}{2}} du = \frac{\cos^3(u)}{16} du$$

Avec le tableau de bornes

x	0	1
t	0	$\arctan \frac{1}{2}$

, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\arctan \frac{1}{2}} \frac{\cos^3(u)}{16} du = \frac{1}{16} \int_0^{\arctan \frac{1}{2}} \cos(u) \times \cos^2(u) du \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{\arctan \frac{1}{2}} (1 - \sin^2 u) \cos(u) du = \frac{1}{16} \int_0^{\arctan \frac{1}{2}} \cos(u) du - \frac{1}{16} \int_0^{\arctan \frac{1}{2}} \sin^2(u) \cos(u) du \\ &= \frac{1}{16} \left[\sin(u) - \frac{1}{3} \sin^3(u) \right]_0^{\arctan \frac{1}{2}} \quad (\sin^2(u) \cos(u) \text{ est du type } v^2 \times v') \\ &= \frac{1}{16} \left(\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{3} \sin^3\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \right) \end{aligned}$$

Enfin, on sait que $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ d'où $\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ce qui donne

$$I = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{15\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{16} \times \frac{14}{15\sqrt{5}} = \frac{7}{8 \times 15\sqrt{5}} = \frac{7}{120\sqrt{5}} \text{ ouf!}$$

Exercice de khôlle 236

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos(t)}$ en posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Solution : L'intégrale existe (on intègre une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$), le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$du = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt = \frac{1}{2} (1 + u^2) dt \text{ d'où } dt = \frac{2du}{1 + u^2}$$

ce que l'on retrouve en écrivant que $\arctan u = \frac{t}{2}$ (car $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{4}] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

Puis $\cos(t) = \cos\left(2 \times \frac{t}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1$, mais $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2(\alpha)$ donc

$$\cos(t) = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 = \frac{2}{1 + u^2} - 1 = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

d'où

$$\frac{dt}{2 + \cos(t)} = \frac{1}{2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} = \frac{2du}{u^2+3}$$

Avec le tableau de bornes

t	0	$\frac{\pi}{4}$
u	0	1

, on obtient

$$I = \int_0^1 \frac{2du}{u^2+3} = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{u}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice de khôlle 237

On désire (sérieusement ?) calculer

$$I = \int_0^{2(\sqrt{3}-1)} \frac{dt}{\int_0^1 (tx^2+1)^2 \sqrt{1-x^2} dx}$$

1. Calculer $\varphi(t) = \int_0^1 (tx^2+1)^2 \sqrt{1-x^2} dx$ à l'aide du changement de variables $x = \sin u$.

Rappel : on a montré en exercice type que si $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u) du$ alors $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2. Puis calculer I .

Solution : Pour $t \in \mathbb{R}$ (et a fortiori dans $[0, 2(\sqrt{3}-1)]$), la fonction $x \mapsto (tx^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 (tx^2+1)^2 \sqrt{1-x^2} dx$ existe. Bref φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. Le changement de variable $u \mapsto \sin u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle (que l'on va déterminer ensuite) où u varie. On a

$$\begin{aligned} dx &= \cos(u) du \\ (tx^2+1)^2 \sqrt{1-x^2} dx &= (1+t \sin^2(u))^2 \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du \\ &= (1+t \sin^2(u))^2 |\cos u| \cos(u) du \end{aligned}$$

On détermine les nouvelles bornes

x	0	1
u	0	$\frac{\pi}{2}$

ainsi $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ d'où $\cos u \geq 0$ et

$$\begin{aligned} (tx^2+1)^2 \sqrt{1-x^2} dx &= (1+t \sin^2(u))^2 \cos^2(u) du \\ &= (1+t \sin^2(u))^2 (1-\sin^2 u) du \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\varphi(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+t \sin^2(u))^2 \cos^2(u) du$$

Mais en développant

$$\begin{aligned} (1+t \sin^2(u))^2 (1-\sin^2 u) &= (t^2 \sin^4(u) - 2t \sin^2(u) + 1) (1-\sin^2(u)) \\ &= t^2 (\sin^4(u) - \sin^6(u)) - 2t (\sin^2(u) - \sin^4(u)) + (1-\sin^2(u)) \end{aligned}$$

Pn obtient

$$\varphi(t) = (I_4 - I_6)t^4 - 2(I_2 - I_4)t + (I_0 - I_2)$$

Puisque $I_0 = \frac{\pi}{2}$, on a $I_2 = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi}{4}$, $I_4 = \frac{3I_2}{4} = \frac{3\pi}{16}$ et $I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5\pi}{32}$ d'où

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{32}t^2 + \frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}(t^2 + 4t + 8) = \frac{\pi}{32}((t+2)^2 + 4)$$

2. Puisque $\varphi(t) > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\frac{1}{\varphi}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 2(\sqrt{3}-1)]$, ainsi I existe et

$$\begin{aligned} I &= \frac{32}{\pi} \int_0^{2(\sqrt{3}-1)} \frac{dt}{(t+2)^2 + 4} = \frac{32}{\pi} \times \frac{1}{4} \int_0^{2(\sqrt{3}-1)} \frac{dt}{\left(\frac{t+2}{2}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{16}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{t+2}{2}\right) \right]_0^{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{16}{\pi} (\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1)) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 238

Soit $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

- Justifier que u_n est bien définie, calculer u_0 et u_1 .
- Donner une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Donner une autre expression de u_n en utilisant le changement de variables $t = \tan u$.

Solution :

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi u_n existe.

On a

$$u_0 = \int_0^1 dt = 1 \text{ et } u_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

- Comme on ne sait pas trop quoi faire (et que l'on ne sait pas (enfin vous) déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ dès que $n \geq 2$) on pose

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 & f(t) &= t \\ g(t) &= \frac{1}{(1+t^2)^n} = (1+t^2)^{-n} & g'(t) &= -2nt(1+t^2)^{-n-1} = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \end{aligned} \text{ , } f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1]$$

d'où

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^1 + 2n \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{(t^2+1) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n \left(\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} - \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \right) = \frac{1}{2^n} + 2n(u_n - u_{n+1}) \end{aligned}$$

d'où,

$$2nu_{n+1} = \frac{1}{2^n} + (2n-1)u_n$$

et si $n \geq 1$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)u_n$$

3. Le changement de variable $t = \tan u$ peut aussi s'écrire $u = \arctan t$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On a alors

$$\begin{aligned} du &= \frac{dt}{1+t^2} \\ \frac{dt}{(1+t^2)^n} &= \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \times \frac{dt}{1+t^2} = \frac{du}{(1+\tan^2 u)^{n-1}} = \cos^{2n-2}(u) du \end{aligned}$$

car $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$. Puis $\begin{array}{|c|c|c|} \hline t & 0 & 1 \\ \hline u & 0 & \frac{\pi}{4} \\ \hline \end{array}$ donne

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}(u) du$$

(c'est du demi-Wallis!).

Exercice de khôlle 239

Soit f définie et continue sur I montrer que

1. Si $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(a+b-t) dt$.
2. Si $(0, a) \in I^2$, $\int_0^{2a} f(t) dt = \int_0^a (f(t) + f(2a-t)) dt$.
3. Si $I = \mathbb{R}$ et si f est périodique de période T alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^{a+nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt$.
4. Si $I = [0, 1]$, $\int_0^\pi x f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x)) dx$.

Solution : Pour toutes les questions, les intégrales sont bien définies.

1. Le changement de variables $u = a + b - t$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$) donne $du = -dt$ et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+b-a}^{a+b-b} f(a+b-u) \times (-du) = \int_a^b f(a+b-u) du.$$

2. D'après Chasles, on a $\int_0^{2a} f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_a^{2a} f(t) dt$. Dans $\int_a^{2a} f(t) dt$, on pose $t = 2a - u$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$). Ainsi $dt = -du$,

$$\int_a^{2a} f(t) dt = \int_{2a-a}^{2a-2a} f(2a-u) \times (-du) = \int_0^a f(2a-u) du$$

d'où, en sommant, le résultat.

3. On a, d'après Chasles,

$$\int_a^{a+nT} f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt + \int_{a+T}^{a+2T} f(t) dt + \dots + \int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(t) dt$$

Mais dans $\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(t) dt$ le changement de variable $u = t - kT$ donne $\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(t) dt = \int_a^{a+T} f(u + kT) du$.

Par périodicité, on a $\int_a^{a+T} f(u + kT) du = \int_a^{a+T} f(u) du$. Il reste ensuite à prouver que

$$\int_a^{a+T} f(u) du = \int_0^T f(u) du$$

(résultat bien connue en physique car la valeur moyenne d'un signal périodique est la même sur une période). Pour cela, on écrit que

$$\int_a^{a+T} f(u) du = \int_a^0 f(u) du + \int_0^T f(u) du + \int_T^{a+T} f(u) du$$

Dans $\int_T^{a+T} f(u) du$, on pose $u = x + T$, ainsi $\int_T^{a+T} f(u) du = \int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(u) du$ ce qui prouve que $\int_a^{a+T} f(u) du = \int_0^T f(u) du$.

4. On pose $t = \pi - x$ ainsi ($dt = -dx$)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\sin(x)) dx &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) \times (-dt) = \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin(t)) dt \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin(t)) dt - \int_0^\pi x f(\sin(x)) dx \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^\pi x f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x)) dx.$$

Exercice de khôlle 240

Calculer $I = \int_0^1 \frac{x \arctan(\sqrt{1+2x^2})}{(x^2+1)\sqrt{1+2x^2}} dx$ en posant $u = \sqrt{1+2x^2}$.

Solution : Soit f définie par $f(x) = \frac{x \arctan(\sqrt{1+2x^2})}{(x^2+1)\sqrt{1+2x^2}}$ alors f est bien définie et continue sur $[0, 1]$, ainsi I existe. Le changement de variables est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et (avec $(\sqrt{v})' = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$)

$$du = \frac{4x}{2\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{2x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Puis $u^2 = 1 + 2x^2$ d'où $2x^2 = u^2 - 1$ d'où

$$\frac{x \arctan(\sqrt{1+2x^2})}{(x^2+1)\sqrt{1+2x^2}} dx = \frac{\arctan(\sqrt{1+2x^2})}{2x^2+2} \times \frac{2x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\arctan(u)}{u^2-1+2} du = \frac{\arctan(u)}{1+u^2} du$$

On n'oublie pas les bornes, si $x = 0$ alors $u = 1$ et si $x = 1$ alors $u = \sqrt{3}$ d'où

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan(u)}{1+u^2} du = \left[\frac{1}{2} \arctan^2(u) \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{3} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = \frac{\pi^2}{2} \times \frac{16-9}{3^2 \times 4^2} = \frac{7\pi^2}{2 \times 12^2} = \frac{7\pi^2}{288} \end{aligned}$$

6.4 Le TFA

Exercice de khôlle 241

Soit $F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F .
2. Calculer F' et en déduire F .
3. Retrouver le résultat à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Solution :

1. On pose $\varphi(t) = \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ qui est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Ainsi

$$F(x) \text{ existe} \iff x \text{ et } \frac{1}{x} \text{ sont dans }]0, +\infty[\iff x > 0$$

D'où $D_F =]0, +\infty[$.

2. Soit Φ une primitive de φ sur $]0, +\infty[$, alors

$$\forall x > 0, F(x) = \Phi\left(\frac{1}{x}\right) - \Phi(x)$$

puisque Φ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$, par composition et différence, F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \forall x > 0, F'(x) &= -\frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) - \varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{\ln x}{1+x^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x^2 \frac{x^2+1}{x^2}} - \frac{\ln x}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que F est constante égale à $F(1) = 0$.

3. Le changement de variable est bien $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ donc sur $\left[x, \frac{1}{x}\right] \cup \left[\frac{1}{x}, x\right]$. On a $t = \frac{1}{u}$ donc $dt = -\frac{du}{u^2}$ et

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \frac{-\ln(u)}{\frac{u^2+1}{u^2}} \times \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \frac{\ln u}{1+u^2} du$$

Puis

t	x	$\frac{1}{x}$
u	$\frac{1}{x}$	x

 d'où

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln u}{1+u^2} du = - \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{1+u^2} du = -F(x)$$

on retrouve bien $F(x) = 0$.

Exercice de khôlle 242

(★) Soit f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f , sa parité, sa dérivée, ses variations, sa limite en $+\infty$.
2. Soit H définie par $H(x) = x \left(f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \right)$, déterminer la limite de H en $+\infty$.
3. En déduire un équivalent de f en $+\infty$ (faisable après le cours du chapitre 7).

Solution :

1. Soit $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$, puisque pour $t \in \mathbb{R}$, $4+t^4 \geq 4$, la fonction φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$. On a $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$, le changement de variable $u = -t$ (qui est $\mathcal{C}^1$) donne

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{4+u^4}} = -f(x)$$

Ainsi f est impaire. Si Φ est une primitive de φ sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$. La dérivabilité de Φ assure celle de $x \mapsto \Phi(2x)$ puis celle de f et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{4+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} \\ &= \frac{2\sqrt{4+x^4} - \sqrt{4+16x^4}}{\sqrt{4+16x^4}\sqrt{4+x^4}} = \frac{(2\sqrt{4+x^4})^2 - (\sqrt{4+16x^4})^2}{D(x)} \\ &= \frac{12(1-x^4)}{D(x)} = \frac{12(1+x^2)}{D(x)}(1-x)(1+x) \\ \text{où } D(x) &= \sqrt{4+16x^4}\sqrt{4+x^4}(2\sqrt{4+x^4} + \sqrt{4+16x^4}) > 0 \end{aligned}$$

On en déduit les variations de f sur $[0, +\infty[$ (car elle est impaire)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$f(1)$ $\nearrow \quad \searrow$ 0 0 (voir ci dessous)		

Pour la limite en $+\infty$, on a pour $t > 0$, $\sqrt{4+t^4} \geq \sqrt{t^4} = t^2$ d'où $0 \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leq \frac{1}{t^2}$. Si $x > 0$ alors $x \leq 2x$ (bornes dans le bon sens) d'où par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} = f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $\lim_{+\infty} f(x) = 0$.

2. On a pour $x > 0$, $H(x) = x \left(f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \right)$. Or

$$\frac{1}{\sqrt{4+t^4}} - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - \sqrt{4+t^4}}{t^2\sqrt{4+t^4}} = -\frac{4}{t^2\sqrt{4+t^4}(t^2 + \sqrt{4+t^4})}$$

Ainsi

$$f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = -4 \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2\sqrt{4+t^4}(t^2 + \sqrt{4+t^4})}$$

Mais si $x > 0$, pour $t \in [x, 2x]$ on a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4} &= x^2 \leq \sqrt{4+x^4} \\ 2x^2 &\leq x^2 + \sqrt{4+x^4} \\ 2x^6 &\leq x^2\sqrt{4+x^4}(x^2 + \sqrt{4+x^4}) \leq t^2\sqrt{4+t^4}(t^2 + \sqrt{4+t^4}) \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq \frac{1}{t^2 \sqrt{4+t^4} (t^2 + \sqrt{4+t^4})} \leq \frac{1}{x^6}$$

ce qui donne (croissance de l'intégrale)

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2 \sqrt{4+t^4} (t^2 + \sqrt{4+t^4})} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{x^6} = \frac{1}{x^6} \int_x^{2x} dt = \frac{2}{x^6}$$

d'où

$$0 \leq -x \left(f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \right) \leq \frac{2}{x^5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Conclusion $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Mais puisque $\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2x}$ on en déduit que

$$f(x) - \frac{1}{2x} = \frac{H(x)}{x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x} \right) \text{ donc } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

Exercice de khôlle 243

Soit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ et F définie par $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

1. Préciser le domaine de définition de F . F présente-t-elle une parité? Etudier les variations de F , montrer que F a une limite ℓ en $+\infty$. (On ne cherchera pas à calculer la valeur des extrema de F , ni à calculer la limite)
2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, établir, pour $x \neq 0$, une relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{2x}\right)$, en déduire ℓ .
3. Donner un développement limité de F en 0 à l'ordre 1, en déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La fonction f est continue et définie sur $\mathbb{R}$, ainsi F est définie sur $\mathbb{R}$ (car f est intégrable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ donc sur $[x, 2x] \cup [2x, x]$). Le changement de variable, dans $F(x)$, $u = -t$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle d'intégration donne

$$du = -dt, \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -\frac{du}{\sqrt{1+u^4}} \text{ d'où } F(x) = -\int_{-x}^{-2x} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = -F(-x)$$

ainsi F est impaire.

Soit G une primitive f sur $\mathbb{R}$, on a $F(x) = G(2x) - G(x)$. Puisque G est dérivable, par composition $x \mapsto G(2x)$ l'est aussi et ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{2\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1+16x^4}}{\sqrt{1+16x^4}\sqrt{1+x^4}} = \frac{4(1+x^4) - (1+16x^4)}{D(x)}$$

$$\text{où } D(x) = \sqrt{1+16x^4}\sqrt{1+x^4} (2\sqrt{1+x^4} + \sqrt{1+16x^4}) > 0$$

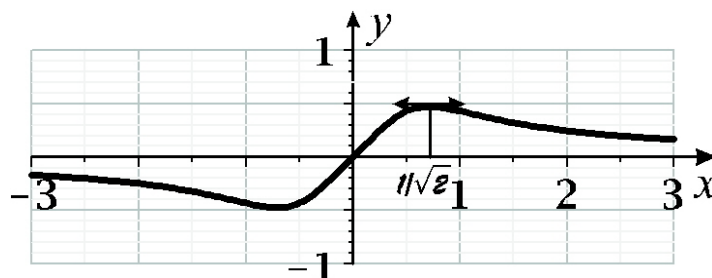
$$F'(x) = \frac{3(1-4x^4)}{D(x)} = \frac{3(1+2x^2)}{D(x)} (1+\sqrt{2}x) (1-\sqrt{2}x)$$

du signe de $1 - \sqrt{2}x$ sur $[0, +\infty[$ (par imparité, on limite l'étude)

On en déduit que f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ puis décroissante. Ainsi F a un maximum en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque pour $x \geq 0$ on a $F(x) \geq 0$ (on intègre une fonction positive et $x \leq 2x$), d'après le théorème de la limite monotone, F

a une limite en $+\infty$ (décroissante et minorée par 0).

Voici le graphe sur $\mathbb{R}$:



2. On pose ensuite $u = \frac{1}{t}$, changement de variable $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

On a alors $t = \frac{1}{u} \Rightarrow dt = -\frac{du}{u^2} \Rightarrow \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -\frac{du}{u^2\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}} = -\frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$. On détermine les nouvelles bornes.

Si $t = x$ alors $u = \frac{1}{x}$, si $t = 2x$, alors $u = \frac{1}{2x}$. On a donc

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2x}} -\frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = F\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Puisque $F(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} F(0) = 0$ (c'est la continuité de F en $u = 0$) et que $u = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que $F\left(\frac{1}{2x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (on utilise la composition des limites). Ainsi

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

3. Puisque F est dérivable en $x = 0$, elle admet un $DL_1(0)$ qui est $F(x) = F(0) + xF'(0) + o_{x \rightarrow 0}(x)$. Or $F'(0) = 1$ donc $F(x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$. On en déduit alors ($u = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$)

$$F(x) = F\left(\frac{1}{2x}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x}$$

Exercice de khôlle 244

On définit, pour $x > 0$, $f(x) = \int_0^{\ln(x)} \frac{dt}{3 \operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)}$.

- Justifier que f est définie et dérivable puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
- En déduire $f(x)$ en fonction de x .

Solution :

1. Soit $\varphi(t) = \frac{1}{3 \operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)}$, on a $3 \operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t) = 2 \operatorname{ch}(t) + (\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)) = 2 \operatorname{ch}(t) + e^t \geq 2 \operatorname{ch}(t) \geq 2$ donc φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Ainsi f est définie sur $]0, +\infty[$ (car $\ln x$ est alors défini et φ est continue sur l'intervalle d'intégration).

Si Φ est une primitive de φ sur $\mathbb{R}$ alors $\forall x > 0$

$$f(x) = \Phi(\ln(x)) - \Phi(0)$$

Puisque Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition $x \mapsto \Phi(\ln(x))$ l'est sur $]0, +\infty[$ ainsi que f . De plus

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{\varphi(\ln(x))}{x}$$

Mais $\operatorname{ch}(\ln(x)) = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} = \frac{x^2 + 1}{2x}$ et $\operatorname{sh}(\ln(x)) = \frac{x - \frac{1}{x}}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x}$ d'où

$$\varphi(\ln(x)) = \frac{1}{3 \frac{x^2 + 1}{2x} + \frac{x^2 - 1}{2x}} = \frac{x}{2x^2 + 1}$$

d'où

$$f'(x) = \frac{1}{1 + 2x^2}$$

2. On a $f(1) = 0$ donc pour $x > 0$

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(u) du = \int_1^x \frac{du}{1 + 2u^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}u \right]_1^x = \frac{\arctan(\sqrt{2}x) - \arctan(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

Exercice de khôlle 245

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{dt}{1+t+t^2+t^3}$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Simplifier f en calculant f' .

Solution : On pose $\varphi(t) = \frac{1}{1+t+t^2+t^3}$ qui est définie et continue sur $]0, +\infty[$ (en fait $(1+t) + (t^2+t^3) = (1+t) + t^2(1+t) = (1+t)(1+t^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$)

1. Si $x > 0$ alors x et $\frac{1}{x}$ sont dans $]0, +\infty[$, donc φ est continue sur l'intervalle d'intégration (qui est $[x, \frac{1}{x}] \cup [\frac{1}{x}, x]$). Ceci assure l'existence de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit Φ une primitive de φ sur $]0, +\infty[$ (il en existe d'après le TFA), alors pour $x > 0$ on a

$$f(x) = \Phi(x) - \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$$

Φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$ (aussi, car $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est et à valeurs dans $D_\Phi =]0, +\infty[$), ainsi f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Phi'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Phi'\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x+x^2+x^3} + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} + \frac{1}{x^2} \times \frac{x^3}{x^3+x^2+x+1} \\ &= \frac{1+x}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{1+x^2} \text{ (eh oui!)} \end{aligned}$$

On en déduit que sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = \arctan'(x)$, il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, f(x) = \arctan(x) + C$$

Mais avec $x = 1$, on a $f(1) = 0 = \arctan 1 + C = \frac{\pi}{4} + C$ d'où $C = -\frac{\pi}{4}$ et

$$\forall x > 0, f(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{4}$$

Remarque : on a $\frac{1}{1+t+t^2+t^3} = \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1-t}{1+t^2} \right)$ (faire une DES sur $\mathbb{C}$ et regrouper les deux termes en $\frac{a}{t+i}$ et $\frac{b}{t-i}$). Ainsi

$$\int \frac{dt}{1+t+t^2+t^3} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1-t}{1+t^2} dt$$

Mais

$$\int \frac{1-t}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$$

d'où

$$\int \frac{dt}{1+t+t^2+t^3} = \frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \arctan t - \frac{1}{4} \ln(1+t^2) + C \text{ sur } I \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

6.5 Suites et intégrales

Exercice de khôlle 246

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 .

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. À l'aide du calcul de $I_n + I_{n+1}$, déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Solution : Avant tout I_n existe bien car la fonction intégrée est définie et continue sur $[0, 1]$.

1. On a $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln 2$, $I_1 = \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x} dx = 1 - I_0 = 1 - \ln 2$, enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{x+1} dx = \int_0^1 (x-1) dx + I_0 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

2. Pour $x \in [0, 1]$, on a $1 \leq 1+x \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$. On multiplie par $x^n \geq 0$ (ce qui ne change pas le sens de l'inégalité) pour avoir

$$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens i.e. $0 \leq 1$), on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx = \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (I_{k+1} + I_k) = \sum_{k=0}^n \left((-1)^k I_{k+1} + (-1)^k I_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left((-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1} \right) \quad (\text{somme télescopique !}) \\ &= (-1)^0 I_0 - (-1)^{n+1} I_{n+1} = \ln 2 + (-1)^n I_{n+1} \end{aligned}$$

Puisque $I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$.

Exercice de khôlle 247

Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n(x) dx$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution : La question est volontairement imprécise. On commence par la monotonie. Si $n \in \mathbb{N}$ alors

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^{n+1}(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n(x) (\tan x - 1) dx$$

Si $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $x^n \geq 0$ et $0 \leq \tan x \leq \tan \frac{\pi}{4} = 1$ (croissance de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) d'où $x \tan^n(x) (\tan x - 1) \leq 0$.

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on a $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n(x) (\tan x - 1) dx \leq 0$. La suite est donc décroissante.

Puis toujours par croissance de l'intégrale, puisque, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq \tan^n x$, on en déduit que $0 \leq u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc converge. On peut estimer avoir répondu à la question. Mais la valeur de la limite nous démange...

On va faire une IPP (pas pour avoir une relation de récurrence, il y a peu d'espoir). La première idée est de dériver $\tan^n(x)$, mais (essayez) elle ne conduit à rien de bien probant. La seconde, après avoir constaté que $(\tan^n)' = n(\tan^{n-1}) \times (1 + \tan^2)$ et de considérer $u_n + u_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n(x) (1 + \tan^2 x) dx$ et de faire une IPP en dérivant x . On obtient alors

$$\begin{aligned} u'(x) &= \tan^n(x) (1 + \tan^2 x) & v(x) &= x \\ u(x) &= \frac{1}{n+1} \tan^{n+1}(x) & v'(x) &= 1 \end{aligned}, \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^n(x) (1 + \tan^2 x) dx &= \left[\frac{x \tan^{n+1}(x)}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) dx \\ &= \frac{\pi}{4(n+1)} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) dx \end{aligned}$$

Puisque sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a $0 \leq \tan x \leq 1$, on en déduit que $0 \leq \tan^n x \leq 1$ et par croissance de l'intégrale que

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi $0 \leq \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) dx \leq \frac{\pi}{4(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (et $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) permet d'affirmer que

$$u_n + u_{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Mais si $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + u_{n+2}) = 2\ell$. Par unicité de la limite $2\ell = 0$ d'où $\ell = 0$ et on peut affirmer que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque : ① Le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+2} = \ell$ provient de la notion de suite extraite (voir le chapitre sur les suites... à venir).

② En fait, de $u_n + u_{n+2} \geq 0$, on déduit que $0 \leq \frac{\pi}{4(n+1)} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) dx$ donc que

$$\frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) dx \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$$

Puisque $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) dx \geq 0$, on retrouve que $\frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice de khôlle 248

(★) Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$

1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{n,1}$ pour $p \in \mathbb{N}$.
2. Donner une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$ où $p \geq 1$.
3. En déduire $I_{n,p}$

Solution : Avant tout $I_{n,p}$ existe (on intègre un polynôme qui est bien continu).

1. On a $I_{n,0} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ et $I_{n,1} = \int_0^1 x^n (1-x) dx = \int_0^1 x^n dx - \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
2. On fait une IPP

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^n & v(x) &= (1-x)^p \\ u(x) &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} & v'(x) &= -p(1-x)^{p-1}, \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1] \text{ car } p \geq 1 \end{aligned}$$

$$I_{n,p} = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (1-x)^p \right]_0^1 + \frac{p}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{p-1} dx = \frac{p}{n+1} I_{n+1,p-1}$$

3. On a donc

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{p}{n+1} I_{n+1,p-1} = \frac{p}{n+1} \times \frac{p-1}{n+2} I_{n+2,p-2} = \frac{p}{n+1} \times \frac{p-1}{n+2} \times \frac{p-2}{n+3} I_{n+3,p-3} \\ &= \dots = \frac{p}{n+1} \times \frac{p-1}{n+2} \times \frac{p-2}{n+3} \times \dots \times \frac{2}{n+p-1} I_{n+p-1,1} \\ &= \frac{p}{n+1} \times \frac{p-1}{n+2} \times \frac{p-2}{n+3} \times \dots \times \frac{2}{n+p-1} \times \frac{1}{n+p} I_{n+p,0} \end{aligned}$$

Pour «deviner» le résultat, on remarque que dans $\frac{p-2}{n+3} I_{n+3,p-3}$, la somme des deux éléments de la fraction vaut $n+p+1$. Que le premier indice dans $I_{?,?}$ est le dénominateur de la fraction, le second indice le numérateur auquel on ôte 1. Ainsi

$$\begin{aligned} I_{n,p} &= \frac{p!}{(n+1) \dots (n+p)} I_{n+p,0} = \frac{p!n!}{(n+p)!} \frac{1}{n+p+1} \\ &= \frac{p!n!}{(n+p+1)!} = \frac{1}{(n+p+1) \binom{n+p}{p}} \end{aligned}$$

Si on veut le prouver proprement on montre par récurrence

$$\mathcal{P}(p) = \ll \forall n \in \mathbb{N}, I_{n,p} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!} \gg$$

c'est vrai si $p=0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n,0} = \frac{1}{n+1} = \frac{0!n!}{(n+0+1)!}$. Puis si c'est vrai au rang p alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{n,p+1} &= \frac{p+1}{n+1} I_{n+1,p} \stackrel{H.R_p}{=} \frac{p+1}{n+1} \times \frac{p!(n+1)!}{(n+p+2)!} = \frac{(p+1)!n!}{(n+p+1+1)!} \\ \text{car } (p+1)p! &= (p+1)! \text{ et } \frac{(n+1)!}{n+1} = n! \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(p+1)$ et termine la récurrence.

Exercice de khôlle 249

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_1^e x^2 \ln^n(x) dx$.

1. Etablir une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en déduire qu'elle converge. On note ℓ sa limite.
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis un équivalent de u_n .

Solution :

1. On intègre ensuite par parties u_n pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^2 & v(x) &= \ln^n(x) \\ u(x) &= \frac{x^3}{3} & v'(x) &= n \frac{\ln^{n-1}(x)}{x} \end{aligned} \quad , u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1, e]$$

$$\forall n \geq 1, u_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln^n(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{n}{3} x^2 \ln^{n-1}(x) dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n}{3} u_{n-1}$$

2. On a, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq x^2 \ln^n(x) \text{ et } 1 \leq e \text{ donc } 0 \leq u_n = \int_1^e x^2 \ln^n(x) dx$$

Puis

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^e x^2 \ln^n(x) (\ln(x) - 1) dx \leq 0 \text{ car sur } [1, e], x^2 \ln^n(x) (\ln(x) - 1) \leq 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc minorée par 0 et décroissante donc converge d'après le théorème de la limite monotone.

Remarque : Puisque $u_{n+1} - u_n \leq 0$, avec la relation de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{e^3}{3} - \frac{(n+1)}{3} u_n \text{ d'où } u_{n+1} - u_n = \frac{e^3}{3} - \frac{(n+1)}{3} u_n - u_n \leq 0 \\ \text{soit } \frac{e^3}{3} &\leq \frac{(n+4)}{3} u_n \text{ et ainsi } \frac{e^3}{n+4} \leq u_n \end{aligned}$$

3. Méthode ① : On a pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{e^3}{3} - \frac{n}{3} u_{n-1}$ donc

$$u_{n-1} = \frac{e^3}{n} - \frac{3u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Mais $u_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, par unicité de la limite $\ell = 0$.

Méthode ② : Si $\ell > 0$ alors $\frac{e^3}{3} - \frac{n}{3} u_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, ce qui est absurde, donc $\ell = 0$.

Méthode ③ : On écrit $u_n = \int_1^e x^3 \times \frac{\ln^n(x)}{x} dx$. Mais pour $x \in [1, e]$

$$\frac{\ln^n(x)}{x} \leq x^3 \times \frac{\ln^n(x)}{x} \leq e^3 \times \frac{\ln^n(x)}{x}$$

d'où par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens)

$$\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x} dx \leq u_n \leq e^3 \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x} dx$$

Or (c'est pour cela que l'on a utilisé $x \times \frac{1}{x} = 1$), $\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{n+1} \ln^{n+1}(x) \right]_1^e = \frac{1}{n+1}$ donc

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e^3}{n+1}$$

et par encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Enfin pour l'équivalent

$$u_n = \frac{e^3}{3(n+1)} - \frac{3}{n+1} u_{n+1} \sim \frac{e^3}{3(n+1)} \sim \frac{e^3}{3n}$$

car $\frac{3}{n+1} u_{n+1}$ est négligeable devant $\frac{e^3}{3(n+1)}$ (en effet $-\frac{3}{n+1} u_{n+1} = \frac{e^3}{3(n+1)} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right)$ où $\varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{-3}{e^3} u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

Remarque : On peut pousser le développement de u_n : on a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{e^3}{3(n+1)} - \frac{3}{n+1} u_{n+1} \\ &= \frac{e^3}{3(n+1)} - \frac{3}{n+1} \times \left(\frac{e^3}{3(n+1)} + \frac{1}{n} \varepsilon \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{e^3}{3n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - \frac{e^3}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{e^3}{3n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - \frac{e^3}{n^2} \times \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{-2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{e^3}{3n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{e^3}{n^2} \times \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{e^3}{3n} - \frac{4e^3}{3n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 250

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$.

1. Justifier l'existence de I_n et calculer I_0, I_1, I_2 .
2. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. A l'aide d'un encadrement, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. Montrer que $I_n \sim \frac{1}{3n}$.

Solution : On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$).

1. Par continuité de f_n sur $[0, 1]$, l'intégrale I_n existe. On a

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dx}{1 + \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Puis, on se dit que l'on sait calculer

$$\int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx \text{ qui vaut } [\ln(x^2 + x + 1)]_0^1 = \ln 3$$

donc $2I_1 + I_0 = \ln(3)$, ce qui donne

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{18} \pi \sqrt{3}$$

Sur la même veine,

$$I_2 + I_1 + I_0 = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 dx = 1$$

soit

$$I_2 = 1 - \frac{1}{18} \pi \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln 3$$

2. Le seul théorème de Terminale qui donne l'existence d'une limite sans la calculer est le TLM. On a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1 + x + x^2} dx$$

Mais pour $x \in [0, 1]$, $\frac{x^{n+1} - x^n}{1 + x + x^2} = \frac{x^n(x - 1)}{1 + x + x^2} \leq 0$. Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on a

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1 + x + x^2} dx = I_{n+1} - I_n \leq 0$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin, $0 \leq \frac{x^n}{1 + x + x^2}$ donc (croissance de l'intégrale), $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + x^2} dx = I_n$. La suite est décroissante, minorée (par 0) donc converge par le TLM.

3. On encadre $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x + x^2}$ sur $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$1 \leq 1 + x + x^2 \leq 3 \text{ d'où } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1 + x + x^2} \leq 1$$

puis (avec $x^n \geq 0$)

$$\frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{1 + x + x^2} \leq x^n$$

et (croissance de l'intégrale) en intégrant

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, on a $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque : Bien sûr, on peut minorer I_n par 0 et obtenir le même résultat. Mais en fait, on vient de montrer que $I_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ (un grand o).

4. Si on se souvient de l'idée pour calculer I_2 , on se dit que pour $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2} + x^{n+1} + x^n}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne

$$I_{n+2} + I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$$

Mais par monotonie de (I_n) , on a

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \text{ donc } 3I_{n+2} \leq I_{n+2} + I_{n+1} + I_n \leq 3I_n$$

ce qui donne $\frac{1}{n+1} \leq 3I_n$ et $3I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$ que l'on écrit

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \text{ et } I_{n+2} \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

La seconde inégalité est vraie, donc si $n \geq 2$, en remplaçant n par $n-2$, on obtient $I_n \leq \frac{1}{3(n-1)}$. Tadzam ! Gagné, on a

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n-1)}$$

et comme $\frac{1}{3(n+1)} \sim \frac{1}{3(n-1)} \sim \frac{1}{3n}$, on en déduit (gendarmes équivalents, donc pas des motocyclistes !) que

$$I_n \sim \frac{1}{3n}$$

Exercice sympa, mais en début de spé pour réviser tout cela !

Remarque : On peut envisager une autre approche (mais vous n'y penserez pas forcément, d'où l'intérêt de lire des corrigés). On demande de prouver que $nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$. On a $nI_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^2 + x + 1} dx$ et le nx^n fait vraiment penser à la dérivée de x^{n+1} ! Considérons plutôt $(n+1)I_n = \int_0^1 \frac{(n+1)x^n}{x^2 + x + 1} dx$ et tentons l'IPP en intégrant $(n+1)x^n$. On obtient (faites le calcul)

$$\int_0^1 \frac{(n+1)x^n}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 \frac{2x+1}{(x+x^2+1)^2} \times x^{n+1} dx$$

Merveilleux, le tiers tant désiré ! Reste juste à écrire que pour $x \in [0, 1]$ on a

$$0 \leq \frac{2x+1}{(x+x^2+1)^2} \leq 3 \text{ d'où } 0 \leq \int_0^1 \frac{2x+1}{(x+x^2+1)^2} \times x^{n+1} dx \leq \int_0^1 3x^{n+1} dx = \frac{3}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Pour conclure que $(n+1)I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$ et ainsi que $(n+1)I_n \sim \frac{1}{3}$ d'où $I_n \sim \frac{1}{3(n+1)} \sim \frac{1}{3n}$.

Exercice de khôlle 251

(★) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

1. Calculer u_0 et u_1 en posant $x = 1 - t^2$.
2. Donner une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} pour $n \geq 1$.
3. En déduire que

$$u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$$

4. Montrer alors

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+3} = \frac{4^n}{(2n+3)(2n+1) \binom{2n}{n}}$$

(Indications : poser $x = 1 - t^2$ dans u_n , un coup de binôme et quelques simplifications)

Solution :

1. On a $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[-\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$. Puis si on pose $x = 1 - t^2$ (qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc cela marche!), on a $dx = -2t dt$, pour les bornes, on choisit

x	0	1
t	1	0

ainsi $t \in [0, 1]$ et $x\sqrt{1-x} = (1-t^2) \sqrt{t^2} = (1-t^2) \times t = t - t^3$ d'où

$$x\sqrt{1-x} dx = -2t (t - t^3) dt$$

et

$$u_1 = \int_0^1 -2t (t - t^3) dt = 2 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}$$

2. Une IPP dans u_{n+1} en dérivant x^{n+1} (car $x \mapsto \sqrt{1-x}$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$) donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1-x} & f(x) &= -\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \\ g(x) &= x^{n+1} & g'(x) &= (n+1) x^n \end{aligned} \quad , \quad f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1]$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x} dx = \left[-\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \times x^{n+1} \right] - \int_0^1 -\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \times (n+1) x^n dx \\ &= \frac{2(n+1)}{3} \int_0^1 x^n (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2(n+1)}{3} \int_0^1 x^n (1-x) \sqrt{1-x} dx \\ &= \frac{2(n+1)}{3} (u_n - u_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \left(1 + \frac{2(n+1)}{3} \right) u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3} u_n \text{ soit}$$

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} u_n$$

3. Par récurrence sur n , on montre $\mathcal{P}(n) = \ll u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!} \gg$. Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{2}{3}$ et

$$\frac{2^{2 \times 0 + 3} (0+2)! 0!}{(2 \times 0 + 4)!} = \frac{8 \times 2}{4 \times 3 \times 2} = \frac{2}{3}$$

Puis si à $n \geq 0$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2n+5} u_n \text{ (relation de récurrence sur } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{)} \\ &= \frac{2(n+1)}{2n+5} \times \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!} \text{ (HR}_n\text{)} \end{aligned}$$

et on veut obtenir $\frac{2^{2(n+1)+3} (n+1+2)! (n+1)!}{(2(n+1)+4)!} = \frac{2^{2n+5} (n+3)! (n+1)!}{(2n+6)!}$. Mais

$$\begin{aligned} \frac{2(n+1)}{2n+5} \times \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!} &= \frac{2 \times 2^{2n+3} (n+2)! (n+1) \times n!}{(2n+5) (2n+4)!} \\ &= \frac{2^{2n+4} (n+2)! (n+1)!}{(2n+5)!} \\ &= \frac{2^{2n+4} (n+2)! (n+1)!}{(2n+5)!} \times \frac{2 \times (n+3)}{2n+6} \\ &= \frac{2 \times 2^{2n+4} (n+3) \times (n+2)! (n+1)!}{(2n+6) \times (2n+5)!} \\ &= \frac{2^{2n+5} (n+3)! (n+1)!}{(2n+6)!} \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui termine la récurrence.

4. Si on reprend le changement de variable $x = 1 - t^2$ dans u_n , on obtient

$$\begin{aligned} dx &= -2t dt, \quad t \in [0, 1], \quad \sqrt{1-x} = t \\ x^n \sqrt{1-x} dx &= (1-t^2)^n \times t \times (-2t dt) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \int_0^1 (1-t^2)^n t^2 dt \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+3} \end{aligned}$$

Mais $(1-t^2)^n t^2 = t^2 \times \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} t^{2k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} t^{2(k+1)}$ d'où

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} t^{2(k+1)} dt = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{2(k+1)} dt \text{ (linéarité de l'intégrale)} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left[\frac{1}{2k+3} t^{2k+3} \right]_0^1 = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+3} \text{ (on a pas du «0^0»)} \end{aligned}$$

Puis

$$u_n = \frac{2^{2n+3} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$$

donne

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2k+3} = \frac{2^{2n+2} (n+2)! n!}{(2n+4)!}$$

Il reste à vérifier que $\frac{4^n}{(2n+3)(2n+1)\binom{2n}{n}} = \frac{2^{2n+2}(n+2)!n!}{(2n+4)!}$. Mais

$$\begin{aligned} \frac{4^n}{(2n+3)(2n+1)\binom{2n}{n}} &= \frac{2^{2n}}{(2n+3)(2n+1)\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{2^{2n}n!n!}{(2n+3)(2n+1)\times(2n)!} \\ &= \frac{2^{2n}n!n!}{(2n+3)(2n+1)\times(2n)!} \times \frac{2(n+2)}{(2n+4)} \times \frac{2(n+1)}{(2n+2)} \\ &= \frac{2^2 \times 2^{2n}n! \times (n+2)(n+1)n!}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)\times(2n)!} \\ &= \frac{2^{2n+2}n! \times (n+2)!}{(2n+4)!} \end{aligned}$$

6.6 Un peu de tout

Exercice de khôlle 252

Soit $x \in \mathbb{R}$,

1. On définit $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, justifier que th est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que

$$\frac{x^2}{2} - \log(\operatorname{ch} x) = \int_0^x \left(\int_0^t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(u)} \right) du \right) dt$$

3. En déduire que $e^{\frac{x^2}{2}} \geq \operatorname{ch}(x)$ (on commencera par le prouver pour $x \geq 0$).

Solution :

1. En tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (dont le dénominateur ne s'annule pas) la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$. Un simple calcul donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$$

2. Ainsi (puisque $u \mapsto 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(u)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer)

$$\int_0^t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(u)} \right) du = t - \operatorname{th}(t)$$

puis (remarquer que th est de la forme $\frac{u'}{u}$)

$$\int_0^x (t - \operatorname{th}(t)) dt = \frac{x^2}{2} - \ln |\operatorname{ch} x| = \frac{x^2}{2} - \ln(\operatorname{ch} x) \text{ car } \operatorname{ch} x \geq 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

3. Enfin si $x \geq 0$, on a $\operatorname{ch} x \geq 1$ d'où $1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(u)} \geq 0$ et par croissance de l'intégrale, si $t \geq 0$ (ce qui est le cas si $x \geq 0$ et $t \in [0, x]$)

$$\forall t \geq 0, \int_0^t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(u)} \right) du = t - \operatorname{th}(t) \geq 0$$

Reamarque : On peut directement prouver que $t - \operatorname{th}(t) \geq 0$ et étudiant $\varphi(t) = t - \operatorname{th} t$ dont la dérivée est $\operatorname{th}^2 \geq 0$. Ainsi $\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$.

Puis (encore) par croissance de l'intégrale (si $x \geq 0$)

$$\int_0^x \left(\int_0^t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(u)} \right) du \right) dt = \int_0^x (t - \operatorname{th} t) dt \geq 0$$

On a donc, pour $x \geq 0$, $\frac{x^2}{2} - \ln(\operatorname{ch} x) \geq 0$ d'où $\frac{x^2}{2} \geq \ln(\operatorname{ch} x)$ et par croissance de $\exp$, on en déduit que

$$e^{\frac{x^2}{2}} \geq \operatorname{ch} x$$

Puis si $x \leq 0$, on a $e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{(-x)^2}{2}} \underset{-x \geq 0}{\geq} \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, l'inégalité est bien vraie sur $\mathbb{R}$.

Exercice de khôlle 253

Soit $F(X) = \frac{1}{X(X+1)}$, $G(X) = \frac{1}{X^2(X+1)}$, $H(X) = \frac{1}{X^4(X^2+1)}$ et $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos x}{\sin x} \right)^4 dx$.

1. Donner la décomposition en éléments simples de $F(X)$.
2. En déduire celles de G et H .
3. A l'aide du changement de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer I .

Solution : Avant tout I existe car $x \mapsto \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ est définie et continue sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ (le sinus ne s'annule pas, entre autre).

1. On a $F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$ où $a = 1$ et $b = -1$ (ou bien $\frac{1}{X(X+1)} = \frac{(X+1)-1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$, belge!).
2. Puis,

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{1}{X^2(X+1)} = \frac{1 - X^2 + X^2}{X^2(X+1)} = \frac{1 - X^2}{X^2(X+1)} + \frac{X^2}{X^2(X+1)} = \frac{1 - X}{X^2} + \frac{1}{X+1} \\ &= -\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X+1} \end{aligned}$$

Remarque : Ou bien on écrit que la décomposition est de la forme (ou l'examineur vous le dit)

$$G(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X+1}$$

avec $(x+1)G(x) = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ et $(x+1)G(x) = c + (x+1)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$, on a (unicité de la limite) $c = 1$.

Puis $x^2G(x) = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $x^2G(x) = b + x\left(a + \frac{cx}{x+1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} b$, on a $b = 1$.

Enfin, $G(1)$ donne $\frac{1}{2} = a + b + \frac{c}{2} = a + 1 + \frac{1}{2}$ d'où $a = -1$.

Enfin

$$H(X) = G(X^2) = -\frac{1}{X^2} + \frac{1}{X^4} + \frac{1}{X^2+1}$$

3. Le changement de variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ (il l'est sur $] -\pi, \pi[$ aussi!). On a

$$dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx$$

(ce qui est heureux car $x = 2 \arctan(t)$ d'où $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$)

Puis

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos x}{\sin x} &= \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right)} = \frac{1 + 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{t} \\ \left(\frac{1 + \cos x}{\sin x}\right)^4 dx &= \frac{1}{t^4} \times \frac{2}{1+t^2} dt = 2H(t) dt \end{aligned}$$

Pour les bornes, on a

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

Bref

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 H(t) dt = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + \arctan t \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \quad (\text{Rappel } \int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ si } \alpha \neq -1) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} - \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 254

(ENSI (ex CCINP) 1987) On désire calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{1+x^2}}$

- Justifier que $\frac{1}{\operatorname{ch}(2u)} = \frac{\operatorname{ch}(2u)}{1 + \operatorname{sh}^2(2u)}$ et en déduire les primitives de $u \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(2u)}$.
- Résoudre $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}$, on note τ la solution, calculer $\operatorname{sh}(2\tau)$.
- Calculer I en posant $x = \operatorname{sh} t$.

Solution : L'intégrale existe (la fonction $x \mapsto \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$).

- On a $1 + \operatorname{sh}^2(2u) = \operatorname{ch}^2(2u)$ d'où $\frac{1}{\operatorname{ch}(2u)} = \frac{\operatorname{ch}(2u)}{1 + \operatorname{sh}^2(2u)}$, puis

$$\int \frac{du}{\operatorname{ch}(2u)} = \frac{1}{2} \int \frac{2 \operatorname{ch}(2u)}{1 + \operatorname{sh}^2(2u)} du = \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(2u)) + C$$

- On détermine t tel que $\operatorname{sh}(t) = \frac{1}{2}$ en posant $X = e^t$ ainsi (je ne détaille pas tous les calculs) :

$$\operatorname{sh}(t) = \frac{1}{2} \iff e^t - e^{-t} = 1 \iff X - \frac{1}{X} = 1 \iff X^2 = X + 1 \iff X = \varphi \text{ ou } X = -\frac{1}{\varphi}$$

$$\text{avec } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (le nombre d'or).}$$

Puisque $X = e^t > 0$, on ne retient que $X = \varphi$ d'où $\tau = \ln(\varphi)$. Puis

$$\operatorname{sh}(2\tau) = \frac{e^{2\tau} - e^{-2\tau}}{2} = \frac{1}{2} \left(\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2} \right) \text{ car } e^{2\tau} = e^{2\ln(\varphi)} = \varphi^2$$

Simplifions $\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2}$! On a $\varphi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ d'où $\frac{1}{\varphi^2} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et ainsi

$$\operatorname{sh}(2\tau) = \frac{1}{2} \left(\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2} \right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

3. Le changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur ... l'intervalle où l'on va déterminer ensuite. On a

$$dx = \operatorname{ch} t \, dt, \quad \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{ch}(t) \, dt}{(2\operatorname{sh}^2(t) + 1)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(t)}}$$

Mais $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ d'où $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(t)} = |\operatorname{ch}(t)| = \operatorname{ch}(t)$ (car $\operatorname{ch} \geq 1 \geq 0$). Puis

$$2\operatorname{sh}^2(t) + 1 = 2\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{2} + 1 = \operatorname{ch}(2t)$$

Pour les bornes, avec la question précédente, on a (avec $\operatorname{sh} 0 = 0$)

x	0	$\frac{1}{2}$
t	0	$\ln \varphi$

d'où

$$I = \int_0^{\ln(\varphi)} \frac{dt}{\operatorname{ch}(2t)} = \left[\frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(2u)) \right]_0^{\ln(\varphi)} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

Exercice de khôlle 255

On pose $I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arctan(\sqrt{1-x^2}) \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(t)} \, dt$

1. Calculer J en posant $u = \tan t$.
2. Calculer I en posant $x = \sin t$ puis avec une IPP.

Solution : On y va ! (les fonction intégrées sont bien continue donc I et J existent)

1. Le changement de variables est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, on a

$$\begin{aligned} du &= (1 + \tan^2 t) \, dt = (1 + u^2) \, dt \text{ d'où } dt = \frac{du}{1+u^2} \text{ (ouf car } t = \arctan u) \\ \cos^2 t &= \frac{1}{1 + \tan^2 t} = \frac{1}{1 + u^2} \\ \frac{1}{1 + \cos^2(t)} \, dt &= \frac{1}{1 + \frac{1}{1+u^2}} \times \frac{du}{1+u^2} = \frac{du}{2+u^2} \end{aligned}$$

Pour les bornes, on a

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

d'où

$$J = \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} du}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2. Le changement de variables est bien $\mathcal{C}^1$ sur ... l'intervalle que l'on va choisir car il l'est sur $\mathbb{R}$. On a

$$dx = \cos(t) \, dt, \quad \arctan(\sqrt{1-x^2}) \, dx = \arctan(\sqrt{1-\sin^2 t}) \cos(t) \, dt$$

on choisit

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
t	0	$\frac{\pi}{4}$

, ainsi $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$ car $\cos \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{3}]$. Ainsi

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan(\cos(t)) \cos(t) \, dt$$

On enchaîne avec une IPP pour se débarrasser de l'arctangente

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos(t) & v(t) &= \arctan(\cos(t)) \\ u(x) &= \sin(t) & v'(x) &= \frac{-\sin(t)}{1+\cos^2(t)}, \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= [\arctan(\cos(t)) \sin(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(t)}{1+\cos^2(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(t)}{1+\cos^2(t)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2(t)}{1+\cos^2(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2-(1+\cos^2(t))}{1+\cos^2(t)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2J - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 256

Existence et calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{x^2 + \cos x}} dx$

Solution : Existence : Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $x^2 > 0$ et $\cos x \geq 0$ d'où $x^2 + \cos x > 0$. De plus en $x = 0$, $x^2 + \cos x = 1 > 0$. Ainsi $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x^2 + \cos x > 0$. On en déduit que $x \mapsto \sqrt{x^2 + \cos x}$ est définie, continue et strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Puisque $x \mapsto 2x - \sin x$ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, par quotient $x \mapsto \frac{2x - \sin x}{\sqrt{x^2 + \cos x}}$ est définie, continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc I existe.

Calcul : La dérivée de $x^2 + \cos x$ est $2x - \sin x$, on a donc une intégrale du type $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ où $u = x^2 + \cos x$. Ainsi

$$I = \left[2\sqrt{x^2 + \cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

Exercice de khôlle 257

Existence et calcul de $I = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$.

Solution : Existence : On a $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ (car $2 + 1 = 3$ et $2 \times 1 = 2$), ainsi $\forall x \in]1, 2[$, $x^2 - 3x + 2 < 0$. Par composition et passage à l'inverse, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$ est définie et continue sur $]1, 2[$, intervalle qui contient $[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}]$. Conclusion I existe.

Calcul : On passe en revue les dérivées usuelles, et on pense à $\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$.

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left((2x - 3)^2 - 1\right)$$

d'où

$$\sqrt{3x - x^2 - 2} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - (2x - 3)^2\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - (2x - 3)^2}$$

et ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}$$

Si on dérive $\arcsin(2x - 3)$, on obtient $\frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}$ d'où

$$\begin{aligned} I &= [\arcsin(2x - 3)]_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} = \arcsin\left(\frac{7}{2} - 3\right) - \arcsin\left(\frac{5}{2} - 3\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 258

Soit $F(x) = \frac{1}{(2x+1)(x^2+x+1)}$.

1. Décomposer en éléments simples F et déterminer (α, β, γ) tels que

$$F(x) = \frac{\alpha}{(x + \frac{1}{2})} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + x + 1}$$

2. En déduire $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)(x^2+x+1)}$.

3. A l'aide d'une IPP, calculer $\int_0^1 \frac{\ln(x^2+x+1)}{(2x+1)^3} dx$.

Solution :

1. Les racines de $x^2 + x + 1 = 0$ sont j et j^2 , on écrit que

$$F(x) = \frac{\frac{1}{2}}{(x + \frac{1}{2})(x - j)(x - j^2)}$$

Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $F(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{x - j} + \frac{1}{x - j^2}$. La méthode du cache donne

$$\begin{aligned} a &= \frac{\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2} - j\right)\left(-\frac{1}{2} - j^2\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} \text{ car } (x - j)(x - j^2) = x^2 + x + 1 \\ b &= \frac{\frac{1}{2}}{\left(j + \frac{1}{2}\right)(j - j^2)} \text{ et } c = \frac{\frac{1}{2}}{\left(j^2 + \frac{1}{2}\right)(j^2 - j)} = \bar{b} \end{aligned}$$

Puis $j + \frac{1}{2} = i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j - j^2 = 2i \operatorname{Im}(j) = i\sqrt{3}$ donc $b = -\frac{1}{3} = c$. Au final

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{x - j} - \frac{\frac{1}{3}}{x - j^2} = \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{(x - j^2) + (x - j)}{(x - j)(x - j^2)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \text{ car } j + j^2 = -1 \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{(x+\frac{1}{2})} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + x + 1} &= \frac{2\alpha}{2x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 + x + 1} = \frac{2\alpha(x^2 + x + 1) + (2x+1)(\beta x + \gamma)}{(2x+1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2(\alpha + \beta)x^2 + (2\alpha + \beta + 2\gamma)x + 2\alpha + \gamma}{(2x+1)(x^2 + x + 1)} \end{aligned}$$

Il suffit d'avoir

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 1 \end{cases}$$

On résout ce système pour avoir $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{2}{3}, \gamma = -\frac{1}{3}$.

2. L'intégrale existe car la fonction intégrée est bien définie et continue sur $[0, 1]$ (elle l'est sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$). On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)(x^2+x+1)} &= \int_0^1 \left(\frac{\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} \right) \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} \ln \left| x + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{3} \ln |x^2 + x + 1| \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \left(\ln \left(\frac{3}{2} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right) - \frac{1}{3} \ln(3) = \frac{\ln 3}{3} \end{aligned}$$

3. Avec

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{(2x+1)^3} & v(x) &= \ln(x^2 + x + 1) \\ u(x) &= -\frac{1}{4(2x+1)^2} & v'(x) &= \frac{2x+1}{x^2+x+1} \end{aligned}, \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, 1]$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{(2x+1)^3} dx &= \left[-\frac{\ln(x^2 + x + 1)}{4(2x+1)^2} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)(x^2+x+1)} \\ &= -\frac{\ln 3}{36} + \frac{\ln 3}{12} = \frac{\ln 3}{18} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 259

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, montrer que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$. En déduire les valeurs des deux intégrales (qui existent)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024}(x)}{\sin^{2024}(x) + \cos^{2024}(x)} dx \\ \textcircled{2} \quad J &= \int_{-1}^1 \frac{1+x^{2024}}{1+2^x} dx \end{aligned}$$

Solution : Le changement de variables $u = a + b - x$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$) donne $du = -dx$ et

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+b-a}^{a+b-b} f(a+b-u) \times (-du) = \int_a^b f(a+b-u) du.$$

Pour ②, si on pose $f(x) = \frac{\sin^{2024}(x)}{\sin^{2024}(x) + \cos^{2024}(x)}$ alors

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 0 - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin^{2024}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin^{2024}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^{2024}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos^{2024}(x)}{\cos^{2024}(x) + \sin^{2024}(x)}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024}(x)}{\sin^{2024}(x) + \cos^{2024}(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2024}(x)}{\cos^{2024}(x) + \sin^{2024}(x)} dx$$

en sommant on obtient $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024}(x) + \cos^{2024}(x)}{\sin^{2024}(x) + \cos^{2024}(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ d'où $I = \frac{\pi}{4}$.

De même pour J , on pose $g(x) = \frac{1+x^{2024}}{1+2^x}$ d'où $g(1-x) = g(-x) = \frac{1+(-x)^{2024}}{1+2^{-x}} = \frac{1+x^{2024}}{1+\frac{1}{2^x}} = 2^x g(x)$ d'où

$$J = \int_{-1}^1 \frac{1+x^{2024}}{1+2^x} dx = \int_{-1}^1 2^x \frac{1+x^{2024}}{1+2^x} dx$$

En sommant, on obtient

$$\begin{aligned} 2J &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x^{2024}}{1+2^x} + 2^x \frac{1+x^{2024}}{1+2^x} \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{1+x^{2024}}{1+2^x} \times (1+2^x) dx = \int_{-1}^1 (1+x^{2024}) dx \\ &= \left[x + \frac{x^{2025}}{2025} \right]_{-1}^1 = 2 \times \frac{2026}{2025} \text{ soit } J = \frac{2026}{2025} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 260

(★) On définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$.

1. Quel sens peut-on donner à I_n et J_n ?
2. Comparer J_n et $I_{n+1} - I_n$.
3. Montrer que la suite $(J_n)_n$ est constante puis en déduire I_n .

Solution : Rappel : Pour l'instant, $\int_0^1 f(t) dt$ est défini lorsque f est définie et continue sur $[a, b]$.

1. Si on pose $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}$ et $g_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$, les deux fonctions ne sont pas définies en 0, mais elles le sont et sont continues sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Cependant, $\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} n^2$, en effet ou bien on utilise l'équivalent $\sin(u) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} u$ (lorsque le cours a été fait), ou bien la limite usuelle $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ (qui n'est que la reformulation de l'équivalent) et en remarquant que $f_n(x) = n^2 \left(\frac{\sin nx}{nx} \right)^2 \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2$. Si on pose $f_n(0) = n^2$ alors f_n est définie, continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$. De la même manière $g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (2n+1)$ permet de prolonger g_n en 0 par continuité en posant $g_n(0) = 2n+1$ et de poser $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x) dx$.

2. On a, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\sin^2((n+1)x) - \sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$$

Avec $\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$, $\sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$ et $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$, on obtient

$$\begin{aligned} \sin^2(p) - \sin^2(q) &= (\sin p + \sin q) \times (\sin p - \sin q) \\ &= 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \times 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ &= \sin(p+q) \sin(p-q) \end{aligned}$$

d'où (en posant $p = (n+1)x$ et $q = nx$, d'où $p+q = (2n+1)x$ et $p-q = x$, on obtient que

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x) \sin(x)}{\sin^2(x)} = g_n(x) \text{ si } x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

on vérifie que $g_n(0) = 2n+1 = f_{n+1}(0) - f_n(0) = (n+1)^2 - n^2$ (vrai!). Ainsi

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], f_{n+1}(x) - f_n(x) = g_n(x)$$

En intégrant, par linéarité de l'intégration, on obtient

$$I_{n+1} - I_n = J_n$$

3. De la même manière, si $x \neq 0$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) - g_n(x) &= \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin x} \\ &= \frac{2 \cos((2n+2)x) \sin(x)}{\sin x} = 2 \cos((2n+2)x) \end{aligned}$$

et on a $g_{n+1}(0) - g_n(0) = (2n+3) - (2n+1) = 2 = 2 \times \cos((2n+2) \times 0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos((2n+2)x) dx = \left[\frac{2}{2n+2} \sin((2n+2)x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{n+1} ((\sin(n+1)\pi) - \sin(0)) = 0 \end{aligned}$$

La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante égale à $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_0(x) dx$. Mais

$$g_0(x) = \frac{\sin x}{\sin x} = 1 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g_0(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$$

d'où $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. On a donc $J_n = \frac{\pi}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $I_{n+1} = I_n + J_n = I_n + \frac{\pi}{2}$ montre que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$. On a donc $I_n = I_0 + \frac{n\pi}{2}$. Mais $f_0(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f_0(0) = 0^2 = 0$ donc $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \times dx = 0$ et

$$I_n = \frac{n\pi}{2}$$

CHAPITRE 7

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

7.1 Equivalents (et qui va loin)

Exercice de khôlle 261

Equivalent en $x = 0$ de $\frac{\sin(x) \ln(\cos x)}{x^2 \tan(x)}$.

Solution : Banal, on a $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 0$ or $\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$. Avec $u = \cos x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ on a

$$\ln(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\text{d'où } \frac{\sin(x) \ln(\cos x)}{x^2 \tan(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x \times \left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2 \times x} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice de khôlle 262

Equivalent en $x = 0$ de $\frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x \ln(1+x)}$.

Solution : On a $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u}{2}$. Or $\sqrt{\cos x} - 1 = \sqrt{1 + (\cos x - 1)} - 1$ et $u = \cos x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc

$$\sqrt{\cos x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} (\cos x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{4}$$

$$\text{d'où } \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x \ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{4}.$$

Exercice de khôlle 263

Equivalent en 0 de $\frac{\arctan x}{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}$.

Solution : On a $\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$. Or $\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{e^x-1}{2}\right)$ et $u = \frac{e^x-1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc

$$\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^x-1}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

d'où

$$\frac{\arctan x}{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2$$

Exercice de khôlle 264

Déterminer un équivalent de $\frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{-8x^2+8x+2}-2}$ au voisinage de $x = \frac{1}{2}$.

Solution : On pose $x = \frac{1}{2} + h$, alors (pour mémoire $\tan\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\cotan u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{u}$).

$$\frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{-8x^2+8x+2}-2} \underset{x=\frac{1}{2}+h}{=} -\frac{1}{2} \frac{\cotan(\pi h)}{\sqrt{1-2h^2}-1} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\pi h}}{\frac{1}{2} \times (-2h^2)} = -\frac{1}{2\pi h^3}$$

d'où

$$\frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{-8x^2+8x+2}-2} \underset{x \rightarrow \frac{1}{2}}{\sim} -\frac{1}{2\pi \left(x - \frac{1}{2}\right)^3}$$

Exercice de khôlle 265

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$.

Solution : On écrit que $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(\ln(e+x))\right)$ et on commence par déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\ln(e+x))$.

On a

$$\begin{aligned} \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \text{ d'où } \ln(\ln(e+x)) &= \ln(1+(\ln(e+x)-1)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(e+x)-1 \\ \text{car } u &= \ln(e+x)-1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Puis $\ln(e+x)-1 = \ln(e+x) - \ln(e) = \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{e}$ d'où

$$\frac{1}{x} \ln(\ln(e+x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \times \frac{x}{e} = \frac{1}{e}$$

On en déduit que $\frac{1}{x} \ln(\ln(e+x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{e}$ et par continuité de la fonction exp en $\frac{1}{e}$ que $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{e}}$.

Exercice de khôlle 266

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2-1)^{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1}}$.

Solution : On écrit que $(2x^2 - 1)^{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{4}x) - 1}} = \exp\left(\frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(\frac{\pi}{4}x) - 1}\right)$. On pose $g(x) = \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(\frac{\pi}{4}x) - 1}$ puis $x = 1 + h$ où $h \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

On a $g(1 + h) = \frac{\ln(2(1 + h)^2 - 1)}{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi h}{4}) - 1}$. On commence par le numérateur, avec $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on a

$$\begin{aligned} \ln(2(1 + h)^2 - 1) &= \ln(1 + 4h + 2h^2) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 4h + 2h^2 \text{ car } u = 4h + 2h^2 \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} 4h \text{ (plus bas degré en 0)} \end{aligned}$$

Puis avec $\tan u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi h}{4}\right) - 1 &= \frac{1 + \tan \frac{\pi h}{4}}{1 - \tan \frac{\pi h}{4}} - 1 = \frac{2 \tan \frac{\pi h}{4}}{1 - \tan \frac{\pi h}{4}} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2 \times \frac{\pi h}{4}}{1} \text{ car } u = \frac{\pi h}{4} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} 1 - \tan \frac{\pi h}{4} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Rappel : si une fonction a une limite finie non nulle en a , elle est équivalente à cette limite en a . Au final on a

$$g(1 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{4h}{\frac{\pi h}{2}} = \frac{8}{\pi}$$

et par continuité de $\exp$ en $\frac{8}{\pi}$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1)^{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{4}x) - 1}} = e^{\frac{8}{\pi}}$.

Exercice de khôlle 267

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})}$.

Solution : On écrit que $x^x = \exp(x \ln(x))$ et on pose $x = 1 + h$. Le numérateur devient $N(h) = \exp((1 + h) \ln(1 + h)) - 1$.
1. Puisque $u = (1 + h) \ln(1 + h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ on a (avec $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$)

$$N(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} (1 + h) \ln(1 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h \text{ car } 1 + h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 1 \text{ (plus bas degré) et } \ln(1 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$$

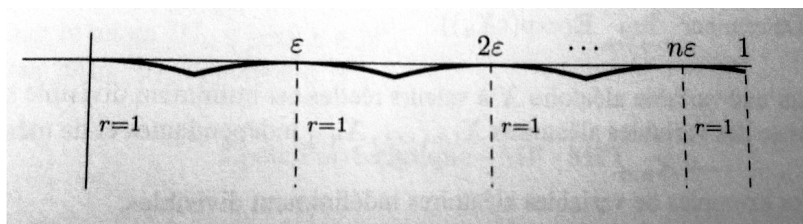
Le dénominateur devient $D(h) = \ln\left(1 + \sqrt{(1 + h)^2 - 1}\right) = \ln(1 + \sqrt{h^2 + 2h})$. Puisque $u = h^2 + 2h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ on a

$$\ln(1 + \sqrt{h^2 + 2h}) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{h^2 + 2h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2h} \text{ car } h^2 + 2h \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 2h$$

Conclusion $\frac{N(h)}{D(h)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h}{\sqrt{2h}} = \frac{\sqrt{h}}{2}$ et ainsi $\frac{x^x - 1}{\ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\sqrt{x - 1}}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

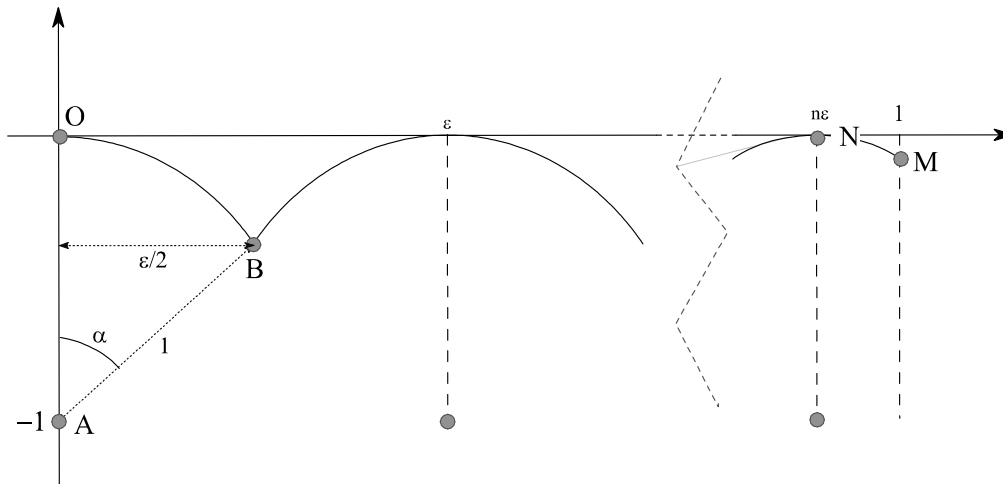
Exercice de khôlle 268

Soit $\varepsilon \in]0; 1[$ et $n(\varepsilon)$ le plus grand entier naturel tel que $n(\varepsilon) \times \varepsilon \leq 1$. On trace les cercles de rayon 1 et de centres $(k\varepsilon, -1)$ pour $0 \leq k \leq n$. Donner la limite de la somme des longueurs des arcs de cercle (voir figure) quand ε tend vers 0.



a alors

d'où $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n(\varepsilon) \varepsilon = 1$, ce qui prouve que $n(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\varepsilon}$.



$\hat{OB}$ (et $\ell(NM)$ celle de $\hat{NM}$). On a $\ell(NM) < 2\ell(OB)$ ainsi

Mais

On a donc $\ell(OB) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2}$ et $n(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\varepsilon}$, ainsi $2n(\varepsilon)\ell(OB) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} 1$ d'où $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2n(\varepsilon)\ell(OB) = 1$. Par encadrement (puisque $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\ell(OB) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\arcsin \frac{\varepsilon}{2} = 0$), on en déduit que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon) = 0$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x))^{x^2} - 1}{\tan^4(x)}$.

(car $\cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et par continuité de $\ln$ en 1, $\ln(\cos x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 1 = 0$). Ainsi avec $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} u$, on obtient

$$\text{Enfin } \ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos(x) - 1)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \text{ (car } \ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \text{ et ici } u = \cos(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0).$$

On en déduit que $x^2 \ln(\cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{2}$ ce qui donne

$$e^{x^2 \ln(\cos x)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{2}$$

Conclusion $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x))^{x^2} - 1}{\tan^4(x)} = -\frac{1}{2}.$

7.2 Prolongement par continuité, position par rapport à la tangente

Exercice de khôlle 270

Soit $f(x) = \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2}$, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, prolonger f en $x = 0$ et placer la courbe par rapport à la tangente.

Solution : On a un x^2 au dénominateur, on fait donc un $DL_4(0)$ du numérateur. On a

$$\begin{aligned} xe^x &= x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ xe^x - \ln(1+x) &= \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} \right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ f(x) &= \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{5}{12}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

On pose alors $f(x) = \frac{3}{2}$, ainsi f devient continue, dérivable en 0 avec $f'(x) = \frac{1}{6}$. L'équation de la tangente en $x = 0$ est $y_T(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x$. Puisque $f(x) - \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x = \frac{5}{12}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{5}{12}x^2 \geq 0$, la courbe est localement située au dessus de sa tangente en $x = 0$.

Exercice de khôlle 271

Soit $f_k(x) = \frac{\sin(x) - kx\sqrt{1+x}}{x}$.

- Donner un $DL_4(0)$ de $\sin(x) - kx\sqrt{1+x}$.
- Montrer que f_k est prolongeable en 0 et placer la courbe par rapport à sa tangente en fonction de k .

Solution :

- On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ donc

$$\begin{aligned} kx\sqrt{1+x} &= kx + \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{8}x^3 + \frac{k}{16}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ \sin(x) - kx\sqrt{1+x} &= (1-k)x - \frac{1}{2}kx^2 + \left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{6} \right)x^3 - \frac{1}{16}kx^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \end{aligned}$$

- On en déduit

$$f_k(x) = (1-k) - \frac{1}{2}kx + \left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{6} \right)x^2 - \frac{1}{16}kx^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

On pose $f_k(0) = 1-k$, ainsi f_k devient continue et dérivable en 0 avec $f'_k(0) = -\frac{k}{2}$. L'équation de la tangente en $x = 0$ est

$$y_T(x) = (1-k) - \frac{1}{2}kx$$

Puisque $f_k(x) - (1-k) - \frac{1}{2}kx = \left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{6}\right)x^2 - \frac{1}{16}kx^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$, on a deux cas :

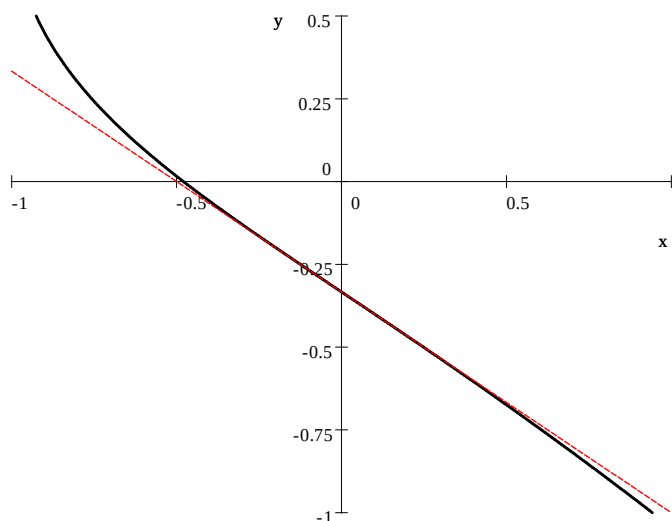
Cas ① : $\left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{6}\right) \neq 0$ i.e. $k \neq \frac{4}{3}$ alors $f_k(x) - y_T(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{6}\right)x^2$

Si $k > \frac{4}{3}$, on a $\left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{6}\right)x^2 \geq 0$, la courbe est localement au dessus de sa tangente.

Si $k < \frac{4}{3}$, on a $\left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{6}\right)x^2 \leq 0$, la courbe est localement en dessous de sa tangente.

Cas ② : $\left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{6}\right) = 0$ i.e. $k = \frac{4}{3}$ alors $f_k(x) - y_T(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{12}x^3$ qui change de signe. La courbe traverse sa tangente, il y a inflexion. La courbe est au dessus de sa tangente au voisinage de 0^- , en dessous au voisinage de 0^+ .

Voici dans ce cas l'allure locale (en noir le graphe de $f_{\frac{4}{3}}$)



Exercice de khôlle 272

Pour tout paramètre réel k , on définit la fonction h_k par

$$h_k(x) = k\sqrt{1-x+x^2} + \frac{x}{1+x^2}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de h_k ?
2. Calculer les $DL_3(0)$ de $\sqrt{1-x+x^2}$ et de $\frac{x}{1+x^2}$ et en déduire le $DL_3(0)$ de $h_k(x)$.
3. On appelle T_k la droite tangente en $x=0$ à $\mathcal{C}_k$, graphe de h_k . Existe-t-il une valeur de k pour laquelle $x=0$ soit un point d'inflexion pour h_k (i.e la courbe $\mathcal{C}_k$ est «traversée» par T_k en ce point) ? Si oui, donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_k$ au voisinage de $x=1$ pour cette valeur de k .

Solution :

1. Puisque $1-x+x^2$ n'a pas de racine réelle et que $1+x^2 \geq 1$, on a $D_{h_k} = \mathbb{R}$.

2. On sait que $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o_{u \rightarrow 0}(u^3)$ donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x+x^2} &= 1 + \frac{1}{2}(-x+x^2) - \frac{1}{8}(-x+x^2)^2 + \frac{1}{16}(-x+x^2)^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-x+x^2) - \frac{1}{8}(x^2-2x^3) + \frac{1}{16}(-x^3) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\end{aligned}$$

Et le plus simple : $\frac{x}{1+x^2} = x \times \left(1 - x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) = x - x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$.

On a donc

$$\begin{aligned}h_k(x) &= k \sqrt{1-x+x^2} + \frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + k \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= k + \left(1 - \frac{k}{2}\right)x + \frac{3}{8}kx^2 + \left(\frac{3}{16}k - 1\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\end{aligned}$$

3. La fonction est parfaitement définie et dérivable en 0. Puisque l'on a un DL à l'ordre 3, on l'a à l'ordre 1 et on en déduit que l'équation de T_k est

$$y = k + \left(1 - \frac{k}{2}\right)x$$

On a

$$h_k(x) - \left(k + \left(1 - \frac{k}{2}\right)x\right) = \frac{3}{8}kx^2 + \left(\frac{3}{16}k - 1\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

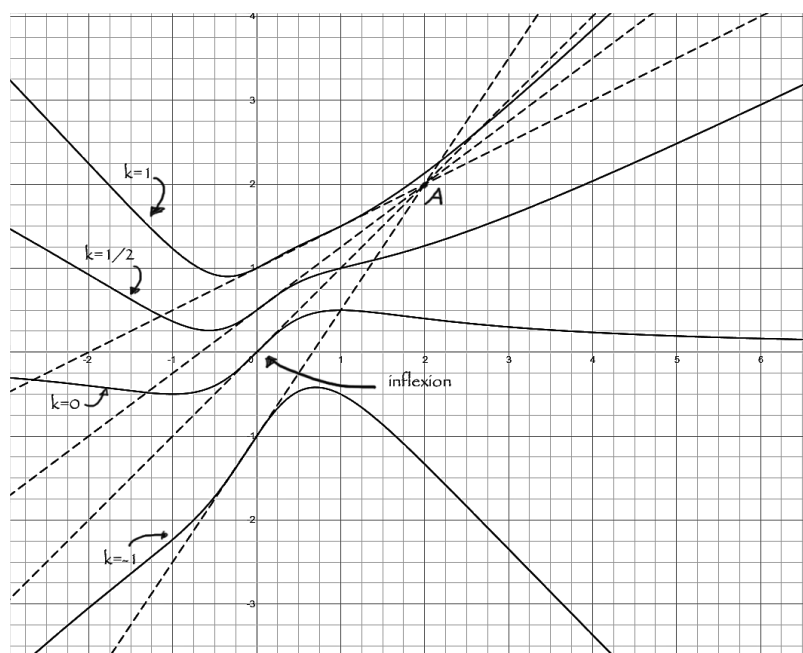
donc

$$h_k(x) - \left(k + \left(1 - \frac{k}{2}\right)x\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{8}kx^2 \text{ si } k \neq 0, \text{ la courbe est localement au dessus de la tangente}$$

et si $k = 0$,

$$h_0(x) - \left(0 + \left(1 - \frac{0}{2}\right)x\right) = h_0(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^3$$

qui change de signe, donc il y a une inflexion. Pour être précis, la courbe est au dessus de sa tangente au voisinage de 0^- et au dessous au voisinage de 0^+ . Voici un petit dessin avec quelques graphes de h_k et la tangente à l'origine.



On peut remarquer que les droites $(T_k)_{k \in \mathbb{R}}$ sont concourantes. Pour le prouver on travaille par analyse-synthèse. Analyse : soit A de coordonnées (x, y) le point commun à toutes les tangentes T_k (en supposant qu'il existe).

Alors $A \in T_0$ et $A \in T_2$. Ses coordonnées vérifient donc $\begin{cases} y = x \\ y = 2 \end{cases}$

Synthèse : on vérifie que le point $A = (2, 2)$ est sur T_k , i.e. que $2 = k + \left(1 - \frac{k}{2}\right) \times 2$.

Exercice de khôlle 273

Pour $k \in \mathbb{R}$, on définit pour $x > -1$, $f_k(x) = \ln(1+x) - ke^x$. On note T_k la tangente en $x = 0$ à $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k .

1. Donner le $DL_3(0)$ de f_k .
2. Préciser une équation de T_k . Montrer que les droites T_k passent toutes par un même point dont on précisera les coordonnées.
3. Discuter, en fonction de k , les positions relatives de $\mathcal{C}_k$ et T_k . Récapituler les résultats sur un (ou plusieurs) schéma(s).

Solution : Il est évident que f_k est bien définie, dérivable et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.

1. On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ et $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ ainsi

$$f_k(x) = -k + (1-k)x + \left(-\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{6}k + \frac{1}{3}\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

2. Puisque f_k a un $DL_1(0)$, une équation de la tangente est

$$y = -k + (1-k)x$$

On cherche ensuite le point d'intersection de T_0 et de T_1 en résolvant le système $\begin{cases} y = x \\ y = -1 \end{cases}$ ainsi $A = T_0 \cap T_1$ a pour coordonnées $(-1, -1)$. On vérifie ensuite que $A \in T_k$ pour tout $k \in \mathbb{R}$, ce qui est vrai car $-1 = -k - (1-k)$. Conclusion, toutes les tangentes passent par A .

3. On a

$$f_k(x) - (-k + (1-k)x) = -\frac{1}{2}(k+1)x^2 + \left(-\frac{1}{6}k + \frac{1}{3}\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

Si $k \neq -1$ on obtient

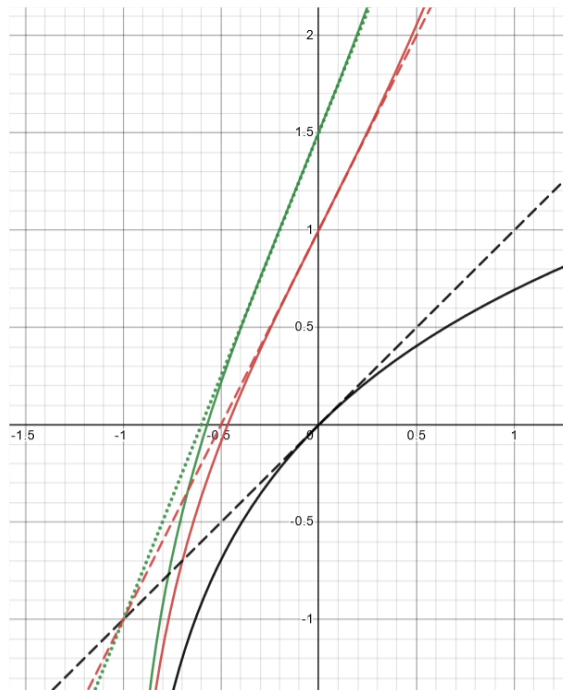
$$f_k(x) - (-k + (1-k)x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}(k+1)x^2 \text{ qui est } \begin{cases} \leq 0 & \text{si } k > -1 \\ \geq 0 & \text{si } k < -1 \end{cases}$$

Ainsi pour $k < -1$, $\mathcal{C}_k$ est localement au-dessus de T_k ; pour $k > -1$, $\mathcal{C}_k$ est localement en-dessous de T_k . Si $k = -1$, on obtient

$$f_k(x) - (-k + (1-k)x) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{2} \text{ qui est } \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \leq 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, pour $x \geq 0$, $\mathcal{C}_k$ est localement au-dessus de T_{-1} alors que pour $x \leq 0$, $\mathcal{C}_k$ est localement en-dessous de T_{-1} . La courbe traverse la tangente, il y a inflexion. Le schéma suivant correspond aux valeurs $k = -\frac{3}{2}$ (vert),

$k = -1$ (rouge) et $k = 0$ (noir).



7.3 Calculs de DL et applications

Exercice de khôlle 274

Déterminer le $DL_2(1)$ de $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Solution : On pose $x = 1 + h$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= \frac{\ln(1+h)}{\sqrt{1+h}} = \ln(1+h) \times (1+h)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(h - \frac{1}{2}h^2\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2\right) + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= \left(h - \frac{1}{2}h^2\right) - \frac{h}{2} \times h + o_{h \rightarrow 0}(h^2) = h - h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= (x-1) - (x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 275

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{4} - \arctan x} + \frac{2}{x-1} \right)$

Solution : On pose $x = 1 + h$, on est alors amené à calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{4} - \arctan(1+h)} + \frac{2}{h} \right)$. On a

$$\frac{1}{\frac{\pi}{4} - \arctan(1+h)} + \frac{2}{h} = \frac{h + 2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan(1+h) \right)}{h \left(\frac{\pi}{4} - \arctan(1+h) \right)}$$

On va donc chercher un équivalent du numérateur et du dénominateur en calculant un $DL_2(0)$ de $\arctan(1+h)$ (on prend l'ordre 2 car on devine que $\frac{\pi}{4} - \arctan(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h}{2}$!). Pour cela, on va utiliser le théorème de primitivation des DL.

La fonction f définie par $f(h) = \arctan(1+h)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée égale à $f'(h) = \frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2+2h+h^2}$. On a

$$\frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(h + \frac{h^2}{2} \right)} \underset{u=h+\frac{h^2}{2}}{=} \underset{h \rightarrow 0}{\frac{1}{2}} \times \left(1 - \left(h + \frac{h^2}{2} \right) + o_{h \rightarrow 0}(h) \right) = \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \arctan(1+h) &= f(0) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ \frac{\pi}{4} - \arctan(1+h) &= -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{h}{2} \\ h + 2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan(1+h) \right) &= h + 2 \left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} \right) + o_{h \rightarrow 0}(h^2) = \frac{h^2}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\frac{\pi}{4} - \arctan(1+h)} - \frac{2}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{h^2}{2}}{h \times \left(-\frac{h}{2} \right)} = -1$$

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\frac{\pi}{4} - \arctan x} + \frac{2}{x-1} \right) = -1$$

Exercice de khôlle 276

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

Solution : On cherche un équivalent du numérateur et du dénominateur. On a

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \text{ d'où } x \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ \text{et ainsi } x \ln(1+x) - x^2 &= -\frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+u} &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o_{u \rightarrow 0}(u^3) \\
 \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \text{ et } \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\
 \sqrt{1+\tan x} &= 1 + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right)}{2} - \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2}{8} + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3}{16} + o_{u \rightarrow 0}(x^3) \\
 &= 1 + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3}\right)}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o_{u \rightarrow 0}(x^3) \\
 &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{11}{48}x^3 + o_{u \rightarrow 0}(x^3) \text{ car } \frac{1}{6} + \frac{1}{16} = \frac{11}{48} \\
 \sqrt{1+\sin x} &= 1 + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{2} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{8} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{16} + o_{u \rightarrow 0}(x^3) \\
 &= 1 + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o_{u \rightarrow 0}(x^3) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o_{u \rightarrow 0}(x^3) \text{ car } -\frac{1}{12} + \frac{1}{16} = -\frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x} = \frac{1}{4}x^3 + o_{u \rightarrow 0}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4}x^3 \text{ car } 48 = 4 \times 12$$

On en déduit que $\frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} = -\frac{1}{2}$

Exercice de khôlle 277

Déterminer le $DL_2(1)$ de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x - e}$. Prolonger alors par dérivabilité f en $x = 1$ (et placer la courbe par rapport à sa tangente).

Solution : On pose $x = 1 + h$,

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 1}{e^x - e} &= \frac{(1+h)^2 - 1}{e^{1+h} - e} \\
 &= \frac{1}{e} (2+h) \frac{h}{e^h - 1} \\
 &= \frac{1}{e} (2+h) \frac{h}{1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} - 1 + o_{h \rightarrow 0}(h^3)} \\
 &= \frac{1}{e} (2+h) \frac{1}{1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + o_{h \rightarrow 0}(h^2)}
 \end{aligned}$$

Avec $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + o_{h \rightarrow 0}(h^2)} &= 1 - \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{6}\right) + \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{6}\right)^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{12}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)
 \end{aligned}$$

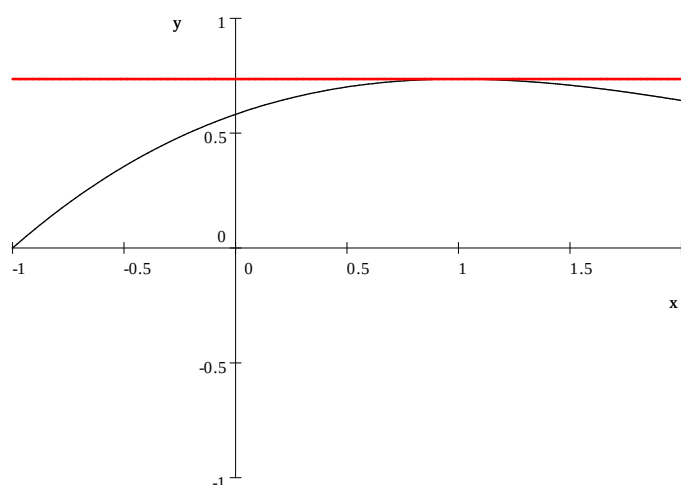
d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{(1+h)^2 - 1}{e^{1+h} - e} &= \frac{1}{e} (2+h) \left(1 - \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} \right) + \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} \right)^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \right) \\
 &= \frac{1}{e} (2+h) \left(1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{12}h^2 \right) + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\
 &= \frac{2}{e} - \frac{1}{3e}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)
 \end{aligned}$$

On revient en x

$$\frac{x^2 - 1}{e^x - e} = \frac{2}{e} - \frac{1}{3e}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$$

Si on pose $f(1) = \frac{2}{e}$ alors f est continue, dérivable en $x = 1$ avec $f'(1) = 0$. L'équation de la tangente en $x = 1$ est alors $y = \frac{2}{e}$ (tangente horizontale). Puisque $f(x) - \frac{2}{e} = -\frac{1}{3e}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{1}{3e}(x-1)^2 \leq 0$, la courbe est localement sous sa tangente en $x = 1$. Voici l'allure



Exercice de khôlle 278

On veut déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e^x - \frac{a+bx}{1+cx} = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ où n est le plus grand possible.

- Justifier que $e^x - \frac{a+bx}{1+cx} = o_{x \rightarrow 0}(x^n) \iff (1+cx)e^x - (a+bx) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.
- Calculer le $DL_3(0)$ de $(1+cx)e^x - (a+bx)$.
- Déterminer alors n puis un équivalent de $e^x - \frac{a+bx}{1+cx}$ (on dit que l'on a calculé l'approximant de Padé $[1, 1]$ de $\exp$).

Solution :

- $e^x - \frac{a+bx}{1+cx} = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ signifie que $e^x - \frac{a+bx}{1+cx} = x^n \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 e^x - \frac{a+bx}{1+cx} &= x^n \varepsilon(x) \iff (1+cx)e^x - (a+bx) = x^n (1+cx) \varepsilon(x) \iff (1+cx)e^x - (a+bx) = o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\
 &\text{car } (1+cx) \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}(1+cx)e^x - (a+bx) &= (1+cx)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) - (a+bx) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= (-a+1) + (-b+c+1)x + \left(c+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{6}\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\end{aligned}$$

3. Pour avoir n le plus grand possible, on annule les termes de degré 0, 1 et 2. On résout donc le système

$$\begin{cases} -a+1=0 \\ -b+c+1=0 \\ c+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$$

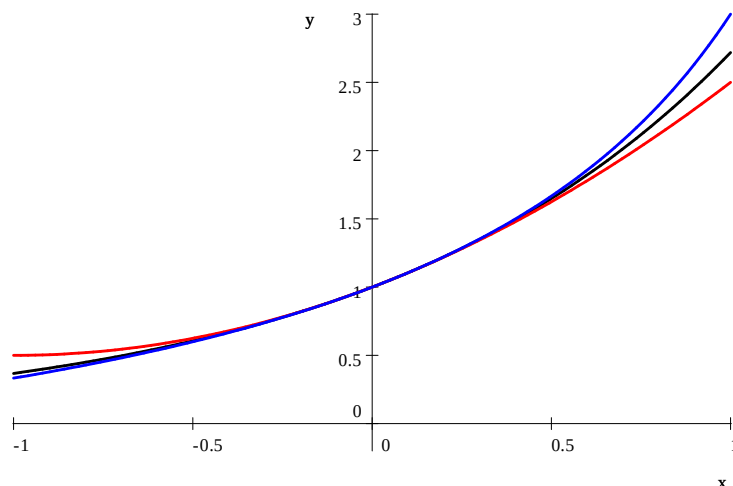
dont la solution (évidente) est $a=1, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}$. On a alors

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)e^x - \left(1+\frac{x}{2}\right) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

et

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^x - \left(1+\frac{x}{2}\right) &= -\frac{1}{12}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{12}x^3 \\ \text{soit } e^x - \frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} &= \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)e^x - \left(1+\frac{x}{2}\right)}{1-\frac{x}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{12}x^3\end{aligned}$$

Si on trace les graphes de $\exp$ (en noir), de $x \mapsto 1+x+\frac{x^2}{2}$ (en rouge) et de $x \mapsto \frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2+x}{2-x}$ (en bleu), on constate que le Padé est une meilleure approximation.



Remarque : Henri Eugène Padé est né à Abbeville le 17 décembre 1863. Il fait ses études à Abbeville, Lille (où il obtient son baccalauréat) puis au lycée St Louis à Paris. Il est admis à l'Ecole Normale en 1883 (ainsi qu'à l'X). Il enseigne les Mathématiques Élémentaires à Limoges, Carcassonne, Montpellier avant de partir étudier à Göttingen en 1890 où ses professeurs sont Felix Klein¹ et Hermann Schwarz) Il revient en France, est nommé à Poitiers, puis à Lyon. Il soutient sa thèse «Sur les représentations approchées d'une fonction par des fractions rationnelles» en 1892. D'octobre 1893 à janvier 1897, il est professeur au **Lycée Faiderbe de Lille** où il est très apprécié, il est ensuite chargé de conférences à la Faculté des Sciences de Lille et est nommé Maître

¹Padé traduit à cette occasion le programme d'Erlangen en français.

de Conférences en remplacement d'Emile Borel. Il est ensuite affecté successivement à Poitiers (Professeur de Mécaniques à la Faculté), Bordeaux (Doyen), Besançon, Dijon, Aix (Recteur). Il décède le 31 décembre 1933. Sa carrière est jalonnée de prix et de récompenses mathématiques.

Il faut signaler que Euler avait découvert les approximants de Padé dès 1751, mais n'en avait compris ni l'importance ni les propriétés essentielles.



Exercice de khôlle 279

Déterminer $p \in \mathbb{R}$ tel que $x^p (\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt[3]{x})$ ait une limite finie non nulle quand x tend vers $+\infty$. Calculer alors cette limite.

Solution : On a $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} - 2 \right)$. On pose $h = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et on fait un DL en $h = 0$ de

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+h} + \sqrt[3]{1-h} - 2 &= (1+h)^{\frac{1}{3}} + (1-h)^{\frac{1}{3}} - 2 \\ &= 1 + \frac{1}{3}h + \frac{\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3} - 1)}{2}h^2 + 1 - \frac{1}{3}h + \frac{\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3} - 1)}{2}h^2 - 2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= -\frac{2}{9}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt[3]{x} = -\frac{2}{9}x^{\frac{1}{3}-2} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

donc $p = \frac{5}{3}$ et la limite est $-\frac{2}{9}$.

Exercice de khôlle 280

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $f \leq g$. On suppose que

$$\exists a \in \mathbb{R}, f(a) = g(a)$$

montrer que les courbes représentatives de f et g ont même tangente en $x = a$.

Solution : Puisque $f(a) = g(a)$, cela revient à montrer que $f'(a) = g'(a)$. En tant que fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $h = g - f$ admet un DL₁(a)

$$h(x) = h(a) + (x-a)h'(a) + o_{x \rightarrow a}(x-a) = (g'(a) - f'(a))(x-a) + o_{x \rightarrow a}(x-a)$$

Si $f'(a) \neq g'(a)$ alors

$$g(x) - f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g'(a) - f'(a))(x - a)$$

qui change de signe au voisinage de a , ce qui est impossible car $h = g - f \geq 0$.

Exercice de khôlle 281

(★) Donner le développement limité à l'ordre $n + 1$ en 0 de $f(x) = \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$.

Solution : Quelques secondes suffisent pour se convaincre qu'utiliser $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \dots + o_{x \rightarrow 0}(u^n)$ ne permet pas d'aboutir.

Le seul moyen de «dégager» le logarithme consiste à dériver. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on va chercher un développement limité à l'ordre n de f' . On a facilement

$$f'(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} \text{ où } P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{P_n(x) - \frac{x^n}{n!}}{P_n(x)} = 1 - \frac{x^n}{n!} \times \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}$$

On fait alors un développement limité de $\frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}$ à l'ordre 1 (car en multipliant par x^n , on gagne n degrés).

$$f'(x) = 1 - \frac{x^n}{n!} \times 1 + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

En intégrant (sans oublier que $f(0) = 0$)

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque : Il y a un rapport évident avec e^x , comment l'exploiter ? Si on pose $g(x) = e^x - P_n(x)$, on a $f(x) = \ln(e^x - g(x)) = \ln(e^x \times (1 - g(x)e^{-x})) = x + \ln(1 - g(x)e^{-x})$. On sait que $g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$ donc par un produit de développement limité

$$\begin{aligned} g(x)e^{-x} &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x + \ln(1 - g(x)e^{-x}) &= x + \ln \left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \right) \\ &= x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 282

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$ et pour $p \in \mathbb{N}$, on note $S_p = \sum_{k=0}^n k^p$.

1. Que valent S_0 et S_1 ?

2. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{e^{(n+1)x} - 1}{x}$.

3. Justifier que le DL à l'ordre 3 de f est

$$f(x) = S_0 + S_1x + S_2x^2 + S_3x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

Et donner le DL à l'ordre 3 de

$$\frac{e^x - 1}{x} \times f(x)$$

(Indication : $\sum_{k=0}^n q^k = ?$)

4. En écrivant que $\frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} \times f(x)$, déterminer S_2 et S_3 .

Solution :

1. Cours, $S_0 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$, $S_1 = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. On sait que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o_{u \rightarrow 0}(u^4)$ donc avec $u = (n+1)x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} = (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2}x + \frac{(n+1)^3}{6}x^2 + \frac{(n+1)^4}{24}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

3. On lit l'indication (argh ! cette fichue formule !), pour en déduire que

$$\text{Si } x \neq 0, \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^n (e^x)^k = \sum_{k=0}^n e^{kx}$$

Avec le DL₃(0), $e^{kx} = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{kx} &= \sum_{k=0}^n \left(1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{6} \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad (\text{car on peut sommer des DL, ici } n \text{ est fixé}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) + \left(\sum_{k=0}^n k \right) x + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) x^2 + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= S_0 + S_1x + \frac{S_2}{2}x^2 + \frac{S_3}{6}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \end{aligned}$$

Puis avec $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ et un produit de DL, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{x} \times f(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right) \times \left(S_0 + S_1x + \frac{S_2}{2}x^2 + \frac{S_3}{6}x^3 \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= S_0 + \left(S_1 + \frac{S_0}{2} \right) x + \left(\frac{S_2}{2} + \frac{S_1}{2} + \frac{S_0}{6} \right) x^2 + \left(\frac{S_3}{6} + \frac{S_2}{4} + \frac{S_1}{6} + \frac{S_0}{24} \right) x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \end{aligned}$$

4. Par unicité du $DL_3(0)$, les deux DL

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1}{x} \times f(x) &= S_0 + \left(S_1 + \frac{S_0}{2}\right)x + \left(\frac{S_2}{2} + \frac{S_1}{2} + \frac{S_0}{6}\right)x^2 + \left(\frac{S_3}{6} + \frac{S_2}{4} + \frac{S_1}{6} + \frac{S_0}{24}\right)x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ \frac{e^{(n+1)x} - 1}{x} &= (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2}x + \frac{(n+1)^3}{6}x^2 + \frac{(n+1)^4}{24}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\end{aligned}$$

ont les mêmes coefficients. On en déduit que

$$\begin{cases} S_0 = n+1 \\ S_1 + \frac{S_0}{2} = \frac{(n+1)^2}{2} \\ \frac{S_2}{2} + \frac{S_1}{2} + \frac{S_0}{6} = \frac{(n+1)^3}{6} \\ \frac{S_3}{6} + \frac{S_2}{4} + \frac{S_1}{6} + \frac{S_0}{24} = \frac{(n+1)^4}{24} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}S_2 &= 2 \times \left(\frac{(n+1)^3}{6} - \frac{n(n+1)}{4} - \frac{n+1}{6} \right) \\ &= (n+1) \times \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{3} - \frac{n}{2} \right) = (n+1) \times \left(\frac{n^2 + 2n - n}{3} - \frac{n}{2} \right) \\ &= (n+1) \times n \times \left(\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (ouf)} \\ S_3 &= 6 \times \left(\frac{(n+1)^4}{24} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{n(n+1)}{12} - \frac{n+1}{24} \right) \\ &= \frac{6 \times (n+1)}{24} \times \left((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1 \right) \\ &= \frac{6 \times (n+1)}{24} \times \left((n+1)^3 - n(2n+1) - (2n+1) \right) \\ &= \frac{6 \times (n+1)}{24} \times \left((n+1)^3 - (2n+1)(n+1) \right) \\ &= \frac{6 \times (n+1)^2}{24} \times \left((n+1)^2 - 2n - 1 \right) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 283

(★) Soit f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}\right)$, montrer que $f^{(2023)}(0) = 0$.

Solution : La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$ qui est un voisinage de 0. La formule de Taylor nous dit que le $DL_{1729}(0)$ de f est de la forme

$$\sum_{k=0}^{2023} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^{1729})$$

En particulier le coefficient de x^{2023} vaut $\frac{f^{(2023)}(0)}{2023!}$ et il s'agit donc de montrer que ce coefficient est nul.

On a $f(x) = \ln\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) = \ln\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x^2}\right)$ (il est parfois utile de connaître la factorisation

de $x^3 - 1 \dots$). Ainsi $f(x) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x^2)$ car $1 - x^3$ et $1 - x^2$ sont positifs au voisinage de 0. On utilise alors le $DL_n(0)$ de $\ln(1 - u)$ qui est

$$\ln(1 - u) = - \sum_{k=1}^n \frac{u^k}{k} + o_{x \rightarrow 0}(u^n)$$

d'où

$$\ln(1 - x^3) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^{3k}}{k} + o_{x \rightarrow 0}(x^{3n}) \text{ et } \ln(1 - x^2) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{k} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$$

On obtient donc les DL_n

$$\begin{aligned} \ln(1 - x^3) &= \sum_{k=1}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \text{ où } a_k = \begin{cases} -\frac{1}{p} = -\frac{3}{k} & \text{si } k = 3p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \ln(1 - x^2) &= \sum_{k=1}^n b_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \text{ où } b_k = \begin{cases} -\frac{1}{\ell} = -\frac{2}{k} & \text{si } k = 2\ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{et } f(x) &= \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \end{aligned}$$

Puisque 2023 est impair non multiple de 3 (car $2+2+3=7$), on en déduit que $a_{2023} = b_{2023} = 0$ et ainsi $f^{(2023)}(0) = 0$.

Exercice de khôlle 284

En calculant de deux façons le développement limité à l'ordre n de $f(x) = (e^x - 1)^n$, montrer que pour $0 \leq p \leq n$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^p}{p!} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ 1 & \text{si } p = n \end{cases}$$

Solution : Méthode ① : Un peu de binôme pour obtenir

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^x)^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{kx}$$

On sait que $e^u = \sum_{p=0}^n \frac{u^p}{p!}$, donc (on a bien $kx \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) $e^{kx} = \sum_{p=0}^n \frac{(kx)^p}{p!} = \sum_{p=0}^n \frac{k^p}{p!} x^p$. Par somme (finie) de DL , on en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{p=0}^n \frac{k^p}{p!} x^p \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^n \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^p}{p!} x^p \right) \\ &= \sum_{p=0}^n \left[\sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^p}{p!} \right) \right] x^p \end{aligned}$$

Méthode ② : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ donc admet un $DL_n(0)$ (obtenu par Taylor, mais sérieusement ...) de la forme

$$f(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p$$

On sait que la partie principale donne l'équivalent de f en 0. Mais $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^n$. Ceci permet d'affirmer que dans le $DL_n(0)$ de f , tous les coefficients, sauf celui de x^n , sont nuls et que le coefficient de x^n vaut 1. Bref

$$f(x) = x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Par unicité du $DL_n(0)$, on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^p}{p!} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ 1 & \text{si } p = n \end{cases}$$

7.4 Etude de fonction

Exercice de khôlle 285

(★) Faire l'étude complète de $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$ (en particulier les asymptotes).

Solution : Ensemble de définition : $f(x)$ est défini si et seulement si $x+1 \neq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
Asymptotes : En $x = -1$, on a

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

Le graphe de f a une asymptote verticale en -1 .

En $x = 0^-$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+1} &= 0, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \end{aligned}$$

On pose donc $f(0) = 0$. Ainsi f devient continue en $x = 0$. Si on veut la dérivabilité, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \text{ (même méthode)}$$

Ainsi f devient dérivable à gauche en 0 avec $f'(0) = 0$.

En $x = 0^+$, on pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, ainsi

$$\begin{aligned} x^2 e^{\frac{1}{x}} &= \frac{e^X}{X^2} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty \text{ par croissances comparées} \\ \text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} &= +\infty \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. On a une asymptote verticale en 0^+ .

En $\pm\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$ ainsi

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{h} + 1} e^h = \frac{1}{h} \times \frac{e^h}{1+h}$$

On fait un $DL_2(0)$ de $\frac{e^h}{1+h}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{e^h}{1+h} &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) \times (1 - h + h^2) + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}h + {}_{h \rightarrow 0}o(h) = x + \frac{1}{2x} + {}_{x \rightarrow \pm\infty}o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que $y = x$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$. Puisque $f(x) - x \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$, la courbe est sous l'asymptote en $-\infty$ et au dessus en $+\infty$.

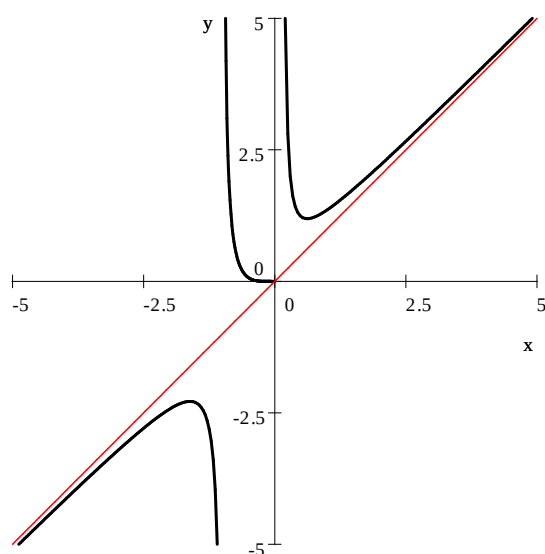
Variations : La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition avec

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' &= \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} \\ &= \left(\frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Les racines de $x^2 + x - 1 = 0$ sont $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\varphi < -1$ et $-\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi} > 0$ et f' est du signe de $x^2 + x - 1$. D'où les variations de f

x	$-\infty$	$-\varphi$	-1	0	$\frac{1}{\varphi}$	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$	$ $	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a facilement $f\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{e^\varphi}{\varphi(\varphi+1)} > 0$ et $f(-\varphi) = \frac{\varphi^2 e^{-\frac{1}{\varphi}}}{1-\varphi} < 0$. Voici le graphe de f et son asymptote :



8.1 Sans second membre

Exercice de khôlle 286

Résoudre l'équation différentielle (E) $(1 + \operatorname{ch}(x)) y' + e^x y = 0$. (utiliser $u = 1 + e^x$ pour le calcul de primitive).

Solution : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + \operatorname{ch}(x) \neq 0$ d'où

$$(E) \iff y' + \frac{e^x}{1 + \operatorname{ch}(x)} y = 0$$

La fonction $a(x) = \frac{e^x}{1 + \operatorname{ch}(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On calcule $\int \frac{e^x}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx$ en posant $u = 1 + e^x$ (qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), ainsi

$$\begin{aligned} du &= e^x dx, \quad \frac{e^x}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx = \frac{1}{1 + \frac{e^x + 1}{2}} e^x dx = \frac{1}{1 + \frac{u - 1 + \frac{1}{u - 1}}{2}} du \\ &= \frac{2}{2 + u - 1 + \frac{1}{u - 1}} du = \frac{2(u - 1)}{(u + 1)(u - 1) + 1} du = 2 \frac{u - 1}{u^2} du \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{1 + \operatorname{ch}(x)} dx &= 2 \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = 2 \left[\ln |u| + \frac{1}{u} \right] \\ &= 2 \left(\ln(1 + e^x) + \frac{1}{1 + e^x} \right) \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de (E) sont

$$\begin{aligned} y(x) &= K e^{-2(\ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x})} \text{ où } K \in \mathbb{R} \\ &= \frac{K}{(1 + e^x)^2} \exp\left(-\frac{2}{1 + e^x}\right) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 287

On considère l'équation différentielle (E) $(x^2 + x - 2) y' + (x + 5) y = 0$. La résoudre sur $I =]-2, 1[$.

Solution : Sur $] -2, 1[$, $(x^2 + x - 2) = (x + 2)(x - 1) \neq 0$ donc

$$(E) \iff y' + \frac{x+5}{(x+2)(x-1)}y = 0$$

La fonction $a(x) = \frac{x+5}{(x+2)(x-1)}$ est continue sur $] -2, 1[$. On décompose $\frac{x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1}$ par la méthode du cache qui donne

$$a = \frac{-2+5}{-2-1} = -1 \text{ et } b = \frac{1+5}{1+2} = 2$$

d'où une primitive de a est

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{(x+2)(x-1)} dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2 \ln |x-1| - \ln |x+2| \\ &= \ln (x-1)^2 - \ln (x+2) = \ln \left(\frac{(x-1)^2}{|x+2|} \right) \end{aligned}$$

les solutions de (E) sont donc avec $x+2 > 0$

$$y(x) = K_1 \exp \left(-\ln \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} \right) \right) = K_1 \frac{x+2}{(x-1)^2} \text{ où } K_1 \in \mathbb{R}$$

Exercice de khôlle 288

Je connais une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ dont la primitive qui vaut 1 en 0 est égale au produit de f et de la fonction ch. Mais quelle est donc cette fonction ?

Solution : Soit F la primitive de f qui vaut 1 en 0. On sait alors que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = F'(x)$ et l'on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}(x) f(x) = \operatorname{ch}(x) F'(x) = F(x)$$

Ainsi F est solution de (E) $\operatorname{ch}(x) y' - y = 0$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \neq 0$ on a

$$(E) \iff y' - \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} y = 0$$

La fonction $a(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{\operatorname{ch}(x) dx}{\operatorname{ch}^2(x)} = \int \frac{\operatorname{ch}(x) dx}{1 + \operatorname{sh}^2(x)} = \arctan(\operatorname{sh} x) \text{ est une primitive de } a$$

Ainsi

$$F(x) = K \exp(-\arctan(\operatorname{sh} x))$$

Mais $F(0) = 1$ d'où $K = 1$ (c'est un problème de Cauchy) et ainsi

$$f(x) = \frac{F(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\exp(-\arctan(\operatorname{sh} x))}{\operatorname{ch}(x)}$$

Remarque : Une autre manière de procéder pour calculer une primitive de a est de poser $u = e^x$ ce qui donne $du = e^x dx$ puis $\frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{2dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{2e^x dx}{1 + (e^x)^2} = \frac{2du}{1 + u^2}$ d'où $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \arctan(e^x)$ est une primitive de a . On a alors

$$F(x) = K \exp(-2 \arctan(e^x)) \text{ et } F(0) = K e^{-\frac{\pi}{2}} = 1$$

d'où $K = e^{\frac{\pi}{2}}$ et

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} - 2 \arctan(e^x)\right)}{\operatorname{ch}(x)}$$

Exercice de khôlle 289

Vous connaissez tous cette fameuse règle (fausse!) de dérivation simplifiée : $(fg)' = f'g'$, ou en d'autres termes, la dérivée d'un produit est égale au produit des dérivées!

Si $f(x) = e^{x^2} = \exp(x^2)$, déterminer un intervalle I et une fonction g définie sur I telle que $(fg)' = f'g'$ sur I .

Solution : On sait que $(fg)' = f'g + fg'$, ainsi $(fg)' = f'g'$ si et seulement si

$$f'g + fg' = f'g' \text{ soit } (f - f')g' + f'g = 0$$

Avec $f(x) = e^{x^2}$ qui est dérivable avec $f'(x) = 2xe^{x^2}$, on a

$$(f - f')g' + f'g = 0 \iff (e^{x^2} - 2xe^{x^2})g' + 2xe^{x^2}g = 0$$

Ainsi g est solution de l'équation différentielle (car $e^{x^2} \neq 0$ sur $\mathbb{R}$)

$$(1 - 2x)y' + 2xy = 0$$

On se place sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ afin de pouvoir diviser par $1 - 2x$, l'équation s'écrit alors

$$y' + \frac{2x}{1 - 2x}y = 0$$

La solution générale est alors

$$y(x) = K \exp\left(-\int \frac{2x}{1 - 2x} dx\right)$$

Or

$$\begin{aligned} \int -\frac{2x}{1 - 2x} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{2x - 1}\right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \ln |2x - 1| \end{aligned}$$

On choisit donc

$$g(x) = \sqrt{2x - 1} e^x \text{ pour } x > \frac{1}{2}$$

Exercice de khôlle 290

Résoudre (E) $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Solution : Sur $]0, +\infty[$ on a $x(1 + \ln^2(x)) \neq 0$ donc

$$(E) \iff y' + \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}y = 0$$

Puisque $a : x \mapsto \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))}$ est continue sur $]0, +\infty[$, les solutions sont de la forme

$$y(x) = K \exp \left(- \int \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} dx \right)$$

Pour le calcul de primitive, sincèrement ce $\ln(x)$ est pénible. On pose donc $u = \ln(x)$ (qui est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$), ainsi $du = \frac{dx}{x}$ et

$$\frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} dx = \frac{2u}{1 + u^2} du$$

d'où

$$\int \frac{2 \ln(x)}{x(1 + \ln^2(x))} dx = \int \frac{2u}{1 + u^2} du = \ln(|1 + u^2|) = \ln(1 + u^2) = \ln(1 + \ln^2(x))$$

d'où les solutions de (E) sont

$$y(x) K \exp(-\ln(1 + \ln^2(x))) = \frac{K}{1 + \ln^2(x)} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

8.2 Avec second membre

Exercice de khôlle 291

Résoudre $x \ln(x) y' - y = -\frac{\ln(x) + 1}{x}$ sur $]1, +\infty[$.

Solution : Sur $I =]1, +\infty[$, on a $x \ln(x) \neq 0$, on normalise l'équation différentielle en

$$(E) \quad y' - \frac{1}{x \ln x} y = -\frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln(x)}$$

Puisque $a : x \mapsto -\frac{1}{x \ln x}$ et $b : x \mapsto -\frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln(x)}$ sont continues sur I , on peut appliquer le cours.

Les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = K \exp \left(\int \frac{dx}{x \ln x} \right) = C \ln x$, puisque $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| = \ln(\ln x)$ (type $\frac{u'}{u}$) sur I .

On cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante en posant $y(x) = C(x) \ln(x)$. On a alors

$$C'(x) \ln(x) = -\frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln(x)} \text{ d'où } C'(x) = -\frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)}$$

À ce stade, pas de panique, pour calculer $\int -\frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)} dx$, on réfléchit. On peut tenter de poser $u = \ln(x)$, mais (le faire) ensuite on bloque. On se dit que le carré au dénominateur doit faire penser à $-\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x \ln(x)$, on a $u'(x) = 1 + \ln(x)$ bingo!

Donc $\int -\frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)} dx = \frac{1}{x \ln(x)}$ donne $C(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ puis la solution particulière $y_p(x) = \frac{1}{x}$. Au final, les solutions sont de la forme

$$y(x) = C \ln(x) + \frac{1}{x} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Exercice de khôlle 292

Résoudre (E) $xy' - y = \ln(x)$.

Solution : On se place sur $]0, +\infty[$ (domaine de définition du $\ln$), ainsi

$$(E) \iff y' - \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}$$

Les fonctions a et b définies par $a(x) = -\frac{1}{x}$ et $b(x) = \frac{\ln x}{x}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, on peut appliquer le cours.

Equation homogène : les solutions sont $y(x) = K \exp\left(-\int a(x) dx\right) = K \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) = K \exp(\ln|x|) = Kx$ où $K \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = K(x) \times x$. Le cours dit que

$$K'(x) \times x = \frac{\ln x}{x} \text{ d'où } K(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

Pour calculer $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$, une IPP s'impose avec

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x^2} & v(x) &= \ln x \\ u(x) &= -\frac{1}{x} & v'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}, \text{ } u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[$$

ce qui donne

$$K(x) = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

Une solution particulière est donc $y_p(x) = -(1 + \ln x)$ et les solutions de (E) sont

$$y(x) = Kx - (1 + \ln x) \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Exercice de khôlle 293

Résoudre (E) $(1+x^2)y' - xy = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Solution : On se place sur $\mathbb{R}$, ainsi

$$(E) \iff y' - \frac{x}{1+x^2}y = \sqrt{1+x^2}$$

Les fonctions a et b définies par $a(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ et $b(x) = \sqrt{1+x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le cours.

Equation homogène : les solutions sont

$$\begin{aligned} y(x) &= K \exp\left(-\int a(x) dx\right) = K \exp\left(\int -\frac{x}{1+x^2} dx\right) \\ &= K \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx\right) = K \exp\left(-\frac{1}{2} \ln|1+x^2|\right) = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \text{ où } K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Solution particulière : On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{K(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. Le cours dit que

$$\frac{K'(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} \text{ d'où } K'(x) = 1+x^2$$

On choisit $K(x) = x + \frac{x^3}{3}$, ainsi une solution particulière est donc $y_p(x) = \frac{x + \frac{x^3}{3}}{\sqrt{1+x^2}}$ et les solutions de (E) sont

$$y(x) = \frac{K + x + \frac{x^3}{3}}{\sqrt{1+x^2}} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Exercice de khôlle 294

(★) Trouver les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$(E) \quad y'(x) + \min(0, x) y(x) = x$$

Indication : Bien choisir les primitives !

Solution : Pour l'EH : Soit $a(x) = \min(0, x)$ alors a est bien continue sur $\mathbb{R}$ (on a $a(x) = \frac{x - |x|}{2}$ par exemple). Le cours nous dit que les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = K \exp(-A(x))$ où A est une primitive de a . On choisit

$$A(x) = \int_0^x a(t) dt \text{ qui d'après le TFA est bien une primitive !}$$

Si $x < 0$ alors $a(t) = t$ sur $[x, 0]$ et $A(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$ alors que si $x > 0$, on a $a(t) = 0$ d'où $A(x) = 0$. Conclusion, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y(x) = \begin{cases} K \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \leq 0 \\ K & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Pour la solution particulière, la méthode de la variation de la constante nous dit de chercher $y_p(x)$ sous la forme

$$y_p(x) = K(x) y_0(x) \text{ où } y_0(x) = \begin{cases} K \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \leq 0 \\ K & \text{si } x \geq 0 \end{cases} . \text{ On sait alors que l'on obtient}$$

$$K'(x) y_0(x) = x$$

$$\text{d'où } K'(x) = \begin{cases} x \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} . \text{ On choisit } K(x) = \int_0^x K'(t) dt, \text{ ainsi}$$

$$K(x) = \int_0^x t \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) dt = \left[\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \right]_0^x = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) - 1 \text{ si } x \leq 0$$

$$K(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \text{ si } x \geq 0$$

Au final, les solutions de (E) sont les fonctions définies par

$$y(x) = \begin{cases} K \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \leq 0 \\ K + \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Remarque : Sur $[0, +\infty[$, (E) s'écrit $y'(x) = x$ qui donne bien $y(x) = \frac{x^2}{2} + K$ ouf ! On peut aussi résoudre à droite et à gauche de 0 et faire un raccord ! Si vous avez compris l'idée, vous pouvez résoudre $(1+x^2)y' + |x|y = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$.

8.3 Un (faux-)raccord Michel ?

Exercice de khôlle 295

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' + (2x + 1)y = e^{-x}$.

Solution : On se place sur $I_1 =]-\infty, 0[$ ou sur $I_2 =]0, +\infty[$, ainsi l'équation différentielle équivaut à

$$y' + \frac{2x+1}{x}y = \frac{e^{-x}}{x}$$

Puisque $a : x \mapsto \frac{2x+1}{x}$ et $b : x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ sont continue sur I_k (où $k \in \{1, 2\}$), on peut appliquer le cours. Les solutions de l'équation homogène sont

$$y(x) = C_k \exp\left(-\int \frac{2x+1}{x} dx\right) = C_k \exp(-2x - \ln|x|) = \frac{C_k e^{-2x}}{|x|}$$

et quitte à changer C_1 en $-C_1$, on peut enlever la valeur absolue.

Pour la solution particulière, la variation de la constante (en posant $y(x) = \frac{C(x)e^{-2x}}{x}$) donne $C'(x) \frac{e^{-2x}}{x} = \frac{e^{-x}}{x}$ d'où $C'(x) = e^x$, puis on choisit $C(x) = e^x$. Ainsi, sur I_k , $y(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ est une solution particulière. Au final, les solutions sur I_k sont

$$y(x) = \frac{C_k e^{-2x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x}$$

Solution sur $\mathbb{R}$: Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) $xy' + (2x + 1)y = e^{-x}$, alors y est solution sur I_1 , I_2 et en $x = 0$. Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1 e^{-2x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{C_2 e^{-2x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ y(0) = 1 & \text{(faire } x = 1 \text{ dans (E))} \end{cases}$$

La fonction y est continue, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{C_1 e^{-2x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = y(0) = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \times \left(\frac{C_1 e^{-2x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (C_1 e^{-2x} + e^{-x}) = C_1 + 1 = 0$$

Ainsi $C_1 = -1$. De même, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ donne $C_2 = -1$. Bref,

$$y(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } y(0) = 1$$

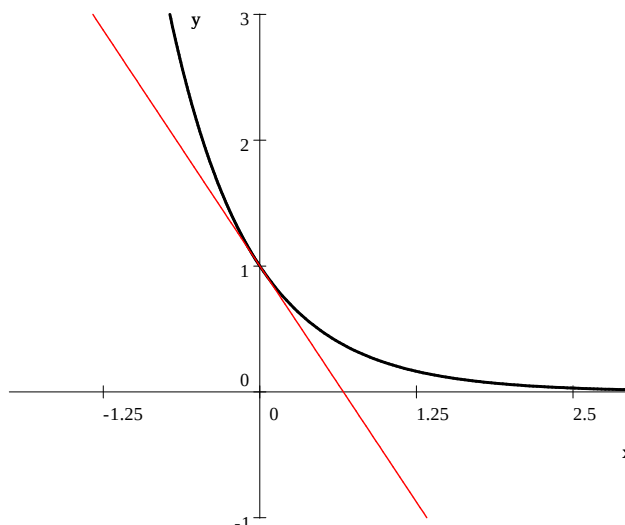
Mais un gentil DL en 0 donne

$$e^{-x} - e^{-2x} = x - \frac{3}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x) \text{ d'où } \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = 1 - \frac{3}{2}x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

Ce qui permet d'affirmer que si $y(0) = 1$ (ouf c'est le cas), y est dérivable en 0 avec $y'(0) = -\frac{3}{2}$. Conclusion, si y est définie par

$$y(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } y(0) = 1$$

alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) sur I_1, I_2 et en 0 donc est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Voici le graphe de l'unique solution sur $\mathbb{R}$ et sa tangente en 0 (pour la position, il faut le $DL_2(0)$)



Exercice de khôlle 296

Soit $(E) : xy' + 2y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- Résoudre (E) sur $I \subset \mathbb{R}^*$.
- Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x - \arctan x}{x^2}$
 - Déterminer le $DL_3(0)$ de f .
 - Montrer que l'on peut prolonger f en $x = 0$ en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner l'allure locale de f au voisinage de 0.
 - Vérifier que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que la seule solution sur $\mathbb{R}$ de (E) est f .

Solution : On pose $a(x) = \frac{2}{x}$ et $b(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ qui sont continue sur I . Ainsi sur I , (E) équivaut à $y' + a(x)y = b(x)$.

- La solution de l'équation homogène est

$$y_0(x) = K \exp\left(-\int \frac{2dx}{x}\right) = K \exp(-2 \ln |x|) = \frac{K}{|x|^2} = \frac{K}{x^2} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante en posant $y_p(x) = \frac{K(x)}{x^2}$. On sait alors que

$$\frac{K'(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ d'où } K'(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = x - \frac{1}{1 + x^2}$$

et on choisit $K(x) = x - \arctan x$

Ainsi $\frac{x - \arctan x}{x^2}$ (surprise!) est une solution particulière de (E) sur I . Les solutions de (E) sur I sont donc de la forme

$$y(x) = \frac{x - \arctan x + K}{x^2} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

2.

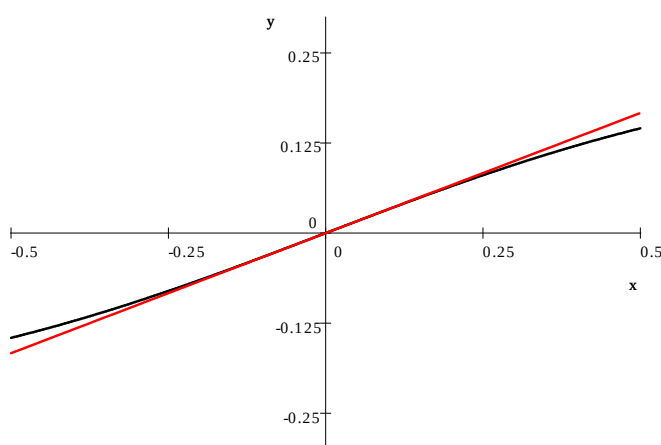
(a) On sait que $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$ d'où

$$f(x) = \frac{x - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right)}{x^2} = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{5} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

(b) Puisque f a un $DL_3(0)$ donc un $DL_1(0)$, en posant $f(0) = 0$, f devient continue et dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = \frac{1}{3}$. L'équation de la tangente est $y = \frac{x}{3}$ et

$$f(x) - \frac{x}{3} \sim -\frac{x^3}{5} \quad \begin{cases} \leq 0 \text{ au } V(0^+) \\ \geq 0 \text{ au } V(0^-) \end{cases}$$

Ainsi la courbe est localement au-dessus de sa tangente en 0^- et localement en dessous en 0^+ . Voici l'allure locale (il y a une inflexion en 0)



(c) On sait déjà que f est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, il suffit de vérifier que l'équation différentielle est également satisfaite pour $x = 0$, ce qui est immédiat car

$$0 \times f'(0) + 2f(0) = 0 = \frac{0}{0^2 + 1}$$

3. Par analyse-synthèse.

Analyse : Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) alors

- ① y est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
- ② $\forall x \in \mathbb{R}, xy' + 2y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

En particulier, ② en $x = 0$ donne $y(0) = 0$. Puis une solution sur $\mathbb{R}$ est une solution sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en $x = 0$. Il existe donc K_1 et K_2 tels que

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x - \arctan x + K_1}{x^2} \text{ si } x < 0 \\ y(x) &= \frac{x - \arctan x + K_2}{x^2} \text{ si } x > 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque y est continue en $x = 0$, elle admet une limite en $x = 0$ (et cette limite doit être la valeur de $y(0)$).

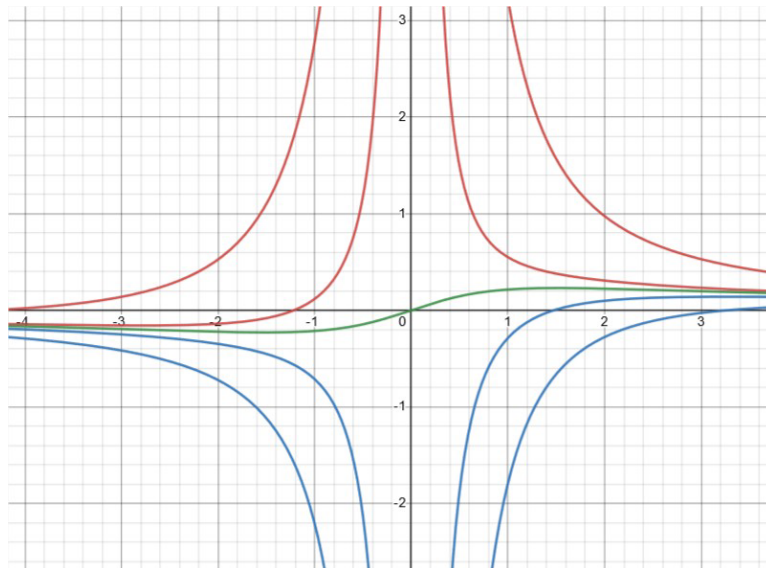
En particulier $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 y(x) = 0$, mais

$$\begin{aligned} \text{si } x < 0, \quad x^2 y(x) &= x - \arctan x + K_1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} K_1 \\ \text{si } x > 0, \quad x^2 y(x) &= x - \arctan x + K_2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} K_2 \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $K_1 = K_2 = 0$ et ainsi $y(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Analyse : On a montré que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Et c'est donc la seule solution de (E) .

Sur le graphe suivant, on a tracé en **vert** le graphe de f et en **rouge** et **bleu** des solutions sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.



Exercice de khôlle 297

Soit $(E) : (1+x)y' + y = e^x$.

- Résoudre (E) sur $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{e^{x+1} - 1}{e(x+1)}$
 - Déterminer le $DL_1(-1)$ de f .
 - Montrer que l'on peut prolonger f en $x = -1$ en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Vérifier que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que la seule solution sur $\mathbb{R}$ de (E) est f .

Solution : On pose $a(x) = \frac{1}{1+x}$ et $b(x) = \frac{e^x}{1+x}$ qui sont continue sur I .

- La solution de l'équation homogène est

$$y_0(x) = K \exp\left(-\int \frac{dx}{1+x}\right) = K \exp(-\ln|1+x|) = \frac{K}{|1+x|} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Sur I , $1+x$ garde un signe constant, puisque K est quelconque, quitte à remplacer K par $-K$, les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y(x) = \frac{K}{1+x} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante en posant $y_p(x) = \frac{K(x)}{1+x}$. On sait alors que

$$\frac{K'(x)}{1+x} = \frac{e^x}{1+x} \text{ d'où } K'(x) = e^x \text{ et on choisit } K(x) = e^x$$

Ainsi $\frac{e^x}{1+x}$ est une solution particulière de (E) sur I . Les solutions de (E) sur I sont donc de la forme

$$y(x) = \frac{K + e^x}{1+x} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

2.

(a) On pose $x = 1 + h$, ainsi

$$\begin{aligned} f(-1+h) &= \frac{e^h - 1}{eh} = \frac{\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) - 1\right)}{eh} \\ &= \frac{1}{e} + \frac{1}{2e}h + o_{h \rightarrow 0}(h) \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x+1) + o_{x \rightarrow -1}(x+1)$$

(b) Puisque f a un $DL_1(-1)$, en posant $f(-1) = \frac{1}{e}$, f devient continue et dérivable en $x = -1$ avec $f'(-1) = \frac{1}{2e}$.

(c) On remarque que $f(x) = \frac{e^x \times e - 1}{e(x+1)} = \frac{e^x - \frac{1}{e}}{x+1} = \frac{e^x + K}{x+1}$ où $K = -\frac{1}{e}$. Ainsi f est solution de (E) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$. De plus f est dérivable en $x = -1$ avec $f(-1) = e^{-1}$ d'où

$$(-1+1)f'(-1) + f(-1) = e^{-1}$$

ce qui prouve que f vérifie l'équation différentielle également en $x = -1$ donc sur $\mathbb{R}$. Bref, f est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. Par analyse-synthèse.

Analyse : Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) alors

- ① y est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
- ② $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x)y'(x) + y(x) = e^x$.

En particulier, ② en $x = -1$ donne $y(-1) = \frac{1}{e}$. Puis une solution sur $\mathbb{R}$ est une solution sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$, et est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en $x = -1$. Il existe donc K_1 et K_2 tels que

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{K_1 + e^x}{1+x} \text{ si } x < -1 \\ y(x) &= \frac{K_2 + e^x}{1+x} \text{ si } x > -1 \\ y(-1) &= e^{-1} \end{aligned}$$

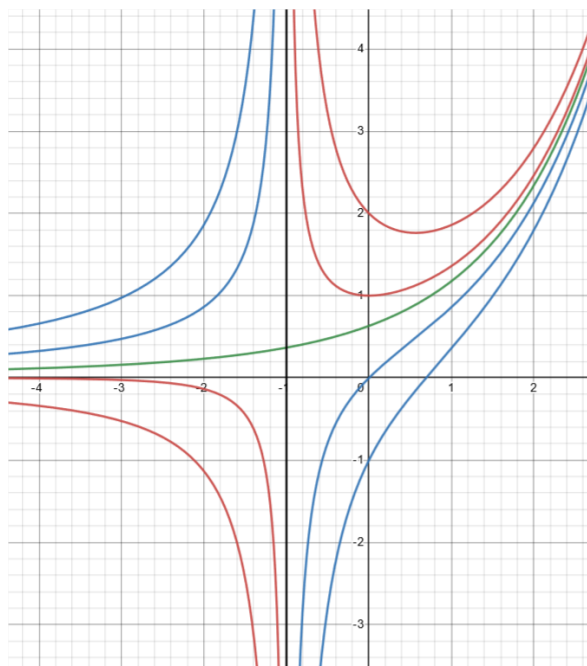
Puisque y est continue en $x = -1$, elle admet une limite en $x = -1$ (et cette limite doit être la valeur de $y(-1)$). En particulier $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1)y(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)y(x) = 0$, mais

$$\begin{aligned} \text{si } x < -1, (x+1)y(x) &= K_1 + e^x \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} K_1 + e^{-1} \\ \text{si } x > -1, (x+1)y(x) &= K_2 + e^x \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} K_2 + e^{-1} \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $K_1 = K_2 = e^{-1}$ et ainsi $y(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Analyse : On a montré que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Et c'est donc la seule solution de (E) .

Sur le graphe suivant, on a tracé en **vert** le graphe de f et en **rouge** et **bleu** des solutions sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.



8.4 Au bord du programme

Exercice de khôlle 298

Déterminer les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant (E) $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}).$$

Cette équation est un cas particulier d'équation de Ricatti.

Solution : Analyse : Soit y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ donc dérivable, on pose $z = \frac{1}{y}$ (on peut et on a alors $y = \frac{1}{z}$), ainsi z est dérivable si et seulement si y l'est. Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E)} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -\frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{3}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)} = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) - 3z(x) = 1 \end{aligned}$$

Les solutions de $z' - 3z = 1$ sont $z(x) = Ke^{3x} - \frac{1}{3}$ où $K \in \mathbb{R}$ (immédiat et on a un régime permanent ici). Mais la condition z ne s'annule pas impose alors $K \leq 0$ (car sinon $Ke^{3x} - \frac{1}{3} \iff e^{3x} = \frac{1}{3K} \iff x = -\frac{1}{3} \ln(3K)$). Conclusion y est définie par

$$y(x) = -\frac{3}{1 + Ce^{3x}} \text{ avec } C = -3K \in [0, +\infty[$$

Exercice de khôlle 299

(★) On se propose d'étudier certaines solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = |y - x|$$

1. Déterminer les solutions telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \geq x$.
2. Déterminer les solutions telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \leq x$.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une unique solution y telle que

$$\forall x \leq x_0, y(x) \geq x \text{ et } \forall x \geq x_0, y(x) \leq x$$

Solution :

1. Analyse : Soit y une solution telle que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \geq x$, alors y est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = y - x$. L'équation homogène est $y' - y = 0$ dont les solutions sont $y(x) = Ke^x$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$ (comme avec les EDL2) On a alors

$$y'_p(x) - y_p(x) = a - (ax + b) = -ax + (a - b) = -x$$

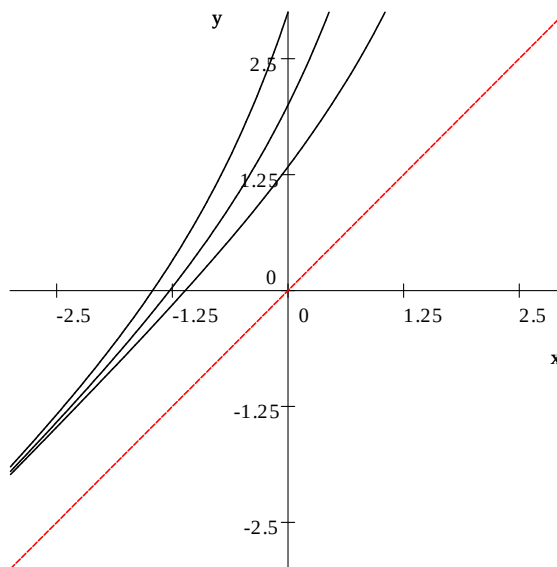
il suffit de prendre $a = 1$ et $b = 1$. Ainsi $y_p(x) = x + 1$ est solution de $y' - y = -x$. Conclusion y est de la forme

$$y(x) = Ke^x + x + 1$$

Mais on doit également avoir $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \geq x$, soit $\forall x \in \mathbb{R}, Ke^x \geq -1$. Si $K < 0$, on a $Ke^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, contradictoire. Donc $K \geq 0$ et (sachant que $e^x \geq 0$) ainsi $Ke^x \geq 0 \geq -1$.

Synthèse : Soit $y(x) = Ke^x + x + 1$ où $K \geq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \geq x$ et $y'(x) = Ke^x + 1 = y(x) - 1 = |y(x) - 1|$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \geq x$ sont de la forme $y(x) = Ke^x + x + 1$ où $K \geq 0$.

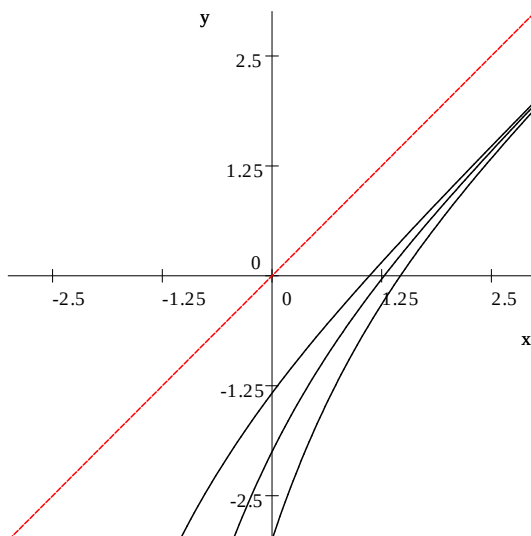
Voici quelques courbes intégrales (et en rouge la première bissectrice)



Remarque : Si on applique la méthode de la variation de la constante pour la solution particulière en posant $y_p(x) = K(x)e^x$, on obtient $K'(x)e^x = -x$ d'où $K'(x) = -xe^{-x}$. Avec une IPP (en dérivant x), on choisit $K(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ d'où $y_p(x) = x + 1$.

2. On procède de la même manière, mais plus synthétiquement. Si $\forall x \geq 0, y(x) \leq x$ alors y est solution de $y' = x - y$. On a facilement $y(x) = Ke^{-x} + x - 1$ où $K \in \mathbb{R}$. La condition $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \leq x$ s'écrit alors $Ke^{-x} \leq 1$. Si $K > 0$, on a $Ke^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, donc à exclure. Et si $K \leq 0$, alors $Ke^{-x} \leq 0 \leq 1$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \geq x$ sont de la forme $y(x) = Ke^{-x} + x - 1$ où $K \leq 0$. Voici quelques courbes intégrales (et en rouge la première bissectrice)



3. Encore par analyse synthèse. Soit y une solution telle que $\forall x \leq x_0, y(x) \geq x$ et $\forall x \geq x_0, y(x) \leq x$. Alors y est solution sur $]-\infty, x_0]$ de $y' = y - x$ donc

$$\exists K_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, x_0], y(x) = K_1 e^x + x + 1$$

De la même manière y est solution sur $[x_0, +\infty[$ de $y' = x - y$ donc

$$\exists K_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in [x_0, +\infty[, y(x) = K_2 e^{-x} + x - 1$$

Puisque $\forall x \leq x_0, y(x) \geq x$ et $\forall x \geq x_0, y(x) \leq x$, avec $x = x_0$, on obtient $y(x_0) = x_0$. Mais alors

$$\begin{aligned} y(x_0) &= x_0 = K_1 e^{x_0} + x_0 + 1 \text{ d'où } K_1 = -e^{-x_0} \\ &= x_0 = K_2 e^{-x_0} + x_0 - 1 \text{ d'où } K_2 = e^{x_0} \end{aligned}$$

Synthèse : Soit y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \begin{cases} -e^{x-x_0} + x + 1 & \text{si } x < x_0 \\ y(x_0) = x_0 & \\ e^{x_0-x} + x - 1 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

Alors pour $x \leq x_0$, on a $y(x) - x = 1 - e^{x-x_0} \geq 0$ car $x - x_0 \leq 0$ donc $e^{x-x_0} \leq 1$ et pour $x \geq x_0$, on a $y(x) - x = e^{x_0-x} - 1 \leq 0$ car $x_0 - x \leq 0$. On a donc

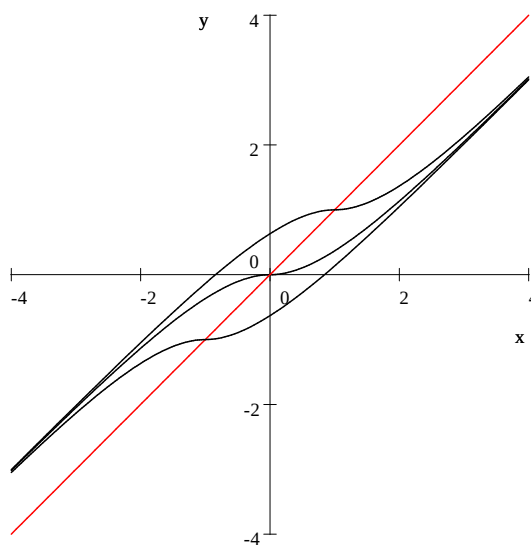
$$\begin{aligned} \forall x < x_0, y'(x) &= 1 - e^{x-x_0} = y(x) - x = |y(x) - x| \\ \forall x > x_0, y'(x) &= 1 - e^{x_0-x} = x - y(x) = |y(x) - x| \end{aligned}$$

Reste à montrer que y est bien continue et dérivable en x_0 (et vérifie $y'(x_0) = |y(x_0) - x_0| = 0$). Pour cela, on pose $x = x_0 + h$, ainsi

$$y(x_0 + h) = \begin{cases} -e^h + x_0 + h + 1 = x_0 - \frac{h^2}{2} + o_{h \rightarrow 0^-}(h^2) & \text{si } h < 0 \\ y(x_0) = x_0 & \\ e^{-h} + x_0 + h - 1 = x_0 + \frac{1}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0^+}(h^2) & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

Ce qui prouve que y est continue, dérivable à droite et à gauche en 0 avec les même dérivée (qui vaut 0), et

termine la synthèse. Voici quelques solutions pour différentes valeurs de x_0 :



Exercice de khôlle 300

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Solution : Analyse : Puisque $f(0) + f(1)$ est une constante, on oublie, dans un premier temps, qu'elle dépend de f . On pose alors $a = f(0) + f(1)$. Les solutions de $y' + y = a$ sont de la forme $y(x) = Ke^{-x} + a$ (la solution particulière correspond à un régime permanent). Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ke^{-x} + f(0) + f(1)$. Avec $x = 0$ on obtient $f(0) = K + f(0) + f(1)$ donc $K = -f(1)$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + f(1)(1 - e^x)$$

Ce qui avec $x = 1$ donne $f(1) = f(0) + f(1)(1 - e)$ d'où $f(0) = ef(1)$. Au final, en posant $\alpha = f(1)$ on a

$$f(x) = \alpha(e + 1 - e^x)$$

Synthèse : Soit f définie par

$$f(x) = \alpha(e + 1 - e^x)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha e, f(1) = \alpha \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) &= -\alpha e^x + \alpha(e + 1 - e^x) = \alpha e + \alpha = f(0) + f(1) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que ce sont bien les solutions (et les seules) au problème posé.

Exercice de khôlle 301

Déterminer toutes les fonctions f définies, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = e^{2x}f(y) + e^y f(x)$$

Solution : Par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f une solution. Avec $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$. Puis f est dérivable, on peut donc dériver par rapport à x pour avoir

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x+y) = 2e^{2x}f(y) + e^y f'(x)$$

Avec $x = 0$, on obtient $\forall y \in \mathbb{R}, f'(y) = 2f(y) + e^y f(0)$. Si on pose $a = f(0)$, on en déduit que f est solution de

$$(E) \quad f' - 2f = ae^x$$

Les solutions de l'équation homogène sont (bien sûr $a(x) = a$ et $b(x) = ae^x$ sont continues) $f_0(x) = Ke^{2x}$ où $K \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(x) = K(x)e^{2x}$, on sait que f_p est solution de (E) si et seulement si $K'(x)e^{2x} = ae^{-x}$ d'où $K'(x) = ae^{-x}$. On choisit $K(x) = -ae^{-x}$ pour avoir $f_p(x) = -ae^x$. Conclusion f est de la forme

$$f(x) = Ke^{2x} - ae^x$$

Avec $f(0) = 0$, on obtient $K = a$ et ainsi $f(x) = a(e^{2x} - e^x)$.

Synthèse : Soit f définie par $f(x) = a(e^{2x} - e^x)$ alors

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(e^{2x+2y} - e^{x+y}) \\ e^{2x}f(y) + e^y f(x) &= e^{2x} \times a(e^{2y} - e^y) + e^y \times a(e^{2x} - e^x) \\ &= a(e^{2x}e^{2y} - e^{2x}e^y + e^{2x}e^y - e^ye^x) \\ &= a(e^{2x+2y} - e^{x+y}) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $f(x) = a(e^{2x} - e^x)$ est bien solution du problème posé.

Remarque : ① On peut vérifier que $f'(0) = a$, mais c'est inutile.

② On a d'abord dérivé par rapport à x , on pouvait aussi dériver par rapport à y pour avoir

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x+y) = e^{2x}f'(y) + e^y f'(x)$$

avec $y = 0$, on obtient $f'(x) - f(x) = ae^{2x}$ où $a = f'(0)$, donc f est solution de

$$(E_x) \quad y' - 2y = ae^x \text{ et de } (E_y) \quad y' - y = ae^{2x}$$

donc par différence $(y' - y) - (y' - 2y) = y = a(e^{2x} - e^x)$, ce qui est plus rapide !

Exercice de khôlle 302

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, déterminer toutes les fonctions f définies, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = e^{\alpha x}f(y) + e^{\alpha y}f(x)$$

Solution : Si vous avez regardé l'exercice précédent, vous savez comment l'aborder ! Avec $x = y = 0$, on a $f(0) = 0$. Puis (analyse) on dérive par rapport à y pour avoir

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x+y) = e^{\alpha x}f'(y) + \alpha e^{\alpha y}f(x)$$

puis avec $y = 0$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x) + ae^{\alpha x} \text{ où } a = f'(0) \in \mathbb{C}$$

Ainsi f est solution de $f' - \alpha f = ae^{\alpha x}$ et $f(0) = 0$. La solution générale de l'équation homogène est $f_0(x) = Ke^{\alpha x}$ où $K \in \mathbb{C}$. On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(x) = K(x)e^{\alpha x}$, on sait que f_p est solution de (E) si et seulement si $K'(x)e^{\alpha x} = ae^{\alpha x}$ d'où $K'(x) = a$. On choisit $K(x) = ax$ pour avoir $f_p(x) = axe^{\alpha x}$. Conclusion f est de la forme

$$f(x) = (K + ax)e^{\alpha x}$$

Avec $f(0) = 0$, on a $K = 0$.

Enfin (synthèse), si $f(x) = axe^{\alpha x}$ alors

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y)e^{\alpha(x+y)} \\ e^{\alpha x}f(y) + e^{\alpha y}f(x) &= e^{\alpha x} \times aye^{\alpha y} + e^{\alpha y} \times axe^{\alpha x} = aye^{\alpha(x+y)} + axe^{\alpha(x+y)} \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est bien solution du problème, ceci quelque soit $a \in \mathbb{C}$ (on peut vérifier que $f'(0) = a$).

9.1 Simple application du cours

Exercice de khôlle 303

Résoudre $y'' - 2y' + 5y = te^t$.

Solution : On applique le cours. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$ qui a deux racines complexes $1 + 2i$ et $1 - 2i$. Les solutions de l'équation homogène sont $y(t) = (C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)) e^t$.

Pour la solution particulière, on pose $y(t) = z(t) e^t$, pour avoir $z'' + 4z = t$. Ainsi $z(t) = \frac{t}{4}$ est une solution particulière évidente.

Les solutions sont donc

$$y(t) = \left(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{t}{4} \right) e^t$$

Exercice de khôlle 304

Résoudre $y'' - 2y' + 2y = \cos^2 t$.

Solution : On applique le cours. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$ qui a deux racines complexes $1 + i$ et $1 - i$. Les solutions de l'équation homogène sont $y(t) = (C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)) e^t$.

Pour la solution particulière, on a $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$. On applique le principe de superposition. Une solution particulière de $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}$ est $y_1(t) = \frac{1}{4}$.

Puis on cherche une solution particulière de $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2} e^{2it}$ dont on prend la partie réelle. On pose donc $y(t) = z(t) e^{2it}$ pour avoir

$$z'' - 2(1 - 4i)z' - (2 + 4i)z = \frac{1}{2}$$

Une solution évidente est $z(t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 + 2i} = -\frac{1 - 2i}{20}$, puis

$$\begin{aligned} -\frac{1 - 2i}{20} e^{2it} &= -\frac{1 - 2i}{20} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \\ &= -\frac{1}{20} \cos(2t) - \frac{1}{10} \sin(2t) + \underbrace{i(\dots)}_{\in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Ainsi une solution particulière de $y'' - 2y' + 2y = \frac{\cos(2t)}{2}$ est

$$y_2(t) = -\frac{1}{20} \cos(2t) - \frac{1}{10} \sin(2t)$$

Les solutions de l'équation différentielle de départ sont donc

$$y(t) = (C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)) e^t + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} \cos(2t) - \frac{1}{10} \sin(2t)$$

Exercice de khôlle 305

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + 2y' - 3y = \sin(x) + \cos(x)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(z \times e^{ix}) = \sin(x) + \cos(x)$.
3. Donner une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}}) \quad y'' + 2y' - 3y = z \times e^{ix}$ puis en déduire les solutions de (E) .

Solution :

1. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1)$ dont les racines sont 1 et -3 . Les solutions de l'équation homogène sont

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

2. On a $(a + ib) \times e^{ix} = (a + ib)(\cos x + i \sin x) = a \cos x - b \sin x + \underbrace{i(\dots)}_{\in \mathbb{R}}$ d'où

$$\operatorname{Re}((1 - i)e^{ix}) = \sin x + \cos x$$

3. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = z(x)e^{ix}$ ainsi

$$\begin{array}{rclcl} y(x) & = & & z(x)e^{ix} & \times (-3) \\ y'(x) & = & & z'(x)e^{ix} + iz(x)e^{ix} & \times (2) \\ y''(x) & = & z''(x)e^{ix} + 2iz'(x)e^{ix} + i^2 z(x)e^{ix} & & \times (1) \end{array}$$

Ainsi

$$(z''(x) + (\dots)z'(x) + (-4 + 2i)z(x))e^{ix} = (1 - i)e^{ix}$$

puisque $e^{ix} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que z vérifie

$$z'' + (?)z' + (-4 + 2i)z = (1 - i)$$

dont une solution évidente est $z(x) = \frac{1 - i}{-4 + 2i} = -\frac{1}{2} \frac{1 - i}{2 - i} = -\frac{1}{2} \frac{(1 - i)(2 + i)}{4 + 1} = -\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$. Une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ est donc

$$\begin{aligned} y_{p,\mathbb{C}}(x) &= \frac{1}{10}(-3 + i)e^{ix} = \frac{1}{10}(-3 + i)(\cos x + i \sin x) \\ &= -\frac{1}{10}(3 \cos x + \sin x) + \underbrace{i(\dots)}_{\in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

On en déduit (en prenant la partie réelle) qu'une solution particulière de (E) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{10}(3 \cos x + \sin x)$$

Et les solutions de (E) sont donc de la forme

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{10}(3 \cos x + \sin x) \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice de khôlle 306

Montrer que l'équation différentielle

$$y'' + y' - 2y = xe^x$$

admet une unique solution, telle que $y(0) = 1$ et y a une limite finie en $-\infty$.

Solution : On résout l'équation différentielle. L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = (r + 2)(r - 1)$, les solutions de l'équation homogène sont donc

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Pour la solution particulière, on la cherche sous la forme $y(x) = z(x) e^x$, on a alors

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x) e^x && \times (-2) \\ y'(x) &= z'(x) e^x + z(x) e^x && \times (1) \\ y''(x) &= z''(x) e^x + 2z'(x) e^x + z(x) e^x && \times (1) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$(z''(x) + 3z'(x)) e^x = x e^x \text{ soit } z''(x) + 3z'(x) = x$$

On cherche alors $z(x)$ sous la forme $z(x) = ax^2 + bx + c$ ainsi $z'(x) = 2ax + b$ et $z''(x) = 2a$. On reporte

$$z''(x) + 3z'(x) = 6ax + (2a + 3b) = x$$

On choisit donc $a = \frac{1}{6}$ et $b = -\frac{2a}{3} = -\frac{1}{9}$ et $c = 0$ (on choisit) d'où $z(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$. Une solution particulière de (E) est donc

$$y_p(x) = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} \right) e^x$$

Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$y(x) = C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} + C_1 \right) e^x \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Par les croissances comparées, $xe^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $x^2 e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} + C_1 \right) e^x = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } C_2 > 0 \\ -\infty & \text{si } C_2 < 0 \\ 0 & \text{si } C_2 = 0 \end{cases}$$

Puisque $y(0) = C_1 + C_2$, on a donc

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \iff C_1 + C_2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) &= 1 \iff C_2 = 0 \end{aligned}$$

Il y a bien une unique solution au problème posé qui est

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} + 1 \right) e^x$$

9.2 Avec un paramètre

Exercice de khôlle 307

Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin \omega x$$

en fonction du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$.

Solution : Les solutions de l'équation homogène sont (l'équation caractéristique est $r^2 + 1$ qui a pour solutions i et $-i$) :

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

On détermine une solution particulière de $y'' + y = e^{i\omega x}$ dont on prend la partie imaginaire. Pour cela, on pose $y(x) = z(x) e^{i\omega x}$ et on obtient

$$z'' + 2i\omega z' + (1 - \omega^2)z = 1$$

Si $\omega^2 \neq 1$, on a (régime permanent) $z(x) = \frac{1}{1 - \omega^2}$ et $y(x) = \frac{e^{i\omega x}}{1 - \omega^2}$. Une solution particulière de $y'' + y = \sin \omega x$ est donc

$$\operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\omega x}}{1 - \omega^2} \right) = \frac{\sin \omega x}{1 - \omega^2}$$

Si $\omega^2 = 1$, on obtient

$$z'' + 2i\omega z' = 1$$

on choisit $z'(x) = \frac{1}{2i\omega}$ (on peut diviser par ω , car $\omega^2 = 1$ donc ω n'est pas nul), on choisit $z(x) = -\frac{ix}{2\omega} \implies y(x) = -\frac{ixe^{i\omega x}}{2\omega}$. Une solution particulière de $y'' + y = \sin \omega x$ est donc

$$\operatorname{Im} \left(-\frac{ixe^{i\omega x}}{2\omega} \right) = -\frac{x \cos \omega x}{2\omega}$$

En résumé, les solutions sont

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{\sin \omega x}{1 - \omega^2} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } \omega^2 \neq 1 \\ y(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x \cos \omega x}{2\omega} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } \omega^2 = 1 \end{aligned}$$

9.3 Et si on change de fonctions ou de variable ?

Exercice de khôlle 308

Résoudre sur $I =]0, +\infty[$, l'équation (E) $x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y(x) = 0$ en posant $u(x) = \sqrt{x}y(x)$

Solution : Sur I , si y est dérivable deux fois alors u également. Réciproquement si u est dérivable deux fois alors $y(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$ aussi. On a alors pour $x > 0$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) + \sqrt{x}y'(x) \\ u''(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}y(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}y'(x) + \sqrt{x}y''(x) \end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}x^2 y''(x) &= x\sqrt{x} \times \sqrt{x} y''(x) = x\sqrt{x} \times \left(u''(x) + \frac{1}{4x\sqrt{x}} y(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} y'(x) \right) \\&= x\sqrt{x} u''(x) + \frac{1}{4} y(x) - xy'(x)\end{aligned}$$

d'où

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4} y(x) = x\sqrt{x} u''(x)$$

et ainsi

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y(x) = x\sqrt{x} u''(x) + x^2 \frac{u(x)}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} (u''(x) + u(x))$$

On en déduit que y est solution de (E) sur I si et seulement si $\forall x \in I, u''(x) + u(x) = 0$. On a alors

$$u(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

les solutions de (E) , sur I , sont les fonctions y telles que

$$y(x) = C_1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice de khôlle 309

En posant $z(t) = y(\sqrt{t})$, résoudre sur $I =]0, +\infty[$, $ty''(t) - y'(t) - t^3 y(t) = 0$.

Solution : Sur I , si y est dérivable deux fois alors z également par composition. Réciproquement, pour $t > 0$, on a $y(x) = z(x^2)$ donc par composition, si z est dérivable deux fois alors y aussi. Puis si $y(t) = z(t^2)$ alors $y'(t) = 2tz'(t^2)$ et $y''(t) = 2z'(t^2) + 4t^2 z''(t^2)$. Puisque

$$\forall t \in I, ty''(t) - y'(t) - t^3 y(t) = 0$$

on obtient

$$t \times (2z'(t^2) + 4t^2 z''(t^2)) - 2tz'(t^2) - t^3 z(t^2) = t^3 (4z''(t^2) - z(t^2)) = 0$$

En posant $t^2 = x$ qui est dans I , on a $\forall x > 0, 4z''(x) - z(x) = 0$ dont les solutions sont

$$z(x) = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Conclusion : les solutions sur I , sont les fonctions y telles que

$$y(t) = C_1 e^{\frac{t^2}{2}} + C_2 e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice de khôlle 310

Résoudre (E) $(1 + e^x)y'' + y' - e^x y = 0$ en posant $z = y' + y$.

Solution : Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors y est dérivable deux fois et ainsi $z = y' + y$ est dérivable. On a alors

$$z' = y'' + y'$$

d'où, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = z(x) - y'(x) \text{ et } y''(x) = z'(x) - y'(x)$$

ainsi

$$\begin{aligned}(1+e^x)y''(x) + y'(x) - e^xy(x) &= (1+e^x)(z'(x) - y'(x)) + y'(x) - e^x(z(x) - y'(x)) \\ &= (1+e^x)z'(x) - e^xz(x) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $1+e^x \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, z est solution de $z' - \frac{e^x}{1+e^x}z = 0$ dont les solutions sont

$$z(x) = K_1 \exp\left(\int \frac{e^x}{1+e^x} dx\right) = K_1 \exp(\ln|1+e^x|) = K_1(1+e^x) \text{ où } K_1 \in \mathbb{R}$$

Puis on résout

$$y' + y = K_1(1+e^x)$$

La solution homogène est K_2e^{-x} , par variation de la constante on cherche une solution particulière sous la forme $K(x)e^{-x}$ où K est dérivable. On obtient $K'(x)e^{-x} = K_1(1+e^x)$ d'où $K'(x) = K_1(e^x + e^{2x})$. On choisit $K(x) = K_1\left(e^x + \frac{e^{2x}}{2}\right)$ ce qui donne

$$y_p(x) = K_1\left(1 + \frac{e^x}{2}\right)$$

Conclusion

$$y(x) = K_2e^{-x} + K_1\left(1 + \frac{e^x}{2}\right) \text{ où } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

En toute rigueur, on fait une synthèse. Si $y(x) = K_2e^{-x} + K_1\left(1 + \frac{e^x}{2}\right)$ alors y est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et

$$y'(x) = -K_2e^{-x} + \frac{K_1}{2}e^x, \quad y''(x) = K_2e^{-x} + \frac{K_1}{2}e^x$$

et ainsi

$$(1+e^x)y''(x) + y'(x) - e^xy(x) = (1+e^x)\left(K_2e^{-x} + \frac{K_1}{2}e^x\right) - K_2e^{-x} + \frac{K_1}{2}e^x - e^x\left(K_2e^{-x} + K_1\left(1 + \frac{e^x}{2}\right)\right) = 0$$

Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$y(x) = K_2e^{-x} + K_1\left(1 + \frac{e^x}{2}\right) \text{ où } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice de khôlle 311

(★) On se propose de résoudre sur $I =]-1, 1[$ l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 3xy' - 8y = 2x \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle

$$z'' + 9z = -\sin(2t) \quad (E_z)$$

2. Soit y deux fois dérivable sur I . On pose $J =]0, \pi[$ et on définit, pour $t \in J$,

$$z(t) = \sin(t)y(\cos(t))$$

- Justifier que z est bien définie et que z est deux fois dérivable sur J . Calculer alors $z'(t)$ et $z''(t)$ pour $t \in J$.
- Montrer que si y est solution de (E) alors z est solution de (E_z) .
- En déduire une expression simple de y .

3. Conclure.

Solution :

1. L'équation homogène est celle d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont

$$z(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$$

Puisque l'on commence à maîtriser le cours, il n'y a pas de résonance, on cherche une solution particulière de

$$(E_C) \quad z'' + 9z = -e^{2it}$$

sous la forme $z(t) = \alpha e^{2it}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ (on devrait poser $z(t) = p(t) e^{2it}$ pour obtenir une équation différentielle de la forme $p''(t) + (?)p'(t) + c \times p(t) = -1$ avec $c \neq 0$, donc $p(t) = \alpha = \frac{1}{c}$ constant est solution). On a alors

$$z'(t) = 2i\alpha e^{2it}, \quad z''(t) = -4\alpha e^{2it} \text{ et } z''(t) + 9z(t) = 5\alpha e^{2it} = -e^{2it}$$

d'où $z_C(t) = -\frac{1}{5}e^{2it}$ est une solution particulière de (E_C) puis $z_p(t) = -\frac{1}{5}\sin(2t)$ en est une de (E_z) . Les solutions de (E_z) sont donc

$$z(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) - \frac{1}{5}\sin(2t) \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

2.

- (a) On a $\cos \in D^2(J, I)$ (dérivable deux fois sur J et à valeurs dans I) et $f \in D^2(I, \mathbb{R})$ donc par composition $t \mapsto y(\cos t)$ est dérivable deux fois sur J . Puisque $\sin \in D^2(J, \mathbb{R})$, par produit, z est dérivable deux fois sur J . Ce qui est important c'est de dire que $\cos t \in I$ si $t \in J$.

Puis

$$\begin{aligned} z(t) &= \sin(t) y(\cos(t)) \\ z'(t) &= \cos(t) y(\cos(t)) + \sin(t) \times (-\sin(t) y'(\cos(t))) \\ &= \cos(t) y(\cos(t)) - \sin^2(t) y'(\cos(t)) \\ z''(t) &= -\sin(t) y(\cos(t)) + \cos(t) \times (-\sin(t) y'(\cos(t))) \\ &\quad - 2\sin(t) \cos(t) y'(\cos(t)) \\ &\quad - \sin^2(t) \times (-\sin(t) y''(\cos(t))) \\ &= -\sin(t) y(\cos(t)) - 3\sin(t) \cos(t) y'(\cos(t)) + \sin^3(t) y''(\cos(t)) \end{aligned}$$

- (b) Si y est solution de (E) alors z est dérivable deux fois sur J et $\forall t \in J$

$$\begin{aligned} z''(t) + 9z(t) &= \sin^3(t) y''(\cos(t)) - 3\sin(t) \cos(t) y'(\cos(t)) + 8\sin(t) y(\cos(t)) \\ &= \sin(t) \times (\sin^2(t) y''(\cos(t)) - 3\cos(t) y'(\cos(t)) + 8y(\cos(t))) \\ &= \sin(t) \times ((1 - \cos^2(t)) y''(\cos(t)) - 3\cos(t) y'(\cos(t)) + 8y(\cos(t))) \end{aligned}$$

or pour $x \in I$, on a $(x^2 - 1) y''(x) + 3xy'(x) - 8y(x) = 2x$. En posant $x = \cos t$ (qui est dans I si $t \in J$), on en déduit que

$$((1 - \cos^2(t)) y''(\cos(t)) - 3\cos(t) y'(\cos(t)) + 8y(\cos(t))) = -2\cos t$$

et ainsi

$$z''(t) + 9z(t) = -2\sin(t) \cos(t) = -\sin(2t)$$

ce qui prouve que z est solution de (E_z) !

- (c) Mais alors, il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$z(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) - \frac{1}{5}\sin(2t)$$

Reste à revenir à y ! On a donc (puisque $\sin t \neq 0$ si $t \in J$)

$$y(\cos(t)) = C_1 \frac{\cos(3t)}{\sin t} + C_2 \frac{\sin(3t)}{\sin t} - \frac{1}{5} \frac{\sin(2t)}{\sin t}$$

Pour $x \in I$, on peut poser $t = \arccos x$ (ce qui donne $\cos t = x$) et ainsi

$$y(x) = C_1 \frac{\cos(3 \arccos x)}{\sin(\arccos x)} + C_2 \frac{\sin(3 \arccos x)}{\sin(\arccos x)} - \frac{1}{5} \frac{\sin(2 \arccos x)}{\sin(\arccos x)}$$

Ce n'est pas vraiment simple ! Bon simplifions avant de faire $t = \arccos x$!

On a $\frac{\sin(2t)}{\sin t} = 2 \cos t = 2x$, et $\sin t = \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$. Puis

$$\begin{aligned} \cos(3t) + i \sin(3t) &= e^{3it} = (\cos t + i \sin t)^3 \\ &= \cos^3(t) + 3i \cos^2(t) \sin(t) - 3 \cos(t) \sin^2(t) - \sin^3(t) \end{aligned}$$

d'où (prendre les parties réelles et imaginaires)

$$\begin{aligned} \cos(3t) &= \cos^3(t) - 3 \cos(t) \sin^2(t) \\ \sin(3t) &= 3 \cos^2(t) \sin(t) - \sin^3(t) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\cos(3t)}{\sin(t)} &= \frac{\cos^3(t)}{\sin(t)} - 3 \cos(t) \sin(t) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} - 3x\sqrt{1-x^2} \\ \frac{\sin(3t)}{\sin(t)} &= 3 \cos^2(t) - \sin^2(t) = 4 \cos^2(t) - 1 = 4x^2 - 1 \end{aligned}$$

Conclusion

$$y(x) = C_1 \left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} - 3x\sqrt{1-x^2} \right) + C_2 (4x^2 - 1) - \frac{2x}{5} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

ouf !

3. En toute rigueur il faudrait faire la synthèse (dériver cette horreur !) ou bien justifier que si z est dérivable deux fois alors y aussi. Ce qui est simple car on peut écrire $y(x) = \frac{z(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Conclusion, les solutions sont bien celles trouvées !

9.4 Des questions bien étranges

Exercice de khôlle 312

(★) Soit l'équation

$$(E) \quad y'' + y = \frac{2}{\sin^3 t}$$

- Résoudre l'équation homogène sur $\mathbb{R}$.
- Soit y_0 une solution de l'équation homogène (à vous de la choisir), en posant $y(t) = z(t) y_0(t)$, déterminer une solution particulière de (E) sur $]0, \pi[$.

Solution :

- Les solutions de l'équation homogène sont $y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Il nous faut donc une solution particulière de (E) . Repoussons un peu le choix de y_0 . Si $y(t) = z(t) y_0(t)$ alors

$$\begin{aligned} y'(t) &= z'(t) y_0(t) + z(t) y_0'(t) \\ y''(t) &= z''(t) y_0(t) + 2z'(t) y_0'(t) + z(t) y_0''(t) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= z''(t) y_0(t) + 2z'(t) y_0'(t) + z(t) \underbrace{(y_0''(t) + y_0(t))}_{=0} \\ &= z''(t) y_0(t) + 2z'(t) y_0'(t) \end{aligned}$$

Si on pose $Z(t) = z'(t)$ alors y est solution de (E) si et seulement si Z est solution de

$$(E_Z) \quad y_0(t) Z'(t) + 2y_0'(t) Z(t) = \frac{2}{\sin^3 t}$$

On veut normaliser cette équation pour la résoudre sur $]0, \pi[$. Il faut donc que y_0 ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, cela nous donne une super indication ! On choisit donc $y_0(t) = \sin(t)$ et ainsi, sur $]0, \pi[$

$$(E_Z) \iff Z'(t) + 2 \frac{\cos(t)}{\sin(t)} Z(t) = \frac{2}{\sin^4 t}$$

La solution de l'équation homogène est $Z(t) = K \exp\left(-\int 2 \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt\right) = K \exp(-\ln(\sin^2(t))) = \frac{K}{\sin^2(t)}$ (car $\frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{y_0'(t)}{y_0(t)}$). Puis par variation de la constante, si $Z(t) = \frac{K(t)}{\sin^2(t)}$, on obtient $K'(t) = \frac{2}{\sin^2 t}$. Ce n'est pas une dérivée connue, mais en revanche $\frac{1}{\cos^2}$ est la dérivée de $\tan$. Dérivons $\cotan(t)$, cela donne $\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' = \frac{-\sin^2(t) - \cos^2(t)}{\sin^2(t)} = -\frac{1}{\sin^2(t)}$ bingo ! Ainsi on choisit

$$K(x) = \int \frac{2}{\sin^2 t} dt = -2 \cotan(t) = -2 \frac{\cos t}{\sin t}$$

et une solution particulière est $Z_p(t) = -2 \frac{\cos t}{\sin^3 t}$.

Et comme on se souvient que l'on cherche uniquement une solution particulière de (E_Z) pour en avoir une de (E) , on choisit

$$z_p'(t) = Z_p(t) = -2 \frac{\cos t}{\sin^3 t}$$

d'où (cela n'en finit pas !) en remarquant que $-2 \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ est du type $\frac{-2u'}{u^3}$ dont provient de la dérivée de $\frac{1}{u^2} = u^{-2}$ on a

$$z_p(t) = \frac{1}{\sin^2(t)}$$

est une solution particulière et au final

$$y_p(t) = \frac{1}{\sin(t)}$$

est une solution particulière de (E) . Les solutions de (E) sur $]0, \pi[$ sont donc

$$y(t) = y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + \frac{1}{\sin(t)} \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice de khôlle 313

(★) Déterminer les fonctions f , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\pi - x)$$

Solution : Analyse : Soit f une telle fonction, par composition $x \mapsto f(\pi - x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, en dérivant, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(\pi - x) = -f(\pi - (\pi - x)) = -f(x)$$

Ainsi f est solution de $y'' + y$, il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$.

Synthèse : Soit f de cette forme alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) \\ f(\pi - x) &= C_1 \cos(\pi - x) + C_2 \sin(\pi - x) = -C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \end{aligned}$$

Ainsi f est solution du problème posé si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, (C_2 + C_1) \cos(x) - (C_1 + C_2) \sin(x)$$

Avec $x = 0$ on obtient $C_2 = -C_1$ (condition nécessaire) et si $C_2 = -C_1$ on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\pi - x)$.

Conclusion : les solutions sont de la forme

$$f(x) = C_1 (\cos(x) - \sin(x)) \text{ où } C_1 \in \mathbb{R}$$

Exercice de khôlle 314

(★) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t) f(t) dt = x+1$.

Solution : Analyse : On commence par écrire la condition sous la forme

$$(E) \quad f(x) = -x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt + x + 1$$

L'idée fondamentale est de poser $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et $G(x) = \int_0^x t f(t) dt$ qui sont respectivement des primitives de f et de $g : t \mapsto t f(t)$ (car f et g sont continues sur $I = \mathbb{R}$, que $0 \in I$ et d'après le TFA). On peut alors écrire (E) sous la forme

$$(E) \quad f(x) = -xF(x) + G(x) = x + 1$$

Ainsi f est dérivable en tant que sommes et produits de fonction dérivable. On dérive donc (E) pour avoir

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -F(x) - xF'(x) + G'(x) + 1 \\ &= -F(x) - xf(x) + xf(x) + 1 = -F(x) + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que f' est dérivable (car F l'est) en en redérivant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -F'(x) = f(x)$$

Bref f est solution de $y'' + y = 0$. Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$.

Synthèse : Soit f de la forme $f(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$ alors en posant $A(x) = f(x) + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt - x - 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x) + C_2 \\ \int_0^x t f(t) dt &= \int_0^x t (C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)) dt \stackrel{IPP}{=} [t(C_1 \sin(t) - C_2 \cos(t))]_0^x - \int_0^x (C_1 \sin(t) - C_2 \cos(t)) dt \\ &= x(C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x)) - (-C_1 \cos x + C_1 - C_2 \sin(x)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 A(x) &= C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \\
 &\quad + x(C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x) + C_2) \\
 &\quad - x(C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x)) + (-C_1 \cos x + C_1 - C_2 \sin(x)) \\
 &\quad - x - 1 \\
 &= x(C_2 - 1) + (C_1 - 1)
 \end{aligned}$$

Ainsi (unicité des coefficients), $\forall x \in \mathbb{R}$, $A(x) = 0$ si et seulement si $C_1 = C_2 = 1$. La seule solution est donc définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

Remarque : Avec $x = 0$ dans (E) on avait $f(0) = 1$, puis $x = 0$ dans $f'(x) = -F(x) - xF'(x) + G'(x) + 1$ donne $f'(0) = 1$. Ce qui conduit à un problème de Cauchy et permet de déterminer les constantes C_1 et C_2 directement.

Exercice de khôlle 315

(★) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t) f(t) dt = 1$$

déterminer l'expression de f .

Solution : Soit f une telle fonction alors

$$\begin{aligned}
 (E) \quad f(x) &= 1 - 2 \int_0^x \cos(x-t) f(t) dt \\
 &= 1 - 2 \cos(x) \int_0^x \cos(t) f(t) dt - 2 \sin(x) \int_0^x \sin(t) f(t) dt
 \end{aligned}$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, $g : t \mapsto \cos(t) f(t)$ et $h : t \mapsto \sin(t) f(t)$ aussi. Ainsi par le TFA, $G : t \mapsto \int_0^t \cos(t) f(t) dt$ et $H : t \mapsto \int_0^t \sin(t) f(t) dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ de dérivées respectives g et h . Ainsi (E) s'écrit

$$(E_s) \quad f(x) = 1 - 2 \cos(x) G(x) - 2 \sin(x) H(x)$$

On en déduit que f est dérivable. On dérive donc pour obtenir

$$\begin{aligned}
 (E_d) \quad f'(x) &= 2 \sin(x) G(x) - 2 \cos(x) G'(x) - 2 \cos(x) H(x) - 2 \sin(x) H'(x) \\
 &= 2 \sin(x) G(x) - 2 \cos(x) H(x) - 2 \cos^2(x) f(x) - 2 \sin^2(x) f(x) \\
 &= 2 \sin(x) G(x) - 2 \cos(x) H(x) - 2f(x)
 \end{aligned}$$

Le membre de droite étant dérivable, on peut re-dériver pour avoir

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 2 \cos(x) G(x) + 2 \sin(x) H(x) + 2 \sin(x) G'(x) - 2 \cos(x) H'(x) - 2f'(x) \\
 &= 1 - f(x) + 2 \sin(x) \cos(x) f(x) - 2 \cos(x) \sin(x) f(x) - 2f'(x) \text{ d'après } (E_s) \\
 &= 1 - f(x) - 2f'(x)
 \end{aligned}$$

On en déduit que f est solution de $y'' + 2y' + y = 1$. De plus $x = 0$ dans (E_s) et (E_d) donne $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2f(0) = -2$. Ainsi f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 1 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = -2 \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$ et une solution particulière évidente est $y(x) = 1$. Les solutions de $y'' + 2y' + y = 1$ sont donc de la forme $y(x) = (C_1 + C_2x)e^x + 1$. Puis $y(0) = 1$ donne $C_1 = 0$ et $y'(0) = C_2 = -2$. La seule solution possible est donc donnée par

$$f(x) = 1 - 2xe^x$$

On peut vérifier que pour $f(x) = 1 - 2xe^x$ on a bien $f'(x) = 1 - 2\cos(x) \int_0^x \cos(t) f(t) dt - 2\sin(x) \int_0^x \sin(t) f(t) dt$.

Ceci montre que f est l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t) f(t) dt = 1$.

Exercice de khôlle 316

Soit f telle que $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x$, indiquez (en justifiant) si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
2. Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$.

Solution : On résout l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2e^x$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$, les solutions de l'équation homogène sont donc $(c + bx)e^x$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour la solution particulière, on pose $y(x) = z(x)e^x$, on remplace pour avoir $z'' = 2$, une solution est $z(x) = x^2$. Conclusion, il existe $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + bx + c)e^x$ et ainsi $f'(x) = (x^2 + (2+b)x + b + c)e^x$. On remarque que le signe de f et de f' est donné par des polynômes du second degré.

1. Si $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + (2+b)x + b + c > 0 \text{ donc } \Delta_{f'} = (2+b)^2 - 4(b+c) = b^2 - 4c + 4 < 0$$

Le signe de $f(x)$ est celui de $x^2 + bx + c$, puisque

$$\Delta_f = b^2 - 4c = \Delta_{f'} - 4 < 0$$

on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + bx + c < 0, \text{ donc } f(x) < 0 \text{ également}$$

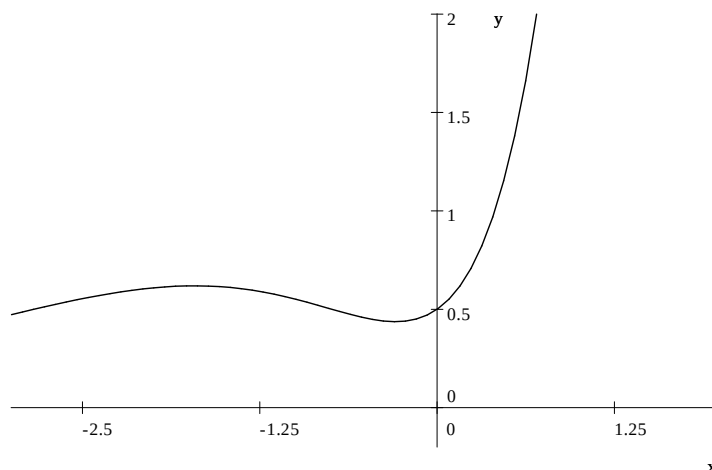
La première proposition est vraie !

2. Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + bx + c > 0 \text{ donc } \Delta_f = b^2 - 4c < 0$$

car il n'y a pas de racines. Mais alors $\Delta_{f'} = \Delta_f + 4$ peut être positif ! Par exemple, il suffit de prendre $b = 0$, $c = \frac{1}{2}$ alors $\Delta_f = -\frac{1}{2}$ et $\Delta_{f'} > 0$. Dans ce cas f' prend des valeurs négatives alors que f non. On a représenté en dessous le graphe de f pour $b = 0$ et $c = \frac{1}{2}$, on constate que f est positive mais non strictement croissante

(ce qui prouve que f' n'est pas strictement positive).



Graphique de $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)e^x$

La seconde proposition est donc fausse !

Exercice de khôlle 317

Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{2x} f(-x) \quad (E)$$

Solution : Analyse : Soit f une solution, par composition $x \mapsto f(-x)$ est dérivable et par produit $x \mapsto e^{2x} f(-x)$ aussi. Ainsi f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'égalité (E), on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2e^{2x} f(-x) + e^{2x} \times (-f'(-x))$$

On remplace $e^{2x} f(-x)$ par $f'(x)$ et avec $-x$ dans (E), on a $f'(-x) = e^{-2x} f(x)$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2f'(x) - e^{2x} \times (e^{-2x} f(x)) = 2f'(x) - f(x)$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2$, il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (C_1 x + C_2) e^x$$

Synthèse : Soit f définie par $f(x) = (C_1 x + C_2) e^x$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= C_1 e^x + (C_1 x + C_2) e^x = (C_1 x + C_1 + C_2) e^x \\ e^{2x} f(-x) &= e^{2x} \times (-C_1 x + C_2) e^{-x} = (-C_1 x + C_2) e^x \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, (C_1 x + C_1 + C_2) e^x = (-C_1 x + C_2) e^x$$

en divisant par $e^x \neq 0$, cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2C_1 x + C_1 = 0$$

donc à $C_1 = 0$ (unicité des coefficients).

Les seules solutions sont donc les fonctions de la forme

$$f(x) = Ce^x \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

CHAPITRE 10

ENTER THE MATRIX

10.1 Sur les définitions

Exercice de khôlle 318

Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ et AA^T sont symétriques.
2. Montrer que si X est symétrique alors $A^T X + XA$ l'est aussi.
3. Montrer que si X est antisymétrique alors $A^T X + XA$ l'est aussi.

Solution : Rappel : si M et N sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $(M + N)^T = M^T + N^T$ et $(MN)^T = N^T M^T$.

1. Soit $B = A^T A$ alors $B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$. De même $(AA^T)^T = (A^T)^T A = AA^T$ donc AA^T et $A^T A$ sont symétriques.
2. On a, avec X symétrique

$$\begin{aligned}(A^T X + XA)^T &= (A^T X)^T + (XA)^T = X^T (A^T)^T + A^T X^T \\ &= XA + A^T X = A^T X + XA \text{ car } X^T = X\end{aligned}$$

3. De même

$$\begin{aligned}(A^T X + XA)^T &= (A^T X)^T + (XA)^T = X^T (A^T)^T + A^T X^T \\ &= -XA + A^T \times (-X) = -A^T X - XA \text{ car } X^T = -X\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 319

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^T = M^2$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, justifier que $(M^T)^p = (M^p)^T$ et en déduire que $M^4 = M$.
2. On suppose que M est inversible.
 - (a) Est-il possible d'avoir M symétrique ? Et M antisymétrique ?
 - (b) Montrer que $M^3 = I_n$.

Solution :

1. Par récurrence on montre que $(M^T)^p = (M^p)^T$. C'est vrai si $p = 0$ car $(M^T)^0 = I_n$ et $(M^0)^T = I_n^T = I_n$. Puis si c'est vrai au rang p alors

$$\begin{aligned} (M^T)^{p+1} &= (M^T)^p \times M^T \underset{H R_p}{=} (M^p)^T \times M^T \\ &= (M \times M^p)^T \text{ car } (AB)^T = B^T A^T \\ &= (M^{p+1})^T \end{aligned}$$

On en déduit, dans notre cas que

$$M^4 = (M^2)^2 = (M^T)^2 = (M^2)^T = (M^T)^T = M$$

2.

- (a) Si M est symétrique alors $M^T = M$ alors $M = M^2$ et comme on a supposé M inversible, en multipliant par M^{-1} on obtient

$$MM^{-1} = I_n = M^2 \times M^{-1} = M$$

conclusion $M = I_n$ qui est bien symétrique et vérifie $M^T = M^2$.

Si M est antisymétrique, alors $M^T = -M$ ce qui donne $-M = M^2$ et de même

$$-M \times M^{-1} = -I_n = M^2 \times M^{-1} = M$$

donc $M = -I_n$, absurde (car $-I_n$ n'est pas antisymétrique).

On peut donc avoir M symétrique, mais pas antisymétrique.

- (b) On a supposé M inversible et on a vu que $M^4 = M$, en multipliant par M^{-1} , on obtient $M^4 \times M^{-1} = MM^{-1} = I_n$, ce qui donne $M^3 = I_n$.

Exercice de khôlle 320

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, on dit que A est semblable à B s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ (i.e. $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible) telle que

$$A = PBP^{-1}$$

On note alors $A \underset{S}{\sim} B$.

1. Montrer que ① $A \underset{S}{\sim} A$ ② $A \underset{S}{\sim} B \implies B \underset{S}{\sim} A$ et ③ $A \underset{S}{\sim} B$ et $B \underset{S}{\sim} C \implies A \underset{S}{\sim} C$.

La propriété ① permet donc de dire que A et B sont semblables.

2. On suppose que $A \underset{S}{\sim} B$, montrer que si $p \in \mathbb{N}$ alors $A^p \underset{S}{\sim} B^p$.

3. On suppose que $A \underset{S}{\sim} B$ et A inversible. Justifier que B est aussi inversible et que $A^{-1} \underset{S}{\sim} B^{-1}$.

Solution :

1. Pour ①, avec $P = I_n \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $A = I_n \times A \times I_n^{-1}$ donc $A \underset{S}{\sim} A$. Pour ②, si $A = QBQ^{-1}$, où Q est inversible, alors $B = Q^{-1}AQ$ donc avec $P = Q^{-1}$ dans la définition, on $B \underset{S}{\sim} A$. Pour ③, si $A = PBP^{-1}$ et $B = QCQ^{-1}$ où P et Q sont inversibles, alors $A = (PQ)C(Q^{-1}P) = RCR^{-1}$ où $R = PQ$ est inversible. En effet, R est inversible en tant que produit de matrices inversibles et $R^{-1} = (PQ)^{-1} = Q^{-1}P$.
2. Si $A = PBP^{-1}$ où P est inversible, par récurrence, on a

$$A^p = PB^pP^{-1}$$

C'est vrai si $p = 0$ car $A^0 = I_n = PI_nP^{-1} = (PI_n)P^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Puis si c'est vrai au rang p , alors

$$A^{p+1} = A^p \times A \underset{H R_p}{=} (PB^pP^{-1}) \times (PBP^{-1}) = PB^p(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^p(I_n)BP^{-1} = PB^{p+1}P^{-1}$$

Ceci prouve que $A^p \underset{S}{\sim} B^p$.

3. Si A est inversible et si $A = PBP^{-1}$ où P est inversible alors $B = P^{-1}AP$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles.

On peut aussi écrire que

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P) \times \det(B) \times \det(P^{-1}) = \det(P) \times \det(B) \times \frac{1}{\det(P)} = \det(B)$$

Puisque A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$ donc $\det(B) \neq 0$ et ainsi B est inversible.

On en déduit que $A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$ d'où $A^{-1} \underset{S}{\sim} B^{-1}$.

10.2 Calcul matriciel

Exercice de khôlle 321

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \frac{i}{j}$.

1. Calculer A^2 à l'aide de la formule donnant le coefficient générique du produit de deux matrices.
2. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = CL$.
3. Que vaut LC ? Retrouver alors l'expression de A^2 .

Solution : Avant tout, on regarde pour n petit ($n = 3$) ce que vaut A . Dans ce cas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On peut alors constater que $A = 3A$.

1. Si $A^2 = ((\alpha_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n \frac{i}{k} \times \frac{k}{j} = \sum_{k=1}^n \frac{i}{j} = na_{i,j}$$

Ainsi $A^2 = nA$.

2. Pour avoir une idée, on calcule $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ b_1 a_3 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$. Et ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = A$$

On peut le prouver en écrivant que $C = ((c_{i,j}))_{1 \leq i \leq n, j=1}$, $L = ((\ell_{i,j}))_{i=1, 1 \leq j \leq n}$ avec $c_{i,j} = i$ et $\ell_{i,j} = \frac{1}{j}$ alors

$\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^1 c_{i,k} \ell_{k,j}$$

donc $A = CL$.

3. On $LC = \sum_{k=1}^n i \times \frac{1}{i} = n$ d'où

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = nCL = nA$$

Exercice de khôlle 322

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Avec la définition du produit de matrices, montrer que $A^2 = B$.

2. Soit $C = ((c_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ où $c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ -1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, calculer $A \times C$. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer l'inverse de B .

Solution :

1. Notons $A^2 = B = ((b_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$. Puisque A est triangulaire supérieure, on sait que B également et que les termes de la diagonale de B sont tous égaux à 1. Ainsi $b_{i,j} = 0$ si $i < j$ et $b_{i,i} = 1$. Pour $j > i$, on a

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times a_{k,j}$$

Puisque $a_{k,j} = 0$ si $k > j$, $a_{k,j} = 1$ si $k \leq j$, $a_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $a_{i,k} = 1$ si $k \geq i$

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \sum_{k=1}^j a_{i,k} \times a_{k,j} + \sum_{k=j+1}^n a_{i,k} \times a_{k,j} = \sum_{k=1}^j a_{i,k} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} + \sum_{k=i}^j a_{i,k} \\ &= \sum_{k=i}^j a_{i,k} = \sum_{k=i}^j 1 = (j - i + 1) \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

2. On a

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi AC est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Reste à déterminer les coefficients qui sont au dessus de la diagonale. Si on note $AC = ((d_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ alors pour $j > i$ (donc $j - 1 \geq i$)

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times c_{k,j} = a_{i,j-1} \times c_{j-1,j} + a_{i,j} c_{j,j} = a_{i,j-1} - a_{i,j} = 1 - 1 = 0$$

On a donc $AC = I_n$ d'où A inversible et $C = A^{-1}$.

3. On a alors B inversible et $B^{-1} = (A^{-1})^2 = C^2$. On peut calculer C^2 pour avoir

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 323

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = ((b_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par $a_{i,j} = i \times j$ et $b_{i,j} = \frac{i}{j}$.

1. Calculer AB et BA à l'aide de la formule donnant le coefficient générique du produit de deux matrices.
2. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que A et B ne sont pas inversibles.
3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ (que l'on précisera et qui est un **entier**) tel que $ABA - BAB = \lambda(A - B)$.

Solution : On note $C = AB = ((c_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D = BA = ((d_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. On sait que pour $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, on a

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j} = \sum_{k=1}^n i \times k \times \frac{k}{j} = \frac{i}{j} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{i}{j} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} b_{i,j}$$

Ainsi $C = AB = \alpha B$ où $\alpha = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. De même

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} \times a_{k,j} = \sum_{k=1}^n \frac{i}{k} \times k \times j = \sum_{k=1}^n ij = nij = n \times a_{i,j}$$

d'où $D = BA = nA$.

2. Si A est inversible alors $B = BA \times A^{-1} = nA \times A^{-1} = nI_n$ ce qui est clairement faux (car par exemple $b_{1,n} \neq 0$).
De même si B est inversible alors $A = AB \times B^{-1} = \lambda BB^{-1} = \lambda I_n$, ce qui est tout aussi faux !
3. On a

$$\begin{aligned} ABA &= (AB) \times A = \alpha BA = n\alpha A \\ BAB &= (BA) \times B = nAB = n\alpha B \end{aligned}$$

d'où

$$ABA - BAB = n\alpha(A - B) = \lambda(A - B) \text{ où } \lambda = n \times \sum_{k=1}^n k^2 \in \mathbb{N}$$

Exercice de khôlle 324

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = u_n A + v_n A^2$.
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = u_n - v_n$ est géométrique.
3. En considérant $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = u_n + 2v_n$, calculer u_n et v_n en fonction de n .

Solution :

1. Par récurrence sur n , on définit $\mathcal{P}(n) = \ll \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = u_n A + v_n A^2 \gg$. C'est vrai pour $n = 1$ en prenant $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$ et pour $n = 2$ en posant $u_2 = 0$ et $v_2 = 1$. Supposons que cela soit vrai à $n \geq 1$ fixé, il existe donc u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n A^2$. On a alors

$$A^{n+1} = u_n A^2 + v_n A^3$$

Un calcul simple donne $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la moindre des choses, c'est que $\mathcal{P}(3)$ soit vraie, il doit donc exister deux réels u_3 et v_3 tels que

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3 = u_3 A + v_3 A^2 = u_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 + 3v_3 & u_3 + v_3 & u_3 + v_3 \\ u_3 + v_3 & v_3 & v_3 \\ u_3 + v_3 & v_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $v_3 = 1$ et $u_3 = 2$. On a donc

$$A^{n+1} = u_n A^2 + v_n (2A + A^2) = 2v_n A + (u_n + v_n) A^2$$

En posant $u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$ (qui sont des réels) on a montré l'hérédité.

2. On a $x_{n+1} = 2v_n - (u_n + v_n) = v_n - u_n = -x_n$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison -1 .
 3. De même $y_{n+1} = 2v_n + 2(u_n + v_n) = 2(u_n + 2v_n) = 2y_n$, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 2. On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n = (-1)^{n-1} x_1 = (-1)^{n-1} \text{ et } y_n = 2^{n-1} y_1 = 2^{n-1}$$

d'où

$$\begin{cases} u_n - v_n = (-1)^{n-1} \\ u_n + 2v_n = 2^{n-1} \end{cases}$$

ce qui donne avec $L_2 - L_1$

$$v_n = \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} \text{ puis } u_n = \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3}$$

Exercice de khôlle 325

Soit G l'ensemble des matrices de la forme $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que le produit de deux matrices de G est encore dans G .
- Montrer qu'une matrice de G est inversible et que son inverse est dans G .
- Calculer $M(x)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux matrices de G alors

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y^2 & 1 & y \\ -2y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(x+y)^2 & 1 & (x+y) \\ -2(x+y) & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x+y) \in G$$

2. Soit $M(x)$ une matrice de G alors $M(x)M(-x) = M(0) = I_3$ donc $M(x)$ est inversible et $M(x)^{-1} = M(-x) \in G$.

3. On a donc $M(x)^2 = M(x) \times M(x) = M(2x)$ et on conjecture que $M(x)^n = M(nx)$. Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) \equiv M(x)^n = M(nx)$. C'est vrai si $n = 0$, puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors

$$M(x)^{n+1} = M(x)^n \times M(x) \underset{HR_n}{=} M(nx) \times M(x) = M((n+1)x)$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

Exercice de khôlle 326

On veut résoudre l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ et $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est à coefficients positifs.

- Montrer que si X est solution alors X commute avec A .
- Déterminer la forme générale des matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .
- Résoudre alors l'équation $X^2 = A$.

Solution :

1. Si $X^2 = A$ alors $XA = A^2A = A^3 = AA^2 = AX$, ainsi X et A commutent.

2. Si $X = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 4d & 2(d+8g) \\ b & 4e & 2(8h+e) \\ c & 4f & (2f+16i) \end{pmatrix} \\ AX &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ 2(2b+c) & 2(f+2e) & (4h+2i) \\ 16c & 16f & 16i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$XA - AX = \begin{pmatrix} 0 & 3d & (2d+15g) \\ -(3b+2c) & -2f & 2(6h+e-i) \\ -15c & -12f & 2f \end{pmatrix}$$

On a donc $XA - AX = 0$ si et seulement si

$$\begin{aligned} d &= 0 \text{ puis } g = 0 \text{ (ligne 1)} \\ f &= 0 \text{ puis } c = 0 \text{ (ligne 3)} \\ 3b+2c &= 0 \text{ et } 6h+e-i = 0 \text{ soit } b = 0 \text{ et } i = 6h+e \end{aligned}$$

La forme générale de X qui commute avec A est donc

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & 6h+e \end{pmatrix}$$

3. Mais alors

$$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ? & ? \\ 0 & e^2 & ? \\ 0 & 0 & (6h+e)^2 \end{pmatrix}$$

Analyse : Si $X^2 = A$ alors $a^2 = 1$, $e^2 = 4$ et $(6h+e)^2 = 16$ d'où (puisque X est à coefficients positifs)

$$a = 1, e = 2 \text{ et } h = \frac{1}{3}$$

d'où

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $X^2 = A$ dans ce cas.

Remarque : Si on ne cherche par X à coefficients positifs, on obtient

$$a = \varepsilon_1, e = 2\varepsilon_2, 6h + e = 4\varepsilon_3 \text{ d'où } h = \frac{4\varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{6}$$

$$\text{avec } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$$

d'où les solutions (au nombre de 8)

$$X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & \frac{4\varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{6} \\ 0 & 0 & 4\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{On peut alors vérifier que } \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & \frac{4\varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{6} \\ 0 & 0 & 4\varepsilon_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\varepsilon_2^2 & \frac{2}{3}(4\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2) \\ 0 & 0 & 16\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} = A \text{ car } \varepsilon_i^2 = 1.$$

Exercice de khôlle 327

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - 2I)(A + 4I)$ où $I = I_3$. En déduire que A est inversible et préciser A^{-1} .
2. Montrer qu'il existe deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = u_n I + v_n A$.
3. On pose $a_n = u_n + 2v_n$ et $b_n = u_n - 4v_n$, que dire des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
4. En déduire A^n en fonction de n . La formule obtenue est-elle valable pour $n = -1$?

Solution :

1. Un simple calcul donne $(A - 2I)(A + 4I) = 0$. Puisque $(A - 2I)(A + 4I) = A^2 + 2A - 8I$ on en déduit que

$$\frac{A^2 + 2A}{8} = A \times \left(\frac{A + 2I}{8} \right) = I$$

ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{A + 2I}{8}$.

2. Par récurrence sur n , on définit $\mathcal{P}(n) = \ll \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = u_n I + v_n A \gg$. C'est vrai pour $n = 0$ en prenant $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ (et pour $n = 1$ en posant $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$). Supposons que cela soit vrai à $n \geq 1$ fixé, il existe donc u_n et v_n tels que $A^n = u_n I + v_n A$. On a alors (on se souvient que $A^2 + 2A - 8I = 0$)

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= u_n A + v_n A^2 = u_n A + v_n (-2A + 8I) \\ &= 8v_n I + (u_n - 2v_n) A \end{aligned}$$

Si on pose $u_{n+1} = 8v_n$ et $v_{n+1} = u_n - 2v_n$ alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc définies par

$$u_{n+1} = 8v_n, \quad v_{n+1} = u_n - 2v_n, \quad u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 0$$

3. On a alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} + 2v_{n+1} = 8v_n + 2(u_n - 2v_n) = 2(u_n + 2v_n) = 2a_n \\ b_{n+1} &= u_{n+1} - 4v_{n+1} = 8v_n - 4(u_n - 2v_n) = -4(u_n - 4v_n) = -4b_n \end{aligned}$$

Les deux suites sont donc géométriques. On a alors

$$a_n = 2^n a_0 = 2^n \text{ et } b_n = (-4)^n b_0 = (-4)^n$$

4. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_n + 2v_n = 2^n \\ u_n - 4v_n = (-4)^n \end{cases} \text{ d'où } u_n = \frac{2^{n+1} + (-4)^n}{3} \text{ et } v_n = \frac{2^n - (-4)^n}{6}$$

et ainsi

$$A^n = \frac{2^{n+1} + (-4)^n}{3} I + \frac{2^n - (-4)^n}{6} A$$

Avec $n = -1$, on a

$$\frac{2^{-1+1} + (-4)^{-1}}{3} I + \frac{2^{-1} - (-4)^{-1}}{6} A = \frac{2I + A}{8} = A^{-1}$$

La formule est donc encore valable !

Exercice de khôlle 328

On considère les deux suites récurrentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0, v_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + \alpha b^n \text{ et } v_{n+1} = bv_n + \alpha a^n$$

où a, b et α sont des réels. On pose $M = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & v_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$, en déduire u_n et v_n lorsque $a \neq b$.
2. Pour $a = b$, calculer M^n et en déduire u_n dans ce cas.

Solution :

1. Par récurrence sur n , on montre $\mathcal{P}(n) = \ll M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & v_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \gg$. C'est vrai pour $n = 0$

car $a^0 = b^0 = 1$ et $u_0 = v_0 = 0$.

Puis, en écrivant que $M^{n+1} = M \times M^n$, on a

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & au_n + \alpha b^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$$

et de même avec $M^{n+1} = M^n \times M$, on a

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & v_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & bv_n + \alpha a^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & v_{n+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$ et ainsi $u_{n+1} = v_{n+1}$ d'où

$$au_n + \alpha b^n = bu_n + \alpha a^n$$

ce qui donne pour $a \neq b$:

$$u_n = v_n = \alpha \frac{b^n - a^n}{b - a}$$

2. Pour $a = b$, on calcule M^n par le binôme car

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = D + N \text{ où } D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ permet l'usage du binôme}$$

Puis $D^2 = \mathcal{O}$ (matrice nulle), donne

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \text{ (a priori si } n \geq 1) \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & n\alpha a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & n\alpha a^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est encore vrai si $n = 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = n\alpha a^{n-1}$$

On peut remarquer que $\alpha \frac{b^n - a^n}{b - a}$ tend vers $n\alpha a^{n-1}$ si b tend vers a , car c'est le taux d'accroissement entre a et b de $x \mapsto x^n$.

Exercice de khôlle 329

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A soit triangulaire supérieure et commute avec sa transposée. On note $M = AA^T - A^T A = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Pour $n = 2$, déterminer la forme générale de A .
2. Pour $n = 3$, en considérant $m_{1,1}$ montrer que l'on peut se ramener au cas $n = 2$.
3. Pour n quelconque, montrer que A est diagonale.

Solution :

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ alors

$$M = AA^T - A^T A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & -ab + bc \\ -ab + bc & -b^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $M = 0 \implies b = 0$ et $A = \text{Diag}(a, c)$ qui commute bien avec sa transposée (qui n'est rien d'autre qu'elle-même).

2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + d^2 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \\ A^T A &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + d^2 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $M = 0 \implies b = d = 0$. Mais alors

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ où } B = \begin{pmatrix} c & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

On a alors

$$AA^T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix} \text{ et } A^T A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & B^T B \end{pmatrix}$$

Puis $M = 0 \implies BB^T = B^T B$ où B est triangulaire supérieure. D'après la première question, on en déduit que B est diagonale. Conclusion A est diagonale et (synthèse) dans ce cas commute avec sa transposée.

3. Par récurrence, on montre que A est diagonale. C'est vrai si $n = 2$, puis si

$$A = \begin{pmatrix} a & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \text{ où } X = (x_1 \ \cdots \ x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure

alors (y réfléchir pour se convaincre)

$$AA^T = \begin{pmatrix} a & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ X^T & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + XX^T & XB \\ BX^T & BB^T \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ X^T & B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & X \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & aX \\ aX^T & B^T B \end{pmatrix}$$

Mais $XX^T = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ d'où

$$M = 0 \implies x_1^2 + \cdots + x_n^2 \implies X = 0$$

puis $BB^T = B^T B$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure donc (B) diagonale. Conclusion A est diagonale et (synthèse) dans ce cas commute avec sa transposée.

Exercice de khôlle 330

On définit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A_1 A_2$. On admet pour la suite (simple calcul) que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2, i \neq j \text{ on a } A_i A_j = A_1 A_2$$

$$\forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, A_i^2 = A_i$$

2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = u_n A_1 + v_n A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} u_n - v_n + 1 & -u_n + v_n & v_n - 1 \\ -v_n + 1 & v_n & v_n - 1 \\ u_n - v_n & -u_n + v_n & v_n \end{pmatrix}$$

En déduire A^n en fonction de n .

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $(I_3 + A)^n$.

Solution :

1. Simple calcul, on a $A_1 A_2 = \mathcal{O}$ (matrice nulle)

2. Par récurrence sur n , on définit $\mathcal{P}(n) = \langle \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = u_n A_1 + v_n A_2 + A_3 \rangle$. Pour $n = 1$, on constate si on prend $v_1 = 2$ (second coefficient de la diagonale) puis $u_1 = 3$ on a $A = 3A_1 + 2A_2 + A_3$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = u_n A_1 + v_n A_2 + A_3$. Mais alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = (u_n A_1 + v_n A_2 + A_3) \times (3A_1 + 2A_2 + A_3)$$

En développant on obtient (ne pas oublier que $A_i A_j = \bigcirc$ et $A_i^2 = A_i$), on obtient

$$A^{n+1} = 3u_n A_1 + 2v_n A_2 + A_3$$

Ainsi, en posant $u_{n+1} = 3u_n$ et $v_{n+1} = 3v_n$ on a $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Les deux suites sont géométriques de raison 3 pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et 2 pour $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $u_1 = 3$ et $v_1 = 2$ ainsi $u_n = 3^n$ et $v_n = 2^n$.

Conclusion

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2^n + 1 & 2^n - 3^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ +3^n - 2^n & 2^n - 3^n & 2^n \end{pmatrix} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } A^0 = I_3$$

3. Puisque $AI_3 = I_3 A = A$ on peut appliquer le binôme. On a alors

$$\begin{aligned} (I_3 + A)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k \\ &= \binom{n}{0} A^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3^k A_1 + 2^k A_2 + A_3) \\ &= I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k \right) A_1 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \right) A_2 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) A_3 \end{aligned}$$

Mais pour $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k = \left(-\binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) = (-1 + (1+x)^n)$$

d'où

$$(I_3 + A)^n = I_3 + (4^n - 1) A_1 + (3^n - 1) A_2 + (2^n - 1) A_3$$

Exercice de khôlle 331

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Calculer B^2 et en déduire B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer alors A^n en fonction de n , A et I_3 .
3. La formule trouvée permet-elle de montrer que A est inversible et d'en déduire A^{-1} ?

Solution : Un simple calcul donne $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. D'où (calcul) $B^2 = -B$ puis par récurrence on montre que pour $n \geq 1$, on a $\mathcal{P}(n) = \langle B^n = (-1)^{n+1} B \rangle$ ce qui est vrai si $n = 1$ puis si $B^n = (-1)^{n+1} B$ alors $B^{n+1} = B^n \times B = (-1)^{n+1} B^2 = -(-1)^{n+1} B = (-1)^{n+2} B$.

2. On écrit que $A = B + 2I_3$, puisque $B \times (2I_3) = (2I_3) \times B = 2B$, on peut appliquer le binôme pour avoir

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = \binom{n}{0} 2^{n-0} B^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{k+1} B \\ &= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k \right) B = 2^n I_3 - \left(-\binom{n}{0} 2^{n-0} (-1)^0 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k \right) B \\ &= 2^n I_3 - (-2^n + (2-1)^n) B = 2^n I_3 + (2^n - 1) B = 2^n I_3 + (2^n - 1) (A - 2I_3) \\ &= (2^n - 1) A + (2^n - 2 \times 2^n + 2) I_3 = (2^n - 1) A + (2 - 2^n) I_3 \end{aligned}$$

(voir l'exercice 10.4 pour un autre calcul de A^n).

3. Pour $n = -1$ on l'expression trouvée pour A^n s'écrit $\left(\frac{1}{2} - 1\right) A + \left(2 - \frac{1}{2}\right) I_3$. Posons $C = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3$, alors

$$A \times C = A \times \left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3\right) = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}A^2$$

Mais $A^2 = (2^2 - 1) A + (2 - 2^2) I_3 = 3A - 2I_3$ d'où

$$A \times C = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}(3A - 2I_3) = I_3$$

ce qui prouve que A est inversible et que $C = A^{-1}$.

Remarque : De manière plus générale, si on pose

$$C = (2^{-n} - 1) A + (2 - 2^{-n}) I_3 = \frac{1 - 2^n}{2^n} A + \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) I_3$$

alors

$$\begin{aligned} A^n \times C &= ((2^n - 1) A + (2 - 2^n) I_3) \times \left(\frac{1 - 2^n}{2^n} A + \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) I_3\right) \\ &= (2^n - 1) \times \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) A^2 + \left((2^n - 1) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) + (2 - 2^n) \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right)\right) A + (2 - 2^n) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) I_3 \\ &= (2^n - 1) \times \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) (3A - 2I_3) + \left((2^n - 1) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) + (2 - 2^n) \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right)\right) A + (2 - 2^n) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) I_3 \\ &= \alpha A + I_3 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= 3(2^n - 1) \times \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) + (2^n - 1) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) + (2 - 2^n) \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) \\ \beta &= (2 - 2^n) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) - 2(2^n - 1) \times \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) \end{aligned}$$

(On espère que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$!). On simplifie

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) \times [3(2^n - 1) + (2 - 2^n)] + (2^n - 1) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) \\ &= \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) \times [2 \times 2^n - 1] + (2^n - 1) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) = 0 \text{ ouf} \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} -2(2^n - 1) \times \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) &= \frac{(2^n - 1)^2}{2^{n-1}} \\ (2 - 2^n) \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) &= -\frac{(2^{n-1} - 1)(2^{n+1} - 1)}{2^{n-1}} = -\frac{(2^n)^2 - 2^{n+1} - 2^{n-1} + 1}{2^{n-1}} \\ &= -\frac{(2^n)^2 - 2 \times 2^n + 1}{2^{n-1}} + 1 \end{aligned}$$

$$\beta = 1$$

Conclusion $C = (A^n)^{-1} = A^{-n}$! La formule obtenue pour le calcul de A^n est donc valable si $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice de khôlle 332

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, a_{i,j} = (-1)^{i+j}$$

1. Rappeler la formule donnant le terme générique du produit de deux matrices $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = ((b_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer A^2 à l'aide de cette formule. Le vérifier pour $n = 2$.
3. En déduire A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. Si $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = ((b_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $C = AB = ((c_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ alors

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j}$$

2. En posant $A^2 = ((\alpha_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$, on a

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, \alpha_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times a_{k,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \times (-1)^{k+j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j+2k} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j} \times (-1)^{2k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j} = n (-1)^{i+j} = n a_{i,j} \end{aligned}$$

Ainsi

$$A^2 = nA$$

Si $n = 2$, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$ ouf !

3. On a donc $A^3 = A^2 \times A = nA \times A = nA^2 = n^2A$ et par récurrence, on montre $\mathcal{P}(p) \llcorner A^p = n^{p-1}A$ si $p \geq 1$. C'est vrai si $p = 1$ puis si c'est vrai au rang p , on a

$$A^{p+1} = A^p \times A = n^{p-1}A^2 = n^{p-1} \times nA = n^{(p+1)-1}A$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(p+1)$ et termine la récurrence. Conclusion

$$A^0 = I_n \text{ et pour } p \geq 1, A^p = n^{p-1}A$$

Exercice de khôlle 333

(★) On «met» le triangle de Pascal dans une matrice A de taille $n \times n$ de la manière suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & n-1 \\ \vdots & 0 & 1 & 3 & 6 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 4 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

J'affirme que A est inversible (évident !) et que pour avoir A^{-1} , il suffit de mettre des signes – «une diagonale sur deux» de la manière suivante

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & & n-1 \\ \vdots & 0 & 1 & -3 & 6 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & -4 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prouvez le !

Solution : En examinant attentivement A et en y réfléchissant (facile à dire !), on peut écrire $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ où

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$$

Et il s'agit de prouver que si $B = ((b_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ où $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$ alors $AB = I_n$! On commence par remarquer que les deux matrices sont triangulaires supérieures, donc d'après le cours AB également. Si on note $AB = ((c_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ alors pour $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ on a $c_{i,j} = 0$ (définition des triangulaire supérieures). On calcule donc $c_{i,j}$ pour $i \leq j$. La formule du produit de matrices donne

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{i,k} \times a_{k,j} = (-1)^j \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{k-1}{i-1} \times \binom{j-1}{k-1}$$

Si $k-1 < i-1$ (i.e. $k < i$), le terme $\binom{k-1}{i-1}$ est nul, et si $j-1 < k-1$ (i.e. $k > j$) le terme $\binom{j-1}{k-1}$ est nul. Ainsi

$$c_{i,j} = (-1)^j \sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{k-1}{i-1} \times \binom{j-1}{k-1}$$

Reste à calculer cette somme ! Pour cela, on regarde le terme $\binom{k-1}{i-1} \times \binom{j-1}{k-1}$. Lorsque $i-1 \leq k-1$ et $k-1 \leq j-1$

(donc lorsque $i \leq k \leq j$) on peut écrire que

$$\begin{aligned} \binom{k-1}{i-1} \times \binom{j-1}{k-1} &= \frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} \times \frac{(j-1)!}{(k-1)!(j-k)!} \\ &= \frac{(j-1)!}{(i-1)!} \times \frac{1}{(k-i)!(j-k)!} \\ &= \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} \times \frac{(j-i)!}{(k-i)!(j-k)!} \\ &= \binom{j-1}{i-1} \times \binom{j-i}{k-i} \\ &\quad \text{(formule du multi-capitaine)} \end{aligned}$$

Remarque : On peut vérifier que cette formule est encore valable si $k < i$ ou $k > j$! Car si $k < i$ alors $\binom{k-1}{i-1} = 0$ et $k - i < 0$ d'où $\binom{j-i}{k-i} = 0$. De même si $k > j$ alors $\binom{j-1}{k-1} = 0$ et $k - i > j - i$ d'où $\binom{j-i}{k-i} = 0$. Pour résumer, on a pour $(i, j, k) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^3$, avec $i \leq k \leq j$, $\binom{k-1}{i-1} \times \binom{j-1}{k-1} = \binom{j-1}{i-1} \times \binom{j-i}{k-i}$ ce qui permet d'écrire que

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= (-1)^j \sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{j-1}{i-1} \times \binom{j-i}{k-i} \\ &= (-1)^j \binom{j-1}{i-1} \times \left(\sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{j-i}{k-i} \right) \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{j-i}{k-i} \underset{\ell=k-i}{=} \sum_{\ell=0}^{j-i} (-1)^{\ell+i} \binom{j-i}{\ell} = (-1)^i \sum_{\ell=0}^{j-i} (-1)^{\ell} \binom{j-i}{\ell} 1^{j-i-\ell} \underset{\text{binôme}}{=} (-1)^i \times 0^{j-i}$$

D'où

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} \times 0^{j-i}$$

Si $j \neq i$, on a $0^{j-i} = 0$, et si $i = j$

$$c_{i,i} = (-1)^{2i} \binom{i-1}{i-1} \times 0^0 = 1$$

Conclusion $c_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $c_{i,i} = 1$, ce qui prouve que $AB = I_n$.

Exercice de khôlle 334

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et J^3 .
2. En déduire A^n .

Solution : On note I la matrice identité.

1. Simple calcul $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \mathcal{O}$.

2. On a $A = I + 2J + 3J^2$, on peut supposer que $A^n = I + u_n J + v_n J^2$. Par récurrence, on montre $\mathcal{P}(n) = \langle \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } A^n = I + u_n J + v_n J^2 \rangle$. C'est vrai si $n = 0$ avec $u_0 = v_0 = 0$.

Puis si $A^n = I + u_n J + v_n J^2$ alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = (I + u_n J + v_n J^2) (I + 2J + 3J^2) \\ &= I + 2J + 3J^2 + u_n J + 2u_n J^2 + 2v_n J^3 + v_n J^2 + 2v_n J^3 + 3v_n J^4 \\ &= I + 2J + 3J^2 + u_n J + 2u_n J^2 + v_n J^2 \\ &= I + (2 + u_n) J + (3 + 2u_n + v_n) J^2 \end{aligned}$$

Si on pose $u_{n+1} = 2 + u_n$ et $v_{n+1} = 3 + 2u_n + v_n$, on a $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2 donc

$$u_n = u_0 + 2n = 2n$$

On a alors $v_{n+1} = 3 + 4n + v_n$ d'où

$$v_{n+1} - v_n = 3 + 4n$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (3 + 4k) = 3n + 4 \frac{n(n-1)}{2} = n(2n+1)$$

ainsi $v_n = n(2n+1) + v_0 = n(2n+1)$ et au final

$$A^n = I + 2nJ + 3(n^2 - 1)J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 335

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note I la matrice I_3 .

1. Calculer $A(t) \times A(s)$ pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer, pour $p \in \mathbb{N}$, $A(t)^p$ en fonction de $A(t)$. Enfin, calculer $(A(t) - I)^2$ et $(A(t) - I)^3$.
2. Justifier que $A(t)$ est inversible et préciser son inverse.
3. Montrer qu'il existe trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A(t)^n = u_n A(2t) + v_n A(t) + w_n I$$

Solution :

1. Simple calcul qui donne $A(t) \times A(s) = A(t+s)$. On en déduit que $A(t)^p = A(pt)$. C'est vrai si $p = 0$ car $A(t)^0 = I = A(0)$, puis si c'est vrai au rang p , on a $A(t)^{p+1} = A(t) \times A(t)^p = A(t) \times A(pt) = A(t+pt) = A((p+1)t)$. Puis $A(t) - I = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{t}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{d'où } (A(t) - I)^2 &= \frac{t^2}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A(t) - I)^2 = \mathcal{O}_3 \text{ (matrice nulle).} \end{aligned}$$

2. On remarque que $A(0) = I$, ainsi $A(t) \times A(-t) = I$ d'où $A(t)$ est inversible et $A(t)^{-1} = A(-t)$.
3. Par récurrence, on montre $\mathcal{P}(n) = \exists (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3, A(t)^n = u_n A(2t) + v_n A(t) + w_n I$. C'est vrai si $n = 0$ et $n = 1$ en posant

$$u_0 = v_0 = 0, w_0 = 1$$

Puis si c'est vrai au rang n , alors $\exists (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3, A(t)^n = u_n A(2t) + v_n A(t) + w_n I$ et ainsi

$$\begin{aligned} A(t)^{n+1} &= A(t)^n \times A(t) = (u_n A(2t) + v_n A(t) + w_n I) \times A(t) \\ &= u_n A(3t) + v_n A(2t) + w_n A(t) \end{aligned}$$

Mais avec le binôme (on peut), on a

$$(A(t) - I)^3 = A(t)^3 - 3A(t)^2 + 3A(t) - I$$

d'où $A(3t) = 3A(2t) - 3A(t) + I$ et ainsi

$$\begin{aligned} A(t)^{n+1} &= u_n \times (3A(2t) - 3A(t) + I) + v_n A(2t) + w_n A(t) \\ &= (3u_n + v_n) A(2t) + (-3u_n + w_n) A(t) + u_n I \end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + v_n \\ v_{n+1} &= -3u_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

Exercice de khôlle 336

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t}{2} & -t & 1 \end{pmatrix}$$

et on note I la matrice I_3 .

- Calculer $A(t) \times A(s)$ pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer, pour $p \in \mathbb{N}$, $A(t)^p$ en fonction de $A(t)$. Enfin, calculer $(A(t) - I)^2$ et $(A(t) - I)^3$.
- Justifier que $A(t)$ est inversible et préciser son inverse.
- Montrer qu'il existe trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A(t)^n = u_n A(2t) + v_n A(t) + w_n I$$

Solution :

- Simple calcul qui donne $A(t) \times A(s) = A(t+s)$. On en déduit que $A(t)^p = A(pt)$. C'est vrai si $p = 0$ car $A(t)^0 = I = A(0)$, puis si c'est vrai au rang p , on a $A(t)^{p+1} = A(t) \times A(t)^p = A(t) \times A(pt) = A(t+pt) = A((p+1)t)$. Puis $A(t) - I =$

$$\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t}{2} & -t & 0 \end{pmatrix} = \frac{t}{2} \times \begin{pmatrix} t & -t & 2 \\ t & -t & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \text{ On calcule}$$

$$\begin{pmatrix} t & -t & 2 \\ t & -t & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} t & -t & 2 \\ t & -t & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } (A(t) - I)^2 = t^2 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A(t) - I)^2 = \mathcal{O}_3 \text{ (matrice nulle).}$$

Remarque : On peut aussi écrire que $(A(t) - I)^2 = A(t)^2 - 2A(t) + I$ (car $A(t) \times I = I \times A(t) = A(t)$) donc

$$\begin{aligned}(A(t) - I)^2 &= A(2t) - 2A(t) + I \\&= \begin{pmatrix} 1+2t^2 & -2t^2 & 2t \\ 2t^2 & 1-2t^2 & 2t \\ 2t & -2t & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1-\frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 & 0 \\ t^2 & -t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = t^2 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{et ensuite } (A(t) - I)^3 = t^2 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{t}{2} \times \begin{pmatrix} t & -t & 2 \\ t & -t & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- On remarque que $A(0) = I$, ainsi $A(t) \times A(-t) = I$ d'où $A(t)$ est inversible et $A(t)^{-1} = A(-t)$.
- Par récurrence, on montre $\mathcal{P}(n) = \exists (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3, A(t)^n = u_n A(2t) + v_n A(t) + w_n I$. C'est vrai si $n = 0$ et $n = 1$ en posant

$$u_0 = v_0 = 0, w_0 = 1$$

Puis si c'est vrai au rang n , alors $\exists (u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3, A(t)^n = u_n A(2t) + v_n A(t) + w_n I$ et ainsi

$$\begin{aligned}A(t)^{n+1} &= A(t)^n \times A(t) = (u_n A(2t) + v_n A(t) + w_n I) \times A(t) \\&= u_n A(3t) + v_n A(2t) + w_n A(t)\end{aligned}$$

Mais avec le binôme (on peut), on a

$$(A(t) - I)^3 = A(t)^3 - 3A(t)^2 + 3A(t) - I$$

d'où $A(3t) = 3A(2t) - 3A(t) + I$ et ainsi

$$\begin{aligned}A(t)^{n+1} &= u_n \times (3A(2t) - 3A(t) + I) + v_n A(2t) + w_n A(t) \\&= (3u_n + v_n) A(2t) + (-3u_n + w_n) A(t) + u_n I\end{aligned}$$

On pose alors

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 3u_n + v_n \\v_{n+1} &= -3u_n + w_n \\w_{n+1} &= u_n\end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

Exercice de khôlle 337

Soit $A = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ où les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont des complexes deux à deux distincts. Soit $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Quelle condition doit vérifier M pour qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M = AP - PA$? Et si l'on cherche P symétrique?

Solution : On cherche $P = ((p_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Cela donne

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 p_{1,2} - \alpha_2 p_{1,2} & \alpha_1 p_{1,3} - \alpha_3 p_{1,3} \\ -\alpha_1 p_{2,1} + \alpha_2 p_{2,1} & 0 & \alpha_2 p_{2,3} - \alpha_3 p_{2,3} \\ -\alpha_1 p_{3,1} + \alpha_3 p_{3,1} & -\alpha_2 p_{3,2} + \alpha_3 p_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0 & (\alpha_1 - \alpha_2) p_{1,2} & (\alpha_1 - \alpha_3) p_{1,3} \\ -(\alpha_1 - \alpha_2) p_{2,1} & 0 & (\alpha_2 - \alpha_3) p_{2,3} \\ -(\alpha_1 - \alpha_3) p_{3,1} & -(\alpha_2 - \alpha_3) p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On constate que M doit avoir sa diagonale nulle et cela suffit (car les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des complexes deux à deux distincts). Et si l'on veut P symétrique, M doit être antisymétrique et cela suffit ! Le cas des matrices de taille quelconque est absolument identique !

10.3 Le binôme (encore !)

Exercice de khôlle 338

Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 puis, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n où $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution : Un simple calcul donne $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -8 & -4 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -16 & -8 & 4 \end{pmatrix} = 2B$. La suite est banale. On a $A = B + I_3$, puisque $BI_3 = I_3B$, on peut appliquer le binôme pour avoir

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \text{ car } I_3^{n-k} = I_3 \text{ et } BI_3 = B$$

Mais par récurrence immédiate, $B^k = 2^{k-1}B$ si $k \in \mathbb{N}^*$ donc

$$A^n = \binom{n}{0} B^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B^k = I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B^k = I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} B$$

Mais

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = \frac{1}{2} \left(-\binom{n}{0} 2^0 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \right) = \frac{3^n - 1}{2}$$

Donc

$$A^n = I_3 + \frac{3^n - 1}{2} B$$

On vérifie que c'est bon pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice de khôlle 339

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = M - I_3$.

1. Comparer M^2 et M , en déduire que M ne peut être inversible. Que vaut M^n où $n \in \mathbb{N}$?
2. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et préciser son inverse A^{-1} .
3. Exprimer $(A + 2M)^n$ en fonction de M et I_3 , puis en fonction de A et M uniquement.

Solution :

1. Simple calcul, $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2M$. Si M est inversible alors $M^2 \times M^{-1} = M = 2M \times M^{-1} = 2I_3$

d'où $M = 2I_3$, ce qui est clairement faux ! Puis par récurrence immédiate

$$M^n = 2^{n-1}M \text{ si } n \geq 1 \text{ et } M^0 = I_3$$

2. Ou bien, par un simple calcul on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^2 = I_3$. Ou bien puisque $M \times (-I_3) = (-I_3) \times M$

$$A^2 = M^2 - 2MI_3 + I_3^2 = 2M - 2M + I_3 = I_3$$

Ainsi $A \times A = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = A$.

3. On a $A + 2M = 3M - I_3$, on peut appliquer le binôme car $3M \times (-I_3) = (-I_3) \times 3M = -3M$ ainsi

$$\begin{aligned} (A + 2M)^n &= (3M - I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3M)^k (-I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} M^k = \binom{n}{0} 3^0 (-1)^{n-0} M^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} M^k \\ &= (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} 2^{k-1} M \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} 2^{k-1} &= \frac{1}{2} \left(-\binom{n}{0} 3^0 (-1)^{n-0} 2^0 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) \\ &= \frac{5^n - (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

d'où

$$(A + 2M)^n = (-1)^n I_3 + \frac{5^n - (-1)^n}{2} M$$

Avec $I_3 = M - A$, au final, on a

$$\begin{aligned} (A + 2M)^n &= (-1)^n (M - A) + \frac{5^n - (-1)^n}{2} M \\ &= (-1)^{n+1} A + \frac{5^n + (-1)^n}{2} M \end{aligned}$$

Avec $n = 0$, on obtient $(-1)^{0+1} A + \frac{5^0 + (-1)^0}{2} M = M - A = I_3$ (ouf).

Avec $n = 1$, on obtient $(-1)^2 A + \frac{5^1 + (-1)^1}{2} M = A + 2M$ (ouf²).

Exercice de khôlle 340

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{i,j} = e^{i-j}$ et $B = I_n + A$.

1. Avec la définition du produit de matrices, calculer A^2 .
2. Montrer que B^2 est une combinaison linéaire de I_n et de B , en déduire que B est inversible et préciser B^{-1} en fonction de I_n et B .
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer B^p en fonction de I_n et de A . La formule obtenue est-elle valable pour $p = -1$?

Solution : On note $A^2 = ((c_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Pour $(i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$; on a

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times a_{k,j} = \sum_{k=1}^n e^{i-k} \times e^{k-j} = \sum_{k=1}^n e^{i-j} = ne^{i-j} = na_{i,j}$$

Ainsi $A^2 = nA$.

2. Puisque $A \times I_n = I_n \times A = A$, on peut appliquer le binôme pour avoir

$$\begin{aligned} B^2 &= I_n^2 + 2I_n \times A + A^2 = I_n + (n+2)A = I_n + (n+2)(B - I_n) \\ &= -(n+1)I_n + (n+2)B \end{aligned}$$

Ainsi $(n+2)B - B^2 = (n+1)I_n$ d'où

$$B \times \left(\frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}B \right) = I_n$$

ce qui prouve que B est inversible et que $B^{-1} = \frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}B$.

3. On peut appliquer le binôme pour avoir

$$B^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k I_n^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k \text{ car } I_n^{p-k} = I_n \text{ et } A^k \times I_n = A^k$$

Mais par récurrence immédiate, on a $A^k = n^{k-1}A$ si $k \geq 1$ d'où

$$\begin{aligned} B^p &= I_n + \left(\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \times n^{k-1} \right) A = I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \times n^k \right) A \\ &= I_n + \frac{1}{n} \left(-1 + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \times n^k \right) A = I_n + \frac{(n+1)^p - 1}{n} A \end{aligned}$$

On vérifie que c'est bon pour $p=0$ et $p=1$ (si, si cela marche).

4. On a vu que $B^{-1} = \frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}B$, avec $B = I_n + A$, on obtient

$$B^{-1} = \frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}(I_n + A) = I_n - \frac{1}{n+1}A$$

Mais $\frac{(n+1)^{-1} - 1}{n} = \frac{\frac{1}{n+1} - 1}{n} = \frac{1 - (n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1}$, la formule est donc valable pour $n = -1$.

10.4 Un peu de tout (et même des déterminants)

Exercice de khôlle 341

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par

$$u_0 = 1, v_0 = 3, u_{n+1} = 6u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 4v_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
- Décomposer A sous la forme $A = 5I + N$ puis calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de n .

Solution :

- On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 6u_n - v_n \\ u_n + 4v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ d'où $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. On a donc $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 5I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Puisque $5I_3 \times N = N \times (5I_3) = 5N$, on peut appliquer le binôme pour avoir

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (5I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^{n-k} N^k$$

Mais un calcul simple donne $N^2 = 0$ d'où si $n \geq 1$

$$A^n = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} N^k = 5^n I_3 + n5^{n-1} N = \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix}$$

On vérifie avec $n = 0$ que cela marche encore.

Solution : Par récurrence immédiate, on a $X_n = A^n X_0$ (c'est vrai si $n = 0$, puis $X_{n+1} = AX_n = X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$). Ainsi

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5 - 2n)5^{n-1} \\ (15 - 2n)5^{n-1} \end{pmatrix}$$

d'où

$$u_n = (5 - 2n)5^{n-1} \text{ et } v_n = (15 - 2n)5^{n-1}$$

Exercice de khôlle 342

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = A - 2I_3$.

1. Calculer N^2 , en déduire que A est inversible et préciser A^{-1} .
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de n , I_3 et A .

Solution :

1. Un simple calcul donne $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $N^2 = \mathcal{O}$ (la matrice nulle). Puisque $A \times (-2I_3) = (-2I_3) \times A$ on peut appliquer le binôme ainsi $N^2 = A^2 + 2A \times (-2I_3) + (-2I_3)^2 = A^2 - 4A + 4I_3 = 0$. On en déduit que

$$A \left(\frac{4I_3 - A}{4} \right) = I_3$$

ainsi A est inversible avec $A^{-1} = I_3 - \frac{A}{4}$

2. On a $A = N + 2I_3$, $N \times (2I_3) = (2I_3) \times N = 2I_3$, le binôme donne alors

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k$$

On écrit ensuite que si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k \text{ car } N^k = 0 \text{ si } k \geq 2 \\ &= \binom{n}{0} 2^{n-0} N^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} N^1 = 2^n I_3 + n2^{n-1} N \end{aligned}$$

Conclusion, pour $n \geq 1$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & 0 & n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & 2^n & n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & 0 & 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 0 & n \\ -n & 2 & n \\ -n & 0 & 2+n \end{pmatrix}$$

On remarque pour $n = 1$ on obtient bien A et que la formule est encore valable pour $n = 0$.

Exercice de khôlle 343

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, calculer A^n .

Indication $A = I_3 - 3J$ où $J = \dots$

Solution : Genre exercice type, on l'espère ! On pose donc $A = I_3 - 3J$ où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Un simple calcul donne $J^2 = J$ et par récurrence $J^k = J$ si $k \geq 1$. Puis, $I_3 \times (-3J) = (-3J) \times I_3 = -3J$, on peut appliquer le binôme pour avoir

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3J)^k I_3^{n-k} = A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^k J^k \\ &= \binom{n}{0} (-3)^0 J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-3)^k J^k = I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-3)^k \right) J \\ &= I + \left(-1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^k \right) J = I + ((-2)^n - 1) J \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 344

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on note I la matrice $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Simplifier $A^2 - 3A$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et de I .
3. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I$ et préciser les relations de récurrences vérifiées par ces deux suites.
4. Un simple calcul montre que

$$R = PDP^{-1} \text{ où } R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Exprimer R^n en fonction de P et D .
- (b) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, exprimer X_{n+1} en fonction de R et X_n puis en fonction de P, D et X_0 .
- (c) Calculer P^{-1} puis u_n et v_n en fonction de n .
- (d) Peut-on faire $n = -1$ dans les expressions obtenues pour u_n et v_n ?

Solution :

1. Un simple calcul donne $A^2 - 3A = -2I$.
2. On en déduit que $A \left(\frac{A-3I}{-2} \right) = I$ donc A est inversible avec $A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{A}{2}$.
3. Par récurrence sur n , on définit $\mathcal{P}(n) = \ll \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = u_n A + v_n I \gg$. C'est vrai pour $n = 0$ en prenant $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ (et pour $n = 1$ en posant $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$). Supposons que cela soit vrai à $n \geq 1$ fixé, il existe donc u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I$. On a alors (on se souvient que $A^2 - 3A = -2I$)

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = u_n A^2 + v_n A = u_n (3A - 2I) + v_n A \\ &= (3u_n + v_n) A - 2u_n I \end{aligned}$$

Si on pose $u_{n+1} = 3u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -2u_n$ alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc définies par

$$u_{n+1} = 3u_n + v_n, \quad v_{n+1} = -2u_n, \quad u_0 = 0 \text{ et } v_0 = 1$$

4. (a) On a $R^2 = PDP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, on montre par récurrence $\mathcal{P}(n) = \ll R^n = PD^n P^{-1} \gg$. C'est vrai si $n = 0$ car $R^0 = I = PD^0 P^{-1} = P \times I \times P^{-1} = I$, puis si $R^n = PD^n P^{-1}$ alors

$$R^{n+1} = R^n \times R = PD^n P^{-1} \times PDP^{-1} = PD^n DP^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

- (b) On a facilement $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n + v_n \\ -2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = R X_n$. Ainsi (récurrence immédiate)

$$X_n = R^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$$

- (c) Méthode ① : On résout $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -x - y = a \\ 2x + y = b \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 + 2L_1} \begin{cases} -x - y = a \\ -y = b + 2a \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - a = a + b \\ y = -2a - b \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Puis avec } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1} X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ D^n P^{-1} X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2^n \end{pmatrix} \\ PD^n P^{-1} X_0 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 1 \\ 2 - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$u_n = 2^n - 1 \text{ et } v_n = 2 - 2^n$$

On vérifie avec $n = 2$ que $u_2 = 4 - 1 = 3$ et $v_2 = 2 - 2^2 = -2$ (ouf car $A^2 = 3A - 2I$).

- (d) Si on fait $n = -1$, on a $u_{-1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ et $v_{-1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et on retrouve que

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$$

Exercice de khôlle 345

Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin t \\ -1 & \cos t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}$. On note $N = A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $M = I + N$ où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer pour quelles valeurs de t la matrice $A(t)$ est inversible.
2. Calculer N^3 .
3. Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}$. Justifier que M est inversible et déterminer M^{-1} .

Solution : On a donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. On a

$$\begin{aligned} \det(A(t)) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin t \\ -1 & \cos t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \oplus 0 & \ominus 1 & \oplus -\sin t \\ -1 & \cos t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} -1 & \cos t \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} + (-\sin t) \begin{vmatrix} -1 & \cos t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \\ &= -\sin t \cos t - \sin(t) \times (-\cos t + \sin t \cos t) = -\cos(t) \sin^2(t) \end{aligned}$$

Ainsi $A(t)$ inversible si et seulement si $t \neq 0 + k\frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Simple calcul qui donne } N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. On a $NI = IN = N$, on peut appliquer le binôme pour avoir

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & -n \\ -n & 1 - \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} \\ -n & -\frac{n(n-1)}{2} & 1 + \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car si $k \geq 2$ on a $N^k = \mathbf{O}$ (et si $n \leq 1$ on a ajouté des termes nuls car les coefficients multiplicateurs du binôme sont nuls).

$$4. \text{ Posons } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ obtenue avec } n = -1 \text{ dans } M^n \text{ alors}$$

$$MB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = I_n$$

ce qui prouve que M est inversible et que $M^{-1} = B$.

Exercice de khôlle 346

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice M est-elle inversible ?
2. Soit $N = M + I_3$, calculer N^k où $k \in \mathbb{N}$.
3. Lorsque M est inversible, déterminer M^{-1} en fonction de M .
4. Exprimer M^n en fonction de N et I_3 , puis en fonction de M et de I_3 .

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 + L_1 \\ L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & a & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & -a & -1-a \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a-1 & a \\ -a & -1-a \end{vmatrix} \\ &= (a-1)(a+1) - a^2 = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi M est toujours inversible !

2. On a $N^0 = I_3$, $N^1 = N = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et un calcul simple donne $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$ et enfin $N^3 = \bigcirc$.

3. On a donc $N^3 = \bigcirc = (M + I_3)^3 = M^3 + 3M^2 + 3M + I_3$ (on peut appliquer le binôme car $MI_3 = I_3M = M$).
Ainsi

$$I_3 = -M^3 - 3M^2 - 3M = M \times (-M^2 - 3M - 3I_3)$$

d'où M^{-1} existe toujours (on retrouve le résultat de la première question) et

$$M^{-1} = -M^2 - 3M - 3I_3$$

Remarque : On a donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & -a-1 & -a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$.

4. On a $M = N - I_3$, on peut appliquer le binôme pour avoir

$$M^n = (N - I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k$$

Si $n \geq 2$, on obtient alors

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k \text{ car } N^k = 0 \text{ pour } k \geq 3 \\ &= (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} N^2 \\ &= (-1)^n \left(I_3 - nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right) \end{aligned}$$

Cette formule est encore valable si $n \in \{0, 1\}$.

Puis $N = M + I_3$ d'où $N^2 = M^2 + 2M + I_3$ d'où

$$\begin{aligned} M^n &= (-1)^n \left(I_3 + n(M + I_3) + \frac{n(n-1)}{2} (M^2 + 2M + I_3) \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{n^2 + n + 2}{2} I_3 + n^2 M + \frac{n(n-1)}{2} M^2 \right) \end{aligned}$$

10.5 Plus théorique

Exercice de khôlle 347

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = \mathcal{O}_n$ (matrice nulle), $AB = BA$ et B inversible. Montrer que $A + B$ est inversible (et exprimer son inverse).

Solution : Il faut avoir une idée ou mieux plusieurs !

Première idée : Dans quelle formule a-t-on besoin de $AB = BA$? Le binôme ! Pour $p \in \mathbb{N}$, on a facilement

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^{p-k} A^k = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^{p-k} A^k = B^p + pB^{p-1}A + \frac{p(p-1)}{2} B^{p-2}A^2$$

Et si on pose $p = -1$? Aucune chance que cela marche ! Raison de plus pour oser ! Soit

$$C = B^{-1} - B^{-2}A + B^{-3}A^2$$

avec $B^{-2} = (B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$ et de même pour B^{-3} (petit exercice, vérifier que $(B^2)^{-1} = (B^{-1})^2$), alors

$$\begin{aligned} (A + B) \times C &= (A + B) \times (B^{-1} - B^{-2}A + B^{-3}A^2) \\ &= AB^{-1} + I_n - AB^{-2}A - BB^{-2}A + AB^{-3}A^2 + BB^{-3}A^2 \end{aligned}$$

Montrons que A et B^{-1} commutent (on aimerait bien non ?). On a en multipliant par B^{-1} à droite et à gauche,

$$AB = BA \text{ d'où } B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1} \text{ soit } B^{-1}A = AB^{-1}$$

car $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$ et $AI_n = I_nA = A$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} (A + B) \times C &= AB^{-1} + I_n - A^2B^{-2} - AB^{-1} + A^3B^{-3} + A^2B^{-2} \\ &= I_n + A^3B^{-3} = 0 \text{ car } A^3 = \mathcal{O}_n. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $A + B$ est inversible et que

$$(A + B)^{-1} = B^{-1} - B^{-2}A + B^{-3}A^2$$

Deuxième idée : Par analogie, si a et b sont des réels, avec $b \neq 0$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{1+\frac{a}{b}} = \frac{1}{b} \left(\left(1 - \left(\frac{a}{b} \right) + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) - \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^3}{1+\frac{a}{b}} \right)$$

(on a utilisé $1 - q + q^2 - \frac{1+q^3}{1+q}$), ce qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} (a+b)^{-1} &= b^{-1} \times \left(\left(1 - ab^{-1} + (ab^{-1})^2 \right) - (ab^{-1})^3 (1+ab^{-1})^{-1} \right) \\ &= b^{-1} \times \left(\left(1 - ab^{-1} + a^2(b^{-1})^2 \right) - a^3(b^{-1})^3 (1+ab^{-1})^{-1} \right) \\ &= \left(b^{-1} - a(b^{-1})^2 + a^2(b^{-1})^3 \right) - a^3(b^{-1})^3 (1+ab^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

car les réels commutent. Si on a $a^3 = 0$ alors $\dots$, on pose donc

$$C = B^{-1} - A(B^{-1})^2 + A^2(B^{-1})^3 = B^{-1} - B^{-2}A + B^{-3}A^2$$

et on vérifie que $(A + B)C = I_n$!

Troisième idée : Dans quelle formule a-t-on besoin de $AB = BA$? Le binôme, on l'a dit. Oui mais pas que ... Si $AB = BA$ et $p \in \mathbb{N}$ alors

$$B^3 + A^3 = B^3 - (-A)^3 = (B + A) \times (B^2 + AB + A^2)$$

ce qui donne

$$B^3 = (B + A) \times (B^2 + AB + A^2)$$

puis, avec B inversible

$$I_n = B^3 \times B^{-3} = (B + A) \times (B^2 - AB + A^2) \times B^{-3}$$

ce qui prouve que $A + B$ est inversible avec

$$(A + B)^{-1} = (B^2 - AB + A^2) \times B^{-3} = B^{-1} - AB^{-2} + A^2B^{-3}$$

Autre méthode pour l'inversibilité : Puisque $(A + B) = (AB^{-1} + I_n) \times B$, on a $\det(A + B) = \det(AB^{-1} + I_n) \times \det B$. Avec $\det B \neq 0$, on en déduit que

$$A + B \text{ inversible si et seulement si } AB^{-1} + I_n \text{ l'est aussi}$$

On utilise ensuite la caractérisation suivante : Si $\ker P = \{0\}$ (i.e $PX = 0$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution) alors P est inversible.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(AB^{-1} + I_n)X = 0$ alors $AB^{-1}X = -X$ d'où $A^2 \times AB^{-1}X = A^2(-X)$ ce qui donne

$$A^3B^{-1}X = -AX \text{ et avec } A^3 = 0, \text{ on en déduit que } A^2X = 0$$

Puis (on montre facilement que $A^2B^{-1} = B^{-1}A^2$)

$$A(AB^{-1}X) = A^2B^{-1}X = B^{-1}A^2X = 0 = -AX$$

donc $AX = 0$, mais alors $AB^{-1}X = B^{-1}(AX) = 0 = -X$ d'où $X = 0$. On a donc montré que $(AB^{-1} + I_n)X = 0$ a une unique solution $X = 0$. On en déduit que $AB^{-1} + I_n$ est inversible donc que $A + B$ aussi.

Rémarque (réponse au petit exercice) : Montrons que si B est inversible et $p \in \mathbb{N}$ alors

$$(B^{-1})^p = (B^p)^{-1}$$

(le fait que B^p soit inversible provient, par récurrence, du fait qu'un produit de matrices inversibles l'est encore). C'est clair si $p = 0$ et $p = 1$, puis

$$\begin{aligned} (B^{-1})^{p+1} &= (B^{-1})^p \times B^{-1} = (B^p)^{-1} \times B^{-1} \\ &= (B \times B^p)^{-1} \text{ (Si } P \text{ et } Q \text{ sont inversibles } (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}) \\ &= (B^{p+1})^{-1} \end{aligned}$$

ceci permet donc d'écrire B^{-p} et de justifier que pour $(p, q) \in \mathbb{Z}$, $B^p \times B^q = B^{p+q}$.

Exercice de khôlle 348

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la trace de A , notée $\text{Tr}(A)$ par $\text{Tr}(A) =$

$\sum_{k=1}^n a_{k,k}$. Ainsi $\text{Tr}(A)$ est la somme des éléments diagonaux de A . Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors on a clairement $\text{Tr}(A + B) =$

$\text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ et on admet (provisoirement) que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

1. Montrer que si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont tels que $AB = 0$ et si $p \in \mathbb{N}$ alors $\text{Tr}((A + B)^p) = \text{Tr}(A^p) + \text{Tr}(B^p)$.
2. Etablir le résultat admis.

Solution : Avant tout, si $AB = 0$, rien ne permet d'affirmer que $BA = 0$.

1. Puisque A et B n'ont aucune raison de commuter, on a, avec $AB = 0$

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + BA + B^2 \\(A+B)^3 &= (A+B)^2 \times (A+B) = (A^2 + BA + B^2) \times (A+B) \\&= A^3 + BA^2 + B^2A + A^2B + BAB + B^3 \\&= A^3 + BA^2 + B^2A + B^3 \text{ car } A^2B = A \times AB = 0 \text{ et } BAB = 0\end{aligned}$$

On montre par récurrence que

$$(A+B)^p = A^p + BA^{p-1} + B^2A^{p-2} + \dots + B^p = \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^k$$

C'est vrai si $p = 0$, mais aussi si $p \in \{1, 2, 3\}$! Puis si c'est vrai au rang $p \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+1} &= (A+B)^p \times (A+B) = \left(\sum_{k=0}^p B^{p-k} A^k \right) \times (A+B) \\&= \left(\sum_{k=0}^p B^{p-k} A^k \right) \times A + \left(\sum_{k=0}^p B^{p-k} A^k \right) \times B \\&= \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^{k+1} + \left(B^p + \sum_{k=1}^p B^{p-k} A^k \right) \times B \text{ car } B^{p-0} A^0 + B^p I_n = B^p \\&= \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^{k+1} + B^{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} B^{p+1-j} A^{j+1} B \text{ en posant } j = k-1 \\&= \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^{k+1} + B^{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} B^{p+1-j} A^j \times \underbrace{AB}_{=0} = \sum_{k=0}^p B^{p-k} A^{k+1} + B^{p+1} \\&= \sum_{i=1}^{p+1} B^{p+1-i} A^i + B^{p+1} \text{ en posant } i = k+1 \\&= \sum_{i=0}^{p+1} B^{p+1-i} A^i \text{ car } B^{p+1-0} A^0 = B^{p+1} \times I_n = B^{p+1}\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'hérédité. Mais alors

$$\begin{aligned}\text{Tr}((A+B)^p) &= \text{Tr} \left(\sum_{k=0}^p B^{p-k} A^k \right) = \sum_{k=0}^p \text{Tr}(B^{p-k} A^k) \\&= \sum_{k=0}^p \text{Tr}(A^k B^{p-k}) = \text{Tr}(A^0 B^p) + \sum_{k=1}^{p-1} \text{Tr}(A^k B^{p-k}) + \text{Tr}(B^{p-p} A^p) \\&= \text{Tr}(B^p) + \sum_{k=1}^{p-1} \text{Tr} \left(A^{k-1} \times \underbrace{AB}_{=0} \times B^{p-k-1} \right) + \text{Tr}(A^p) \\&= \text{Tr}(A^p) + \text{Tr}(B^p).\end{aligned}$$

On remarquera que l'on peut écrire $A^k B^{p-k} = A^{k-1} \times (AB) \times B^{p-k-1}$ car $k-1 \geq 0$ et $p-1 \leq k$ donc $p-k-1 \geq 0$.

2. Posons $AB = ((c_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $BA = ((d_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\forall i \in [[1, n]]$, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$ d'où

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k}$$

Mais $d_{k,k} = \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k}$, ainsi

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \operatorname{Tr}(BA)$$

Remarque : De $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$ on déduit par récurrence que $\operatorname{Tr}\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Tr}(A_k)$. Mais on prendra garde que $\operatorname{Tr}(ABC) \neq \operatorname{Tr}(ACB)$ mais $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(BCA) = \operatorname{Tr}(CAB)$.

Exercice de khôlle 349

Soit $A = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des complexes deux à deux distincts. Soit $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Quelle condition doit vérifier M pour qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M = AP - PA$? Et si l'on cherche P symétrique?

Solution : On essaye sur un exemple simple. On cherche $P = ((p_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $n = 3$, cela donne

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 p_{1,2} - \alpha_2 p_{1,2} & \alpha_1 p_{1,3} - \alpha_3 p_{1,3} \\ -\alpha_1 p_{2,1} + \alpha_2 p_{2,1} & 0 & \alpha_2 p_{2,3} - \alpha_3 p_{2,3} \\ -\alpha_1 p_{3,1} + \alpha_3 p_{3,1} & -\alpha_2 p_{3,2} + \alpha_3 p_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\alpha_1 - \alpha_2) p_{1,2} & (\alpha_1 - \alpha_3) p_{1,3} \\ -(\alpha_1 - \alpha_2) p_{2,1} & 0 & (\alpha_2 - \alpha_3) p_{2,3} \\ -(\alpha_1 - \alpha_3) p_{3,1} & -(\alpha_2 - \alpha_3) p_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate que M doit avoir sa diagonale nulle et cela suffit (car les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des complexes deux à deux distincts). Et si l'on veut P symétrique, M doit être antisymétrique et cela suffit! Le cas n quelconque est absolument identique!

CHAPITRE 11

DÉTERMINANTS

11.1 Calculs directs

Exercice de khôlle 350

Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$

Solution : On va mettre d'autres zéros (et on développe par rapport à la colonne/ligne où il y a un seul terme non nul)

$$\begin{aligned} D & \stackrel{C_{i \in \{2,3\}} \leftarrow C_i - C_4}{=} \begin{vmatrix} \oplus 0 & \ominus 0 & \oplus 0 & \ominus 1 \\ 1 & -b^2 & a^2 - b^2 & b^2 \\ 1 & a^2 - c^2 & -c^2 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -b^2 & a^2 - b^2 \\ 1 & a^2 - c^2 & -c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \stackrel{L_{i \in \{1,2\}} \leftarrow L_i - L_3}{=} - \begin{vmatrix} \oplus 0 & -2b^2 & a^2 - b^2 - c^2 \\ \ominus 0 & a^2 - c^2 - b^2 & -2c^2 \\ \oplus 1 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -2b^2 & a^2 - b^2 - c^2 \\ a^2 - c^2 - b^2 & -2c^2 \end{vmatrix} = \left((a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 \right) = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc) (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) \\ &= \left(a^2 - (b+c)^2 \right) \left(a^2 - (b-c)^2 \right) = (a-b-c) (a+b+c) (a-b+c) (a+b-c) \end{aligned}$$

Un bel exercice d'OB!

Exercice de khôlle 351

Calculer

$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Solution : Méthode ① : On a

$$\begin{aligned}
 D &=_{C_i \in \{2,3\} \leftarrow C_i - C_1} \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} \\
 &= (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 1 \\ a^2+b^2 & c+a & c+b \\ a^3+b^3 & c^2+ca+a^2 & c^2+cb+b^2 \end{vmatrix} \\
 &=_{C_3 \leftarrow C_2 - C_3} (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ a^2+b^2 & c+a & b-a \\ a^3+b^3 & c^2+ca+a^2 & cb-ca+b^2-a^2 \end{vmatrix} \\
 &= (c-a)(c-b)(b-a) \begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ a^2+b^2 & c+a & 1 \\ a^3+b^3 & c^2+ca+a^2 & c+b+a \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 &\begin{vmatrix} a+b & 1 & 0 \\ a^2+b^2 & c+a & 1 \\ a^3+b^3 & c^2+ca+a^2 & c+b+a \end{vmatrix} \xleftarrow{C_2 \leftarrow C_2 - (a+c)C_1} \begin{vmatrix} \oplus a+b & \ominus 1 & 0 \\ a^2+b^2 & 0 & 1 \\ a^3+b^3 & -(ab+ac+bc) & a+b+c \end{vmatrix} \\
 &= (a+b) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -(ab+ac+bc) & a+b+c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2+b^2 & 1 \\ a^3+b^3 & a+b+c \end{vmatrix} \\
 &= (a+b)(ab+ac+bc) - (a^2+b^2)(a+b+c) + a^3+b^3 \\
 &= (a^2b+a^2c+abc) + (ab^2+abc+b^2c) - (a^3+a^2b+a^2c) - (ab^2+b^3+cb^2) + a^3+b^3 \\
 &= 2abc
 \end{aligned}$$

Au final

$$D = 2abc(c-a)(c-b)(b-a)$$

Méthode ② : Soit $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$ alors

$$D = \det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, C_3 + C_1)$$

par linéarité (par rapport à chaque colonne), on a

$$\begin{aligned}
 D &= \det(C_1, C_2 + C_3, C_3 + C_1) + \det(C_2, C_2 + C_3, C_3 + C_1) \\
 &= \det(C_1, C_2, C_3 + C_1) + \underbrace{\det(C_1, C_3, C_3 + C_1)}_{=0} + \underbrace{\det(C_2, C_2, C_3 + C_1)}_{=0} + \det(C_2, C_3, C_3 + C_1) \\
 &= \det(C_1, C_2, C_3) + \underbrace{\det(C_1, C_2, C_1) + \det(C_2, C_3, C_3)}_{=0} + \det(C_2, C_3, C_1) \\
 &= \det(C_1, C_2, C_3) + \det(C_2, C_3, C_1) = 2 \det(C_1, C_2, C_3)
 \end{aligned}$$

car $\det(C_2, C_3, C_1) = -\det(C_1, C_3, C_2) = -(-\det(C_1, C_2, C_3))$ (si on échange deux colonnes, on change le signe)

Mais

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc \times V(a, b, c) = 2abc(c-a)(c-b)(b-a)$$

Exercice de khôlle 352

Calculer

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} D_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4}(x+a+b+c) &= \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2 \leftarrow C_2 - aC_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - bC_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - cC_1 \end{matrix} (x+a+b+c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 & 0 \\ 1 & b-a & x-b & 0 \\ 1 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix} \\ &= (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 353Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, pour $n \geq 2$, on définit la matrice $A = ((a_{i,j})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $a_{i,j} = u_{i+j}$ et $D = \det A$.Calculer D lorsque :

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

Solution : On a

$$M = \begin{pmatrix} u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_{n+1} \\ u_3 & u_4 & \cdots & \cdots & u_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & \cdots & u_{2n} \end{pmatrix}$$

1. Puisque $u_{i+1} = u_i + r$ où r est la raison, on a pour $n \geq 3$

$$D_{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1}} = \begin{vmatrix} u_2 & r & r & \cdots & u_{n+1} \\ u_3 & r & r & \cdots & u_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ u_{n+1} & r & r & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

Et pour $n = 2$

$$D = \begin{vmatrix} u_2 & u_2 + r \\ u_3 & u_3 + r \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_1 \leftarrow C_2 - C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} u_2 & r \\ u_3 & r \end{vmatrix} = r(u_2 - u_3) = -r^2$$

2. Dans ce cas, si q est la raison, alors si $k \geq 3$, $u_k = q^{k-2}u_2 = q^{k-3}u_3$ d'où

$$D = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_{n+1} \\ qu_2 & qu_3 & \cdots & \cdots & u_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ q^{n-1}u_2 & q^{n-1}u_3 & \cdots & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} = u_2 \times u_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & u_4 & \cdots & u_{n+1} \\ q & q & \cdots & \cdots & u_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ q^{n-1} & q^{n-1} & \cdots & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

Exercice de khôlle 354

Pour $a_1, \dots, a_n$ réels, calculer le déterminant de A où

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_3 \\ \vdots & a_1 & & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

Solution : On a

$$\det A \underset{C_i \in \{2, \dots, n\} \leftarrow C_i - C_1}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1 \\ a_1 & 0 & a_2 - a_1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_2 - a_1 \\ a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_n = (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & a_2 - a_1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\text{ainsi } \det A = (-1)^{n+1} a_1 (a_2 - a_1)^{n-1} = a_1 (a_1 - a_2)^{n-1}.$$

Bien sûr, il est judicieux de vérifier que le résultat est correct pour n petit, c'est le cas car

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 (a_1 - a_2)$$

Remarque : Une autre manière de procéder, plus rapide (attention à l'ordre des opérations !)

$$\det A \underset{\substack{L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \\ L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2} \\ \vdots \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 - a_2 & a_2 & \cdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & a_1 - a_2 & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 - a_2 \end{vmatrix} = a_1 (a_1 - a_2)^{n-1}$$

Exercice de khôlle 355

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ où et $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ où $m_{i,j} = 1 + a_i a_j$. Calculer $D_n = \det M$.

Solution : On commence par regarder pour des petites valeurs de n .

Si $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 1 + a_1^2 & 1 + a_1 a_2 & 1 + a_1 a_3 \\ 1 + a_2 a_1 & 1 + a_2^2 & 1 + a_2 a_3 \\ 1 + a_3 a_1 & 1 + a_3 a_2 & 1 + a_3^2 \end{vmatrix} \underset{C_i \in \{2,3\} \leftarrow C_i - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 + a_1^2 & a_1(a_2 - a_1) & a_1(a_3 - a_1) \\ 1 + a_2 a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2(a_3 - a_1) \\ 1 + a_3 a_1 & a_3(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 + a_1^2 & a_1 & a_1 \\ 1 + a_2 a_1 & a_2 & a_2 \\ 1 + a_3 a_1 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (deux colonnes identiques)} \end{aligned}$$

On généralise car en dimension $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & 1+a_1a_2 & 1+a_1a_3 & \cdots & 1+a_1a_n \\ 1+a_2a_1 & 1+a_2^2 & 1+a_2a_3 & & \vdots \\ 1+a_3a_1 & 1+a_3a_2 & 1+a_3^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_na_1 & 1+a_na_2 & 1+a_na_3 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} \\
 C_{i \in \{2,3\}} &\stackrel{=}{\leftarrow} C_i - C_1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Il reste les cas où $n = 1$ et $n = 2$. Mais

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 1+a_1^2 \text{ et } D_2 = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & 1+a_1a_2 \\ 1+a_2a_1 & 1+a_2^2 \end{vmatrix} \stackrel{=}{\leftarrow} C_2 - C_1 \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1(a_2-a_1) \\ 1+a_2a_1 & a_2(a_2-a_1) \end{vmatrix} \\
 &= (a_2-a_1) \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 \\ 1+a_2a_1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2-a_1) ((1+a_1^2)a_2 - (1+a_2a_1)a_1) = (a_2-a_1)^2
 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 356

Soit $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$, montrer que $P(x)$ est divisible par $(x-1)^3$.

Solution : Méthode ① : Simple calcul

$$\begin{aligned}
 P(x) &\stackrel{=}{\leftarrow} C_i - C_1, i \in \llbracket 2; 4 \rrbracket \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1) \times \begin{vmatrix} \oplus 1 & 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ \ominus 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} = -(x-1) \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{=}{\leftarrow} L_1 - L_2, L_3 - 3L_2 -(x-1) \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2+x-2 \\ \ominus 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x-1 & x^2+x+1-3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x+2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2(x-1)^3 \quad \text{car } x^2+x-2 = (x-1)(x+2)
 \end{aligned}$$

Méthode ③ (Celle d'Emilie). En utilisant $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ puis $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

$$\begin{aligned}
 P(x) & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_2 - L_3} (x-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x+1 & x^2+x+1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} (x-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 & x^2+x-2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \\
 & = (x-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & x+2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_4} (x-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & x+2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -12 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} (x-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & x+2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -2(x-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & x+2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

et c'est fini car

$$\begin{aligned}
 P(x) & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} -2(x-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -2(x-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \\
 \text{Pas besoin de calculer } & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \text{ pour conclure.} \\
 \text{Méthode ③ (Celle d'Issac... Newton) : On a} &
 \end{aligned}$$

$$P(x) \xrightarrow{C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3 + 3C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & (x-1)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Ici aussi, le calcul de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ est inutile.

Exercice de khôlle 357

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & a+c+d \\ a & c & c^2 & a+b+d \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{vmatrix}$$

Solution : On pose $S = a + b + c + d$ ainsi

$$\Delta = a \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & S-a \\ 1 & b & b^2 & S-b \\ 1 & c & c^2 & S-c \\ 1 & d & d^2 & S-d \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - S \times C_1 + C_2} a \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \\ 1 & d & d^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque : On peut aussi faire $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$ ce qui donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a^2 & S \\ a & b & b^2 & S \\ a & c & c^2 & S \\ a & d & d^2 & S \end{vmatrix} = a \times S \times \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & b^2 & 1 \\ 1 & c & c^2 & 1 \\ 1 & d & d^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice de khôlle 358

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = ((\sin(a_i + a_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$. Pour simplifier les écritures, on pose $s_i = \sin(a_i)$ et $c_i = \cos(a_i)$.

1. Calculer $\det A$ si $n = 3$.
2. Généraliser au cas où $n \geq 2$.

Solution :

1. Pour $n = 3$, on a

$$A = \begin{pmatrix} \sin(a_1 + a_1) & \sin(a_1 + a_2) & \sin(a_1 + a_3) \\ \sin(a_2 + a_1) & \sin(a_2 + a_2) & \sin(a_2 + a_3) \\ \sin(a_3 + a_1) & \sin(a_3 + a_2) & \sin(a_3 + a_3) \end{pmatrix}$$

La première colonne s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} \sin(a_1 + a_1) \\ \sin(a_2 + a_1) \\ \sin(a_3 + a_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(a_1) \cos(a_1) + \cos(a_1) \sin(a_1) \\ \sin(a_2) \cos(a_1) + \cos(a_2) \sin(a_1) \\ \sin(a_3) \cos(a_1) + \cos(a_3) \sin(a_1) \end{pmatrix} = \cos(a_1) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \sin(a_1) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

et la deuxième

$$\begin{pmatrix} \sin(a_1 + a_2) \\ \sin(a_2 + a_2) \\ \sin(a_3 + a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(a_1) \cos(a_2) + \cos(a_1) \sin(a_2) \\ \sin(a_2) \cos(a_2) + \cos(a_2) \sin(a_2) \\ \sin(a_3) \cos(a_2) + \cos(a_3) \sin(a_2) \end{pmatrix} = \cos(a_2) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \sin(a_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

et de même avec la troisième. Si on pose $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, on constate que

$$A = (c_1 S + s_1 C \mid c_2 S + s_2 C \mid c_3 S + s_3 C)$$

Géométriquement les trois colonnes sont combinaisons linéaires des deux vecteurs C et S , le parallélépipède construit sur ces colonnes est « plat » donc de volume nul. Ainsi $\det(A) = 0$.

2. On va généraliser, pour $n \geq 3$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de A vaut

$$C_j(A) = \begin{pmatrix} \sin(a_1 + a_j) \\ \sin(a_2 + a_j) \\ \vdots \\ \sin(a_n + a_j) \end{pmatrix} = \cos(a_j) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} + \sin(a_j) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Si on pose $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ alors $C_j(A) = \cos(a_j) \times S + \sin(a_j) \times C$. A ce stade, dans le cours,

rien ne permet d'affirmer que $\det(A) = 0$. (mais si on raisonne en terme d'hypercolume, c'est évident). Mais si on considère les trois premières colonnes, on a

$$\begin{aligned} C_1(A) &= c_1 \times S + s_1 \times C \\ C_2(A) &= c_2 \times S + s_2 \times C \\ C_3(A) &= c_3 \times S + s_3 \times C \end{aligned}$$

Et ainsi

$$A = (c_1S + s_1C \mid c_2S + s_2C \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A))$$

d'où par multilinéarité du déterminant

$$\begin{aligned} \det(A) &= c_1 \det(S \mid c_2S + s_2C \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) \\ &\quad + s_1 \det(C \mid c_2S + s_2C \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) \\ &= c_1c_2 \det(S \mid S \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) \\ &\quad + c_1s_2 \det(S \mid C \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) \\ &\quad + s_1c_2 \det(C \mid S \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) \\ &\quad + s_1s_2 \det(C \mid C \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) \end{aligned}$$

mais, ayant deux colonnes égales, on a

$$\begin{aligned} \det(S \mid S \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) &= 0 \\ \det(C \mid C \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) &= 0 \end{aligned}$$

Puis

$$\det(S \mid C \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) =_{C_3 - s_3 \times C_1 - c_3 S_1} \det(S \mid C \mid \bigcirc \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) = 0$$

et $\det(C \mid S \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) = -\det(S \mid C \mid c_3S + s_3C \mid C_4(A) \mid \cdots \mid C_n(A)) = 0$. Conclusion

$$\det(A) = 0 \text{ si } n \geq 3$$

Il reste le cas où $n = 2$ pour lequel

$$\det(A) = c_1s_2 \det(S \mid C) + s_1c_2 \det(C \mid S) = (c_1s_2 - s_1c_2) \begin{pmatrix} s_1 & c_1 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} = -(c_1s_2 - s_1c_2)^2$$

mais $c_1s_2 - s_1c_2 = \cos(a_1) \sin(a_2) - \sin(a_1) \cos(a_2) = -\sin(a_1 - a_2)$ d'où

$$\det(A) = -\sin^2(a_1 - a_2)$$

Exercice de khôlle 359

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, on pose $P(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de λ pour lesquels $P(\lambda)$ est inversible.

Solution : On a

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow -C_1 + C_2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (1-\lambda) \begin{vmatrix} \oplus 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ m-2 & m-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(m-\lambda) \end{aligned}$$

Ainsi $P(\lambda)$ est inversible pour $\lambda \notin \{1, 2, m\}$.

Exercice de khôlle 360

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels, on définit $A_n = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$\text{si } i + j = n + 1 \text{ alors } a_{i,j} = 0, \text{ sinon } a_{i,j} = 0$$

On pose alors $D_n = \det(A_n)$.

1. Calculer D_2 et D_3 directement.
2. Calculer A_3^2 , et retrouver la valeur de D_3^2 .
3. Calculer D_n pour $n \geq 2$.

Solution :

$$1. \text{ On a } D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} \text{ d'où } D_2 = a_1 a_2. \text{ Puis } D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ d'où (développement par rapport à la dernière} \\ \text{ligne) } D_3 = a_3 \times \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = a_3 \times D_2 = -a_3 a_2 a_1.$$

$$2. \text{ On a } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } A_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_1 a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 a_3 \end{pmatrix}. \text{ On a}$$

$$\det(A_3)^2 = a_1 a_3 \times a_2^2 \times a_1 a_3 = D_3^2 \text{ ouf!}$$

3. Dans D_n (pour $n \geq 3$) on développe par rapport à la dernière ligne pour avoir

$$D_n = a_n (-1)^{n+1} D_{n-1} = (-1)^{n-1} D_{n-1}$$

d'où, par récurrence

$$\begin{aligned} D_n &= a_n (-1)^{n-1} \times a_{n-1} (-1)^{n-2} \times \dots \times a_3 (-1)^3 \times (-1)^2 D_2 \\ &= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+3+2+1} a_1 a_2 \dots a_n \end{aligned}$$

$$\text{Avec } (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ on obtient}$$

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i$$

Exercice de khôlle 361

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels, soit

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

où tous les coefficients non diagonaux valent 1.

1. Calculer D_{n+1} en fonction de D_n (indication : la dernière colonne est la somme de deux colonnes simples).
2. Lorsque $\forall i, a_i \neq 0$, donner une expression simple de $\Delta_n = \frac{D_n}{a_1 \dots a_n}$.
3. Que valent Δ_n et D_n en fonction de n lorsque $a_i = i(i+1)$?

Solution :

1. On peut commencer par les petits cas pour voir que

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = a_1 + a_2 + a_1a_2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 0 \\ 1 & 1 & \oplus_{a_3} \end{vmatrix}$$

en écrivant que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Puis $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 0 \\ 1 & 1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 D_2$ en développant par rapport à la dernière colonne. Et enfin

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1a_2$$

Ainsi

$$D_3 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3$$

On généralise en écrivant que

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_{n+1} \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n+1} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \\ \vdots & 1 & \ddots & 1+a_n & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{n+1}D_n + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n+1} \underset{C_i-C_{n+1}, i \in \llbracket 1; n \rrbracket}{=} a_{n+1}D_n + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & a_n & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= a_{n+1}D_n + a_1 \cdots a_n$$

Par exemple

$$D_4 = a_4(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3) + a_1a_2a_3$$

$$= a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4$$

2. En particulier, si $a_1a_2a_3a_4 \neq 0$

$$\frac{D_4}{a_1a_2a_3a_4} = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}$$

Plus généralement, si $a_1 \cdots a_n \neq 0$, on a, pour $n \geq 3$,

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \frac{1}{a_n}$$

d'où $\sum_{k=2}^{n-1} (\Delta_{k+1} - \Delta_k) = \Delta_n - \Delta_2 = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1}} = \sum_{i=3}^n \frac{1}{a_i}$, ce qui avec $\Delta_2 = \frac{D_2}{a_1 a_2} = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ donne

$$\Delta_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

3. Si $a_i = i(i+1)$ (qui est non nul), on a

$$\Delta_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$$

Puis $a_1 \cdots a_n = \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n k(k+1) = \left(\prod_{k=1}^n k \right) \times \left(\prod_{k=1}^n (k+1) \right) = n! \times (n+1)! = (n+1) \times (n!)^2$ d'où

$$D_n = \frac{2n+1}{n+1} \times (n+1) \times (n!)^2 = (2n+1) \times (n!)^2$$

Exercice de khôlle 362

Calculer, pour $n \geq 2$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix}_n$$

Solution : On peut déjà regarder $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, et $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Puis

$$D_n \stackrel{C_n - C_1 - C_2 - \cdots - C_{n-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n - \sum_{k=1}^{n-1} k \end{vmatrix} = (n-1)! \times \left(n - \sum_{k=1}^{n-1} k \right)$$

Avec $n - \sum_{k=1}^{n-1} k = n - \frac{n(n-1)}{2} = -\frac{n(n-3)}{2}$, on obtient

$$D_n = -\frac{n!(n-3)}{2}$$

(ouf c'est bon si $n = 3$ ou $n = 2$).

Exercice de khôlle 363

Pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on pose

$$M = \begin{pmatrix} xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta = \det M$$

1. Calculer Δ par la règle de Sarrus.
2. Calculer Δ en enlevant la première colonne aux deux autres colonnes.

$$3. \text{ On pose } \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \text{ où } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

- (a) Calculer Ω^2 , que peut-on en déduire pour $\det \Omega$?
- (b) Calculer $M \times \Omega$, puis en déduire que

$$\Delta = -(x^2 + xy + y^2)(jx^2 + xy + j^2y^2)(j^2x^2 + xy + jy^2)$$

Solution :

1. On obtient

$$\begin{vmatrix} xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & xy \\ y^2 & xy & x^2 \\ xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & xy \end{vmatrix} = 3x^3y^3 - y^6 - (xy)^3 - x^6 = 2x^3y^3 - (x^6 + y^6) \\ = -(x^3 - y^3)^2$$

2. On a

$$\begin{vmatrix} xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_i \leftarrow C_i - C_1, i \in \{2,3\}} \begin{vmatrix} xy & x^2 - xy & y^2 - xy \\ x^2 & y^2 - x^2 & xy - x^2 \\ y^2 & xy - y^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} xy & x(x-y) & y(y-x) \\ x^2 & -(x+y)(x-y) & x(y-x) \\ y^2 & y(x-y) & -(x+y)(y-x) \end{vmatrix} \\ = -(x-y)^2 \begin{vmatrix} xy & x & y \\ x^2 & -(x+y) & x \\ y^2 & y & -(x+y) \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} -(x-y)^2 \begin{vmatrix} xy + x^2 + y^2 & 0 & 0 \\ x^2 & -(x+y) & x \\ y^2 & y & -(x+y) \end{vmatrix} \leftarrow \\ = -(x-y)^2 (xy + x^2 + y^2) \begin{vmatrix} -(x+y) & x \\ y & -(x+y) \end{vmatrix} \\ = -(x-y)^2 (xy + x^2 + y^2) ((x+y)^2 - xy) = -(x-y)^2 (xy + x^2 + y^2)^2$$

On est content de retrouver le même résultat (car $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ est une formule bien connue !).

3. On peut remarquer que Ω est une matrice de Van der Monde car

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix}$$

- (a) Un simple calcul donne, avec $j^3 = 1$, $j^4 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1+j+j^2 & 1+j+j^2 \\ 1+j+j^2 & 1+j^2+j^4 & 1+2j^3 \\ 1+j+j^2 & 1+2j^3 & 1+j^2+j^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\det(\Omega^2) = \det(\Omega)^2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -27$. On en déduit que $\det \Omega \neq 0$.

Remarque : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$ d'où $\Omega^{-1} = \frac{1}{9}\Omega^3$.

- (b) Encore un peu de calcul pour avoir

$$\begin{pmatrix} xy & x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 & xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy+x^2+y^2 & xy+jx^2+j^2y^2 & xy+jy^2+j^2x^2 \\ xy+x^2+y^2 & x^2+jy^2+j^2xy & jxy+x^2+j^2y^2 \\ xy+x^2+y^2 & jxy+y^2+j^2x^2 & y^2+jx^2+j^2xy \end{pmatrix}$$

Mais $\begin{pmatrix} xy+x^2+y^2 \\ xy+x^2+y^2 \\ xy+x^2+y^2 \end{pmatrix} = (x^2+xy+y^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} xy+jx^2+j^2y^2 \\ x^2+jy^2+j^2xy \\ jxy+y^2+j^2x^2 \end{pmatrix} = (jx^2+xy+j^2y^2) \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} xy+jy^2+j^2x^2 \\ jxy+x^2+j^2y^2 \\ y^2+jx^2+j^2xy \end{pmatrix} = (j^2x^2+xy+jy^2) \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{aligned} \det(M\Omega) &= (x^2+xy+y^2)(jx^2+xy+j^2y^2)(j^2x^2+xy+jy^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+xy+y^2)(jx^2+xy+j^2y^2)(j^2x^2+xy+jy^2) \times (-\det \Omega) \end{aligned}$$

Puisque $\det(M\Omega) = \det M \times \det \Omega$ et que $\det \Omega \neq 0$, on en déduit que

$$\Delta = \det M = -(x^2+xy+y^2)(jx^2+xy+j^2y^2)(j^2x^2+xy+jy^2)$$

Remarque : On a donc, lorsque x et y sont réels, $\Delta = -(x^2+xy+y^2)|jx^2+xy+j^2y^2|^2$, mais aussi $\Delta = -(x^2+y^2+xy)|x^2+jy^2+j^2xy|^2$ car

$$jx^2+xy+j^2y^2 = j(x^2+jy^2+j^2xy)$$

Exercice de khôlle 364

Pour $n \geq 2$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}_n$$

Calculer D_n en fonction de n .

Solution : On peut commencer par regarder pour n petit, par exemple $D_2 = -2$, $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{L_i \leftarrow L_i - L_2, i \in \{1,3\}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \text{ et surtout}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{L_i \leftarrow L_i - L_2, i \in \{1,3,4\}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

De manière générale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix} \stackrel{L_i \leftarrow L_i - L_2, i \neq 2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & n-3 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

11.2 Avec une relation de récurrence

Exercice de khôlle 365

Soit $n \geq 2$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n$$

On commencera par calculer D_2 puis D_3 .

Solution : On a $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ puis en développant par rapport

à la deuxième ligne, on a

$$D_n = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1} - 1$$

Si vous ne voyez pas comment cela fonctionne, il suffit de considérer le cas où $n = 4$ qui donne

$$D_4 = \begin{vmatrix} \oplus 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ominus 1 & \oplus 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \oplus 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ainsi la suite $(D_n)_{n \geq 2}$ est arithmétique de raison -1 d'où

$$D_n = D_2 - (n - 2) = 2 - n$$

Exercice de khôlle 366

Pour $n \geq 2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}_n$$

Solution : On développe par rapport à la première colonne pour avoir

$$D_n = (a+b) D_{n-1} - \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}_{n-1} = (a+b) D_{n-1} - ab D_{n-2}$$

en développant le second déterminant par rapport à la première ligne.

On ne sait pas encore résoudre ce type de récurrence, mais ce n'est pas gênant. En effet si on considère les premières valeurs, on a

$$\begin{aligned} D_1 &= a+b \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a+b & b \\ a & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2 \\ D_3 &= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

On montre par récurrence double que

$$D_n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \begin{cases} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} & \text{si } a \neq b \\ (n+1) a^n & \text{si } a = b \end{cases} \quad (\text{eh oui c'est une formule du cours})$$

ce qui est vrai si $n = 1$ et 2 (et même 3) puis

$$\begin{aligned} (a+b) \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} - ab \frac{a^n - b^n}{a-b} &= \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b} \quad \text{si } a \neq b \\ (a+b)(n+2)a^{n+1} - ab(n+1)a^n &= 2a(n+2)a^{n+1} - a^2(n+1)a^n = (n+3)a^{n+2} \end{aligned}$$

établit l'hérédité.

Remarque : En fait, c'est un exercice type du chapitre sur les réels et les suites classiques, mais comme on ne sait pas encore comment résoudre une récurrence du type $D_{n+2} = \alpha D_{n+1} + \beta D_n$, on s'en sort ainsi !

Exercice de khôlle 367

Calculer

$$D_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & a_2 & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & ? & \cdots & ? \end{vmatrix}_n$$

Solution : On a $D(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & ? \end{vmatrix} = -a_1 a_2$ puis on développe $D(a_1, \dots, a_n)$ par rapport à la première colonne pour avoir

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_n) &= (-1)^{n+1} a_n \times D(a_1, \dots, a_{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1} a_n \times (-1)^n a_{n-1} \times D(a_1, \dots, a_{n-2}) \\ &= (-1)^{n+1} a_n \times (-1)^n a_{n-1} \times \cdots \times (-1)^4 a_3 \times D(a_1, a_2) \\ &= (-1)^{n+1} a_n \times (-1)^n a_{n-1} \times \cdots \times (-1)^4 a_3 \times (-1)^3 a_2 \times (-1)^2 a_1 \\ &= \prod_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k = \prod_{k=1}^n (-1)^{k+1} \times \prod_{k=1}^n a_k = (-1)^{\sum_{k=1}^n (k+1)} \times \prod_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

Mais $\sum_{k=1}^n (k+1) = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$ d'où

$$D(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \prod_{k=1}^n a_k$$

Si on veut le prouver «proprement», on fait une récurrence. C'est vrai si $n = 2$ car $(-1)^{\frac{2 \times (2+3)}{2}} = -1$, puis avec

$$D(a_1, \dots, a_{n+1}) = (-1)^{n+2} a_{n+1} \times D(a_1, \dots, a_n)$$

et

$$\begin{aligned} (-1)^{n+2} a_{n+1} \times (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \prod_{k=1}^n a_k &= (-1)^{n+2 + \frac{n(n+3)}{2}} \prod_{k=1}^{n+1} a_k \\ \text{et } n+2 + \frac{n(n+3)}{2} &= \frac{(n+1)(n+4)}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que la proposition au rang n implique celle au rang $n+1$.

Exercice de khôlle 368

Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}$ pour lequel $\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$

$$\textcircled{1} a_{i,i} = \alpha_i \quad \textcircled{2} a_{i,n+1-i} = 1 - \alpha_i \text{ et } a_{i,j} = 0 \text{ si } i \notin \{i, n+1-i\}$$

1. Ecrire la forme de la matrice A pour $n \in \{2, 3, 4\}$.
2. Pour $n = 2p$, où $p \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant de A , puis traiter le cas n impair.

Solution :

1. On a pour $n = 2, 3, 4$ successivement

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_1 \\ 1 - \alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \\
 A &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 - \alpha_1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 - \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ car } a_{2,2} = a_{2,4-2} \text{ d'où } \alpha_2 = 1 - \alpha_2 \\
 A &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 1 - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_3 & \alpha_3 & 0 \\ 1 - \alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. On constate que pour n impair, en développant par rapport à la colonne d'indice $\frac{n+1}{2}$, on se ramène au cas pair ! Pour $n = 4$, on remarque que

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 1 - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_3 & \alpha_3 & 0 \\ 1 - \alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_1 \leftarrow C_1 + C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - \alpha_1 \\ 0 & 1 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{vmatrix} \\
 & \begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - \alpha_1 \\ 0 & 1 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 + \alpha_3 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 + \alpha_4 - 1 \end{vmatrix} = (\alpha_1 + \alpha_4 - 1)(\alpha_2 + \alpha_3 - 1)
 \end{aligned}$$

De manière générale, on a, pour $n = 2p$

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \alpha_p & 1 - \alpha_p & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 - \alpha_{p+1} & \alpha_{p+1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 - \alpha_{2p} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{2p} \end{vmatrix}$$

Les opérations suivantes : $C_i \leftarrow C_i + C_{2p+1-i}$, puis $L_{2p+1-i} \leftarrow L_{2p+1-i} - L_i$ pour $i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$ donnent

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 - \alpha_p & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \alpha_p + \alpha_{p+1} - 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 & \alpha_{p-1} + \alpha_{p+2} - 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \alpha_2 + \alpha_{2p-1} - 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_1 + \alpha_{2p} - 1 \end{vmatrix}$$

d'où

$$\det A = (\alpha_1 + \alpha_{2p} - 1)(\alpha_2 + \alpha_{2p-1} - 1) \cdots (\alpha_p + \alpha_{p+1} - 1) = \prod_{k=1}^p (\alpha_k + \alpha_{2p+1-k} - 1)$$

Enfin, pour $n = 2p + 1$, on a

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \alpha_2 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha_p & 0 & 1 - \alpha_p & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 - \alpha_{p+1} & 0 & \alpha_{p+2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 - \alpha_{2p+1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{2p+1} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la colonne d'indice $p + 1$, on obtient $\det A = \frac{1}{2} \times D$ où D est le déterminant d'une matrice de taille $2p$ construite avec les règles de l'énoncé pour le $2p$ -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_{2p+1})$ d'où

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_{2p+1} - 1)(\alpha_2 + \alpha_{2p} - 1) \cdots (\alpha_p + \alpha_{p+2}) \\ &= \frac{1}{2} \prod_{k=1}^p (\alpha_k + \alpha_{2p+2-k} - 1) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 369

Soit $a \in \mathbb{C}$, pour $n \geq 2$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} a^2 + 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a^2 + 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a^2 + 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & a^2 + 1 \end{vmatrix}_n$$

1. Calculer D_2 et D_3 .
2. Donner une relation de récurrence entre D_{n+2} , D_{n+1} et D_n lorsque $n \geq 2$.
3. Que poser pour D_0 et D_1 pour que la relation soit vrai à partir de $n \geq 0$.
4. En considérant $u_n = D_{n+1} - D_n$, déterminer D_n en fonction de n .

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2+1 \end{vmatrix} = a^4 + a^2 + 1 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a^2+1 & a & 0 \\ a & a^2+1 & a \\ 0 & a & a^2+1 \end{vmatrix} = (a^2+1) \begin{vmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2+1 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a^2+1 \end{vmatrix} \\ &= (a^2+1) \left((a^2+1)^2 - a^2 \right) - a^2 (a^2+1) = a^6 + a^4 + a^2 + 1 \end{aligned}$$

2. On développe par rapport à la première ligne pour avoir

$$\begin{aligned} D_{n+2} &= \begin{vmatrix} \oplus a^2+1 & \ominus a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a^2+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a^2+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & a^2+1 \end{vmatrix}_{n+2} \\ &= (a^2+1) \begin{vmatrix} a^2+1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a^2+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a^2+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & a^2+1 \end{vmatrix}_{n+1} - a \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a^2+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & a^2+1 \end{vmatrix}_{n+1} \end{aligned}$$

En développant le second déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

$$D_{n+2} = (a^2+1) D_{n+1} - a^2 D_n.$$

3. Si on pose $D_1 = a^2 + 1$ (semble logique), on a bien

$$D_3 = (a^2+1) (1 + a^2 + a^4) - a^2 (a^2+1)$$

Puis, on pose $D_0 = 1$ afin d'avoir $D_2 = 1 + a^2 + a^4 = (a^2+1) \times (a^2+1) - a^2$.

4. Avec $u_n = D_{n+1} - D_n$, on obtient

$$u_{n+1} = D_{n+2} - D_{n+1} = a^2 (D_{n+1} - D_n) = a^2 u_n$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison a^2 d'où

$$u_n = a^{2n} u_0 = a^{2n} (D_1 - D_0) = a^{2(n+1)}$$

Puis

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (D_{k+1} - D_k) = D_n - D_0$$

ce qui donne

$$D_n = 1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{2n}$$

Remarque : Bien sûr si $a^2 \neq 1$, cela se simplifie en $D_n = \frac{1 - a^{2(n+1)}}{1 - a^2}$ et si $a^2 = 1$, on a $D_n = n + 1$.

11.3 Tout Cramer

Exercice de khôlle 370

Lorsqu'il est de Cramer, résoudre avec les formules de Cramer

$$\begin{cases} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.

Solution : La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ de déterminant

$$\begin{aligned} \det A & \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_{i \in \{2,3\}} \leftarrow C_i - C_1}{=} (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Pour $\lambda \notin \{1, -2\}$, le système est de Cramer. Dans ce cas, on a

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \text{ et } z = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice de khôlle 371

Résoudre lorsqu'il est de Cramer et avec les formules de Cramer

$$\begin{cases} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= -b - 1 \end{cases}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution : Le déterminant du système vaut

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} b(a + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\ & \stackrel{C_{i \in \{2,3\}} \leftarrow C_i - C_1}{=} b(a + 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a - 1 & 0 \\ 1 & 0 & a - 1 \end{vmatrix} \\ &= b(a + 2)(a - 1)^2 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ -1 - b & b & a \end{vmatrix} = \frac{b}{D} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & 1 \\ -1 - b & 1 & a \end{vmatrix} \stackrel{C_{i \in \{1,2\}} \leftarrow C_i - C_3}{=} \frac{b}{D} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b - 1 & a - 1 & 1 \\ -1 - b - a & 1 - a & a \end{vmatrix} \\ &= \frac{b(a - 1)}{D} \begin{vmatrix} \oplus 0 & \ominus 0 & \oplus 1 \\ b - 1 & 1 & 1 \\ -1 - b - a & -1 & a \end{vmatrix} \stackrel{\leftarrow}{=} \frac{b(a - 1)}{D} (1 - b + 1 + b + a) = \frac{b(a - 1)(a + 2)}{D} = \frac{1}{a - 1} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & -1-b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a+2 & 0 & a+2 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & -1-b & a \end{vmatrix} = \frac{a+2}{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & -1-b & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \frac{a+2}{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & -1-b & a-1 \end{vmatrix} = \frac{b(a-1)(a+2)}{D} = \frac{1}{a-1}$$

Enfin $z = 1 - ax - by = 1 - \frac{a+b}{a-1} = -\frac{b+1}{a-1}$ que l'on retrouve avec

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & -1-b \end{vmatrix} = \frac{b}{D} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & 1 & -1-b \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \frac{b(a+2)}{D} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & 1 & -1-b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \frac{b(a+2)}{D} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & 0 & \oplus -1-b \end{vmatrix} \leftarrow = \frac{-(b+1)b(a-1)(a+2)}{D} = -\frac{b+1}{a-1}$$

11.4 Du bon usage du déterminant

Exercice de khôlle 372

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Solution : On a

$$\det A \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_i \in \{2,3,4\} \leftarrow C_i - C_1} 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1)^3 \neq 0$$

Ainsi A est inversible.

Pour le calcul de A^{-1} , on évite la méthode barbare ! On écrit que

$$A = B - I \text{ où } B = ((1)) \text{ (la matrice barbare où tous les coefficients valent 1)}$$

Ainsi $(B \times I = I \times B)$

$$\begin{aligned} A^2 &= B^2 - 2B + I = 4B - 2B + I \text{ car } B^2 = 4B \\ &= 2(B - I) + 3I = 2A + 3I \end{aligned}$$

d'où $\left(\frac{A-2I}{3}\right) \times A = I$ ce qui prouve que

$$A^{-1} = \frac{A-2I}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 373

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ et

$$A(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

1. À quelle condition $A(a_1, \dots, a_n)$ est-elle inversible ?
2. Dans ce cas calculer $A(a_1, \dots, a_n)^{-1}$ et l'expliciter si $n = 3$.

Solution :

1. Posons $D(a_1, \dots, a_n) = \det A(a_1, \dots, a_n)$. En développant par rapport à la dernière ligne, on a pour $n \geq 3$

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_n) &= D(a_1, \dots, a_{n-1}) + (-1)^{n+1+1} \times (-a_n) \times \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \end{vmatrix}_n \\ &= D(a_1, \dots, a_{n-1}) + (-1)^{n+1+1} \times (-a_n) \times (-1)^{n+1} \times (-a_n) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & 1 \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= D(a_1, \dots, a_{n-1}) - a_n^2 \end{aligned}$$

Puisque $D(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 \\ -a_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a_1^2$, on en déduit par une récurrence immédiate que

$$D(a_1, \dots, a_n) = 1 - \sum_{k=1}^n a_k^2$$

Ainsi $A(a_1, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement si $\sum_{k=1}^n a_k^2 \neq 1$.

2. On se place donc dans le cas où $\sum_{k=1}^n a_k^2 \neq 1$. On note A à la place de $A(a_1, \dots, a_n)$ et $D = \det A = 1 - \sum_{k=1}^n a_k^2$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont des colonnes de $\mathbb{R}^{n+1}$ alors

$$AX = Y \iff X = AY$$

Mais

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n = y_0 \\ -a_1 x_0 + x_1 = y_1 \\ \vdots \\ -a_k x_0 + x_k = y_k \\ \vdots \\ -a_n x_0 + x_n = y_n \end{cases}$$

d'où, avec les lignes 2 à $n+1$

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k = y_k + a_k x_0$$

et avec la première ligne

$$x_0 = y_0 + \sum_{k=1}^n a_k x_k = y_0 + \sum_{k=1}^n a_k y_k + \sum_{k=1}^n a_k^2 x_0$$

ce qui donne

$$x_0 = \frac{y_0}{D} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{D} y_k$$

puis $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} x_i &= y_i + a_i x_0 = y_i + a_i \left(\frac{y_0}{D} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{D} y_k \right) \\ &= \frac{a_i y_0}{D} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{a_k}{D} y_k + \left(1 + \frac{a_i^2}{D} \right) y_i = \frac{a_i y_0}{D} + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{a_i a_k}{D} y_k + \frac{1 - \sum_{k=1, k \neq i}^n a_k^2}{D} y_i \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} y_0 + a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n \\ = a_1 y_0 + (1 - a_2^2 - \cdots - a_n^2) y_1 + a_1 a_2 y_2 + \cdots + a_1 a_n y_n \\ \vdots \\ = a_2 y_0 + a_i a_1 y_1 + \cdots + \left(1 - \sum_{k=1, k \neq i}^n a_k^2 \right) y_i + \cdots + a_i a_n y_n \\ \vdots \\ = a_n y_0 + a_n a_1 y_1 + \cdots + a_n a_{n-1} y_n + (1 - a_2^2 - \cdots - a_{n-1}^2) y_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & -a_n \\ a_2 & (1 - a_2^2 - \cdots - a_n^2) & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_3 & a_1 a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} a_n \\ a_n & a_1 a_n & \cdots & a_{n-1} a_n & (1 - a_2^2 - \cdots - a_{n-1}^2) \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par exemple si $n = 3$, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{(1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & (1 - a_2^2 - a_3^2) & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_2 & a_2 a_1 & (1 - a_1^2 - a_3^2) & a_3 a_2 \\ a_3 & a_3 a_1 & a_3 a_2 & (1 - a_1^2 - a_2^2) \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 374

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $N = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par

$$\begin{aligned} \forall i &\in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,1} = a_i, a_{i,i} = a_1, a_{i,n} = a_{n-i+1} \\ \text{et } a_{i,j} &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

1. Ecrire la matrice N pour $n \in \{2, 3, 4\}$ et donner la «forme générale» pour $n \geq 2$.
2. Calculer $D = \det N$.
3. A quelle(s) condition(s) la matrice N est-elle inversible ?
4. Calculer l'inverse de N si $n = 3$, lorsque N est inversible !

Solution :

1. On suit ce qui est donné pour avoir

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \text{ si } n = 2$$

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \text{ si } n = 3$$

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ a_2 & a_1 & 0 & a_3 \\ a_3 & 0 & a_1 & a_2 \\ a_4 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \text{ si } n = 4$$

et de manière générale

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_2 & a_1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_1 & a_2 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

d'où son nom !

2. On peut sortir a_1 en facteur dans les colonnes 2 à $n-1$, mais ce n'est pas indispensable. Pour $n \geq 3$, On développe D par rapport la première ligne pour avoir

$$D = a_1 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \bigcirc & \ddots & a_1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a_1 \times a_1^{n-1} + (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \bigcirc & \ddots & a_1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

On développe le second déterminant par rapport à la dernière ligne pour avoir

$$D = a_1^n + (-1)^{n+1} a_n \times (-1)^{n-1+1} a_n \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{vmatrix}_{n-2} = a_1^n + (-1)^{n+1} a_n \times (-1)^{n-1+1} a_n \times a_1^{n-2}$$

$$= a_1^{n-2} \times (a_1^2 + (-1)^{2n+1} a_n^2) = a_1^{n-2} (a_1 - a_n)(a_1 + a_n)$$

On est ravi de constater que si $n = 2$, on obtient bien $a_1^2 - a_2^2$.

3. La matrice N est inversible si et seulement si $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq \pm a_1$.

4. Pour $n = 3$, on a $N = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$ et $D = a_1 (a_1^2 - a_3^2)$. On résout le système

$$N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ qui s'écrit } (S) : \begin{cases} a_1 x_1 + a_3 x_3 = y_1 \\ a_2 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 = y_2 \\ a_3 x_1 + a_1 x_3 = y_3 \end{cases}$$

Puisque $a_1 \neq 0$ (sinon N n'est pas inversible) on a

$$(S) \quad L_i \leftarrow L_i - \frac{a_i}{a_1} L_1, \quad i \in \{2, 3\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 + a_3 x_3 = y_1 \\ a_1 x_2 + \left(a_2 - \frac{a_2 a_3}{a_1} \right) x_3 = y_2 - \frac{a_2}{a_1} y_1 \\ \left(a_1 - \frac{a_3^2}{a_1} \right) x_3 = y_3 - \frac{a_3}{a_1} y_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 = y_1 - a_3 x_3 \\ a_1 x_2 = y_2 - \frac{a_2}{a_1} y_1 - \frac{a_2 (a_1 - a_3)}{a_1} x_3 \\ \frac{D}{a_1^2} x_3 = \frac{a_1 y_3 - a_3 y_1}{a_1} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 = y_1 - \frac{a_1 a_3}{D} (-a_3 y_1 + a_1 y_3) \\ a_1 x_2 = y_2 - \frac{a_2}{a_1} y_1 - \frac{a_2 (a_1 - a_3)}{D} (-a_3 y_1 + a_1 y_3) \\ x_3 = \frac{a_1}{D} (-a_3 y_1 + a_1 y_3) \end{array} \right.$$

Ce qui donne

$$x_3 = \frac{a_1}{D} (-a_3 y_1 + a_1 y_3)$$

La troisième ligne de N^{-1} est donc

$$\left(-\frac{a_1 a_3}{D} \quad 0 \quad -\frac{a_1^2}{D} \right)$$

Puis on a $a_1 x_1 = y_1 - \frac{a_1 a_3}{D} (-a_3 y_1 + a_1 y_3)$ qui donne

$$x_1 = \frac{1}{a_1} \left(1 + \frac{a_1 a_3^2}{D} \right) y_1 - \frac{a_1 a_3}{D} y_3 \text{ et que } \left(1 + \frac{a_1 a_3^2}{D} \right) = \frac{a_1^2 - a_1 a_3^2 + a_1 a_3^2}{D}$$

(on peut aussi remarquer que dans la première écriture de (S) , l'échange des indices 1 et 3 se traduit pas l'échange des membre de gauche des lignes 1 et 3 donc que $x_1 = \frac{a_3}{D} (-a_1 y_3 + a_3 y_1)$).

Enfin $a_1 x_2 = y_2 - \frac{a_2}{a_1} y_1 - \frac{a_2 (a_1 - a_3)}{D} (-a_3 y_1 + a_1 y_3)$ donne

$$x_2 = \frac{a_2}{a_1} \left(-\frac{1}{a_1} + \frac{a_3 (a_1 - a_3)}{D} \right) y_1 + \frac{1}{a_1} y_2 - \frac{a_2 (a_1 - a_3)}{D} y_3$$

mais

$$-\frac{1}{a_1} + \frac{a_3 (a_1 - a_3)}{D} = -\frac{1}{a_1} + \frac{a_3 (a_1 - a_3)}{a_1 (a_1^2 - a_3^2)} = -\frac{1}{a_1} + \frac{a_3}{a_1 (a_1 + a_3)} = -\frac{1}{a_1 + a_3}$$

d'où

$$x_2 = -\frac{a_2}{a_1 (a_1 + a_3)} y_1 + \frac{1}{a_1} y_2 - \frac{a_2 (a_1 - a_3)}{D} y_3 = \frac{1}{D} (-a_2 (a_1 - a_3) y_1 + (a_1^2 - a_3^2) y_2 - a_2 (a_1 - a_3) y_3)$$

ce qui donne

$$N = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & -a_3 a_1 \\ -a_2 (a_1 - a_3) & a_1^2 - a_3^2 & -a_2 (a_1 - a_3) \\ -a_3 a_1 & 0 & a_1^2 \end{pmatrix} \quad (\text{ouf!})$$

Exercice de khôlle 375

On définit la suite de Fibonacci par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que pour $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

2. Montrer l'identité de Cassini

$$\forall n \geq 1, f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

3. Montrer que pour $n \geq 2$, on a

$$f_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

où le déterminant est de taille $n-1$.

Solution :

1. Par récurrence, on montre $\mathcal{P}(n) \equiv \langle A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \rangle$. C'est vrai si $n = 1$ car $f_2 = f_1 + f_0 = 1$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vrai à un rang $n \geq 1$ fixé alors

$$A^{n+1} = A \times A^n \stackrel{HR_n}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n+1} & f_n + f_{n-1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$$

par définition de la suite de Fibonacci

2. On a donc pour $n \geq 1$

$$(-1)^n = (\det A)^n = \det A^n = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2$$

3. On pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

pour $n \geq 4$, on développe par rapport à la première colonne pour avoir

$$D_n = D_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-2} = D_{n-1} + D_{n-2}$$

en développant le second déterminant par rapport à la première ligne. Ainsi pour $n \geq 2$, on a

$$D_{n+2} = D_{n+1} + D_n$$

Puisque $D_2 = 1$ et $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, en posant $D_1 = 1$ puis $D_0 = 0$, la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci et les mêmes conditions initiales, elles sont donc égales (pour le prouver, une récurrence double suffit!).

Exercice de khôlle 376

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = AB + A + B - I_n$. On note, comme l'usage le veut, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On pose

$$M = I_n + jA + j^2B \text{ et } N = I_n + j^2A + jB.$$

1. Simplifier MN dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Justifier que $\det(MN) \in \mathbb{R}_+$.
3. Que peut-on en déduire pour $\det(AB - BA)$?

Solution :

1. On sait que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$, en développant (attention $AB \neq BA$ a priori), on obtient

$$\begin{aligned} M &= I_n + j^2A + jB + jA + j^3A^2 + j^2AB + j^2B + j^4BA + j^3B^2 \\ &= I_n + (j + j^2)A + (j + j^2B) + A^2 + B^2 + j^2AB + j^4BA \\ &= (I_n - A - B + A^2 + B^2) + j^2AB + jBA \\ &= AB + j^2AB + jBA = (1 + j^2)AB + jBA = -j(AB - BA) \end{aligned}$$

2. On a $\det M = \det(I_n + jA + j^2B)$ et $\det N = \det(I_n + j^2A + jB)$. Si $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ alors $N = ((\overline{m_{i,j}}))_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice conjuguée de M . On a donc $\det N = \overline{\det M}$, il vient alors $\det(MN) = \det M \times \overline{\det M} = |\det M|^2 \in \mathbb{R}_+$.

Remarque : Si vous souhaitez une preuve de $\det N = \overline{\det M}$, cela se fait par récurrence. C'est clairement vrai si $n = 1$ ou $n = 2$. Puis, en développant le déterminant de N par rapport à une des colonnes (ou ligne) on en déduit l'hérédité.

3. En passant au déterminant, on a $\det(MN) = (-j)^n \det(AB - BA) \in \mathbb{R}_+$. Mais $AB - BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc deux cas :

Cas ① : $n = 0 \pmod{3}$ (i.e. n multiple de 3) alors $(-j)^n = (-1)^n \times j^n = (-1)^n$ d'où

$$\det(AB - BA) = (-1)^n |\det M|^2 \text{ est du signe de } (-1)^n$$

Cas ② : n n'est pas multiple de 3, mais alors $(-j)^n = (-1)^n j^n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, d'où $\det(AB - BA) = 0$ (sinon $(-1)^n = \frac{|\det M|^2}{\det(AB - BA)} \in \mathbb{R}$).

Exercice de khôlle 377

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $AB - BA = B$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k = B^k(A + kI_n)$.
2. (*) Soit $P(x) = \det(xI_n - A)$, montrer que P est un polynôme en x de degré n .
3. En déduire que B n'est pas inversible.

Solution :

1. Par récurrence sur k , on montre $\mathcal{P}(k) = \langle AB^k = B^k(A + kI_n) \rangle$. C'est vrai si $k = 0$ car $B^0 = I_n$. Puis si $\mathcal{P}(k)$ est vraie à un rang $k \geq 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned} AB^{k+1} &= AB^k \times B \underset{HR_k}{=} B^k(A + kI_n)B = B^k(AB + kB) \\ &= B^k(BA + B + kB) \text{ car } AB - BA = B \\ &= B^{k+1}(A + (k+1)I_n) \text{ car } B = B \times I_n \end{aligned}$$

2. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $E_1, \dots, E_n$ celles de I_n . On a donc

$$P(x) = \det(xE_1 + C_1 | xE_2 + C_2 | \dots | xE_n + C_n)$$

Si on développe ce déterminant par linéarité par rapport à la première colonne, puis la deuxième, puis la troisième ..., on obtient 2^n déterminants. Ces 2^n déterminants ont pour colonnes soit des xE_i soit des C_i . Pour chacun de ces déterminants, en présence d'une colonne du type xE_i , on peut sortir x en facteur. Ainsi chacun des 2^n déterminants est de la forme $x^p \Delta$ où p est le nombre de colonnes du type xE_i et Δ ne dépend pas de x . Parmi ces 2^n déterminants, un seul a n colonnes du type xE_i (et il vaut alors $x^n \det I_n = x^n$), les autres contribuent à des termes de degré strictement inférieur à n . Conclusion P est un polynôme en x de degré n .

Pour bien comprendre avec $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} P(x) &= \begin{vmatrix} x - a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & x - a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & x - a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ 0 & x - a_{2,2} & -a_{2,3} \\ 0 & -a_{3,2} & x - a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & x - a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & x - a_{3,3} \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} x & 0 & -a_{1,3} \\ 0 & x & -a_{2,3} \\ 0 & 0 & x - a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ 0 & -a_{2,2} & -a_{2,3} \\ 0 & -a_{3,2} & x - a_{3,3} \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} -a_{1,1} & 0 & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & x & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & 1 & x - a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & x - a_{3,3} \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(\left(\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & -a_{1,3} \\ 0 & x & -a_{2,3} \\ 0 & 0 & -a_{3,3} \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} x & -a_{1,2} & 0 \\ 0 & -a_{2,2} & 0 \\ 0 & -a_{3,2} & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ 0 & -a_{2,2} & -a_{2,3} \\ 0 & -a_{3,2} & -a_{3,3} \end{vmatrix} \right) \right) \\ &\quad + \left(\begin{vmatrix} -a_{1,1} & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & x & 0 \\ -a_{3,1} & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{1,1} & 0 & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & x & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & 1 & -a_{3,3} \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & 0 \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

A chaque étape, on double le nombre de déterminants. Un seul à 3 colonnes du type xE_i , c'est le premier !

3. Par l'absurde si B est inversible alors $\det B \neq 0$. Mais l'égalité $AB^k = B^k(A + kI_n)$ donne, en passant au déterminant

$$\det(A) \det(B)^k = \det(B)^k \det(A + kI_n)$$

Puisque $\det(B)^k \neq 0$, on obtient

$$\det(A + kI_n) = \det(A)$$

Mais $P(-k) = \det(-kI_n - A) = (-1)^n \det(A + kI_n)$ ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, (-1)^n P(-k) = \det A, \text{ i.e. } (-1)^n P(-k) \text{ est constant !}$$

Absurde car $P(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^n$ d'où $(-1)^n P(-k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k^n \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$.

CHAPITRE 12

RÉELS, PARTIE ENTIÈRE ET SUITES CLASSIQUES

12.1 Tout cela n'est pas bien rationnel

Exercice de khôlle 378

Montrer que $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est un irrationnel.

Solution : L'idée est de se ramener $\sqrt{2}$! Par l'absurde si $x \in \mathbb{Q}$ alors

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - x\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

en développant $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - x\right)^2 - 5$ on obtient

$$x^2 - 2x\sqrt{2} - 2x\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\sqrt{3} = x^2 - 2x\sqrt{2} - 2\left(x + \sqrt{2}\right) \times \sqrt{3} = 0$$

d'où

$$2\left(x + \sqrt{2}\right) \times \sqrt{3} = x^2 - 2x\sqrt{2} = x\left(x - 2\sqrt{2}\right)$$

que l'on élève au carré pour avoir

$$12\left(x + \sqrt{2}\right)^2 = x^2\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2$$

soit

$$12x^2 + 24x\sqrt{2} + 24 = x^4 - 4x^3\sqrt{2} + 8x^2$$

ce que l'on écrit

$$\left(4x^3 + 24x\right)\sqrt{2} = x^4 - 4x^2 - 24$$

et permet d'affirmer (car $4x^3 + 24x \neq 0$) que

$$\sqrt{2} = \frac{x^4 - 4x^2 - 24}{4x^3 + 24x} \in \mathbb{Q} \text{ car } x \in \mathbb{Q}, \text{ absurde !}$$

Exercice de khôlle 379

Soit n un entier $n \geq 2$.

1. Montrer que le réel $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ est un irrationnel.
2. On pose $u_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$, on a montré, dans un exercice type que

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

Montrer que u_n est un irrationnel.

Solution :

1. Pour $n = 2$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (car si $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$ alors $\sqrt{2} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ absurde).

Puis pour $n = 3$, si $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{p}{q}$ où $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ alors

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2p^2}{q^2} - 1 \text{ d'où } \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q} \text{ absurde}$$

Tout cela nous indique qu'une récurrence devrait faire l'affaire ! Par récurrence (on vient de faire l'initialisation), on suppose que $\cos \frac{\pi}{2^n} \in \mathbb{I}$. Si on suppose que $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{p}{q}$ où $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(2 \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1 = \frac{2p^2}{q^2} - 1 \in \mathbb{Q}$$

contraire à l'hypothèse de récurrence, absurde. Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Attention, ne pas croire que u_n est irrationnel en tant que produit d'irrationnels ! Un produit d'irrationnel, par exemple $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ n'a aucune raison d'être irrationnel !

Mais si $u_n \in \mathbb{Q}$ alors $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}u_n} \in \mathbb{Q}$ et $1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(2 \frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) \in \mathbb{Q}$. Pour $n \geq 3$, c'est absurde ! Reste le cas $n = 2$, mais $u_2 = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est un irrationnel. Conclusion $u_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pour $n \geq 2$.

Exercice de khôlle 380

Le grand théorème de Fermat affirme que, pour $n \geq 3$, l'équation

$$a^n + b^n = c^n \text{ où } (a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$$

n'a pas de solution. Utiliser ce théorème (dont la preuve ne tient pas dans la marge) pour montrer que $\sqrt[n]{2}$ est irrationnel pour $n \geq 3$.

Solution : Par l'absurde, si $\sqrt[n]{2} = \frac{c}{a}$ où $(a, c) \in (\mathbb{N}^*)^2$ alors $2 = \frac{c^n}{a^n}$ d'où $a^n + a^n = c^n$, absurde !

Bon je l'avoue, tout ceci, bien que correct, relève de la blague mathématique !

Bien sûr, on peut simplement écrire que si $2a^n = c^n$ alors 2 divise c^n donc 2 divise c (car si c est impair, il en est

de même de c^n). On peut donc écrire que $c = 2d$ puis $a^n = 2^{n-1}d^n$ permet d'affirmer que 2 divise a . Absurde si on suppose la fraction irréductible.

12.2 Borne supérieure et inférieure

Exercice de khôlle 381

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$, montrer que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf B \leq \inf A$.

Solution : On sait que $\sup B$ majore B donc pour $a \in A$ quelconque, on a $a \in B$ donc $a \leq \sup B$. Ainsi $\sup B$ est un majorant de A . Puisque $\sup A$ est le plus petit des majorants de A , on en déduit que $\sup A \leq \sup B$. De la même manière $a \in B$ donc $\inf B \leq a$, ainsi $\inf B$ est un minorant de A d'où $\inf B \leq \inf A$.

Exercice de khôlle 382

Justifier que $\sup \{x \in \mathbb{Q}, x^3 - 3x + 2 < 0\}$ existe et le déterminer.

Solution : On pose $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^3 - 3x + 2 < 0\}$. On remarque que 1 est racine évidente de $x^3 - 3x + 2$, on factorise alors $x \in \mathbb{Q}$, $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, ainsi pour $x \in \mathbb{Q}$

$$x^3 - 3x + 2 < 0 \iff x \in]1, 2[$$

On en déduit que $A \subset [1, 2]$ donc est majorée, ceci justifie l'existence de $\sup A$. Montrons que $\sup A = 2$ (ce qui semble quasi évident). On vient de montrer que 2 majore A , soit $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$, alors

$$u_n \in \mathbb{Q} \text{ et } u_n \in]1, 2[\text{ donc } u_n \in A$$

Puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$, on en déduit (critère séquentiel) que $\sup A = 2$.

Exercice de khôlle 383

Soit $A = \left\{(-1)^n + \frac{2^n}{4^n + 1}, n \in \mathbb{N}\right\}$, justifier que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent et les déterminer.

Solution : Avant tout $A \neq \emptyset$ ($\frac{3}{2} = (-1)^0 + \frac{2^0}{4^0 + 1} \in A$ par exemple). Soit $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = (-1)^n + \frac{2^n}{4^n + 1}$. Puisque $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et

$$0 \leq \frac{2^n}{4^n + 1} \leq \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n} \leq 1 \text{ car } 0 \leq 4^n \leq 4^n + 1$$

on a donc $-1 \leq x \leq 2$. Ainsi -1 minore A et 2 majore A . On en déduit que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent (et que $-1 \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq 2$).

Montrons que $-1 = \inf(A)$. Soit $u_n = -1 + \frac{2^{2n+1}}{4^{2n+1} + 1}$, alors $u_n \in A$. Puis

$$0 \leq \frac{2^{2n+1}}{4^{2n+1} + 1} \leq \frac{2^{2n+1}}{4^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$. Conclusion ① -1 minore A et ② il existe une suite d'éléments de A qui converge vers -1 , ce qui prouve que $-1 = \inf(A)$.

Pour la borne supérieure, avec $n = 0$ on a $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \in A$. Montrons qu'il s'agit du plus grand élément, ce qui revient à prouver que pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on sait déjà que c'est vrai si $n = 0$, valeur pour laquelle il y a égalité), on a

$$(-1)^n + \frac{2^n}{4^n + 1} \leq \frac{3}{2}$$

Pour $n \geq 1$ on a $(-1)^n + \frac{2^n}{4^n + 1} \leq 1 + \frac{2^n}{4^n + 1} \leq 1 + \frac{2^n}{4^n} = 1 + \frac{1}{2^n} \leq 1 + \frac{1}{2}$ car $2^n \geq 2$, ce qui prouve que $\frac{3}{2}$ majore A .

Conclusion ① $\frac{3}{2}$ est élément de A et ② $\frac{3}{2}$ majore A , donc $\frac{3}{2} = \max A = \sup A$.

Exercice de khôlle 384

1. Montrer que pour $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$

2. Soit $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$, justifier que A admet une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

Solution :

1. Puisque $m \geq 1$ et $n \geq 1$ on a $\frac{mn}{(m+n)^2} > 0$. Puis

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4} \iff 4mn \leq (m+n)^2 \iff 0 \leq (m+n)^2 - 4mn = (m-n)^2$$

La dernière inégalité est vraie donc la première également.

2. Avant tout $A \neq \emptyset$ ($\frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{(1+1)^2} \in A$ par exemple, oh oh!). La question 1 montre que A est bien minorée (par 0) et majorée (par $\frac{1}{4}$) donc que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ sont dans A . Puisque ① $\frac{1}{4} \in A$ et ② $\frac{1}{4}$ majore, on en déduit que $\frac{1}{4} = \max A = \sup A$.

Pour la borne inférieure, soit $u_n = \frac{1 \times n}{(1+n)^2}$ alors $u_n \in A$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Conclusion ① 0 minore A et ② il existe une suite d'éléments de A qui converge vers 0, ce qui prouve que $0 = \inf(A)$.

12.3 La partie entière

Exercice de khôlle 385

Résoudre $\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 2$ où $x \in \mathbb{R}$.

Solution : L'ensemble de définition de l'équation est $[-1, +\infty[$.

Analyse : on suppose qu'il existe une solution notée x . On pose $y = \sqrt{x+1}$, alors

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \text{ donne } 2 \leq \sqrt{x+1} < 3 \text{ d'où } 3 \leq x \leq 8$$

Synthèse : Si $x \in [3, 8[$ alors $x+1 \in [4, 9[$ d'où $\sqrt{x+1} \in [2, 3[$ et on a bien $\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 2$.

Exercice de khôlle 386

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n + 1$.

Solution : On a $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}$, ainsi puisque $2n + 3 \in \mathbb{Z}$

$$\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 2n + 1 + \left\lfloor 2\sqrt{n(n+1)} \right\rfloor$$

Il s'agit donc de prouver que $N = 2n$ est la partie entière de $x = 2\sqrt{n(n+1)}$. On utilise la caractérisation de la partie entière

$$\textcircled{1} \quad N \in \mathbb{Z} \text{ vrai}$$

Il suffit donc de prouver que $N \leq x < N + 1$. Mais

$$\begin{aligned} N &\leq x \iff 2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} \iff_{\text{nombres} \geq 0} 4n^2 \leq 4n(n+1) \\ &\iff 0 \leq 4n(n+1) - 4n^2 = 4n \text{ vrai si } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

et

$$x < N + 1 \iff 2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n + 1 \iff_{\text{nombres} \geq 0} 4n(n+1) \leq (2n+1)^2 \iff 0 \leq 1$$

Ceci prouve bien que $N = \lfloor x \rfloor$.

Exercice de khôlle 387

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lfloor n \rfloor = \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}}}}$$

Solution : On pose $u_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}}}}$. Puisque $\sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}}} \geq 0$, on a $\sqrt{n^2} = n \leq u_n$. Reste à montrer que $u_n < n + 1$. Mais (les nombres sont positifs)

$$\begin{aligned} u_n &< n + 1 &\iff u_n^2 < (n + 1)^2 &\iff \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}}} < 2n + 1 \\ &\iff 4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}} < (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \\ &\iff \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}} < 4n + 1 &\iff 16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1} < 16n^2 + 8n + 1 \\ &\iff \sqrt{64n^2 + 1} < 8n + 1 &\iff 64n^2 + 1 < 64n^2 + 16n + 1 \text{ ce qui est vrai !} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 388

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor + \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 4x + 1 \rfloor$.

Solution : Soit

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor + \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 4x + 1 \rfloor \\
 &= \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + 1 + \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 4x \rfloor - 1 \\
 &= \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 4x \rfloor \\
 \text{car si } p &\in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p
 \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
 f\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \lfloor x + 1 \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} + 1 \right\rfloor - \lfloor 4x + 2 \rfloor \\
 &= \lfloor x \rfloor + 1 + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 - \lfloor 4x \rfloor - 2 = f(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi f est $\frac{1}{2}$ -périodique. Il suffit de prouver que $f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$. Or si $x \in [0, \frac{1}{4}[$, on a

$$\begin{aligned}
 \lfloor x \rfloor &= 0, x + \frac{1}{2} \in \left[0, \frac{3}{2}\right[\text{ d'où } \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \\
 2x + \frac{1}{2} &\in [0, 1[\text{ d'où } \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \text{ et } 4x \in [0, 1[\text{ d'où } \lfloor 4x \rfloor = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$x \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\implies f(x) = 0.$$

Puis si $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, alors

$$\begin{aligned}
 \lfloor x \rfloor &= 0, x + \frac{1}{2} \in \left[\frac{3}{4}, 1\right[\text{ d'où } \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \\
 2x + \frac{1}{2} &\in \left[1, \frac{3}{2}\right[\text{ d'où } \left\lfloor 2x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 \text{ et } 4x \in [1, 2[\text{ d'où } \lfloor 4x \rfloor = 1
 \end{aligned}$$

d'où $f(x) = 0$. Conclusion $f(x) = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$ et par périodicité sur $\mathbb{R}$.

Exercice de khôlle 389

On veut montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$.

1. Montrer que f est $\frac{1}{n}$ périodique.
2. En déduire le résultat demandé.

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned}
 f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{1}{n} + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k+1}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \text{ car si } p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p \\
 &= \sum_{j=1}^n \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor - 1 \text{ en posant } j = k + 1 \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor + \underbrace{\lfloor x + 1 \rfloor}_{\text{indice } j=n} - \lfloor nx \rfloor - 1 = \sum_{j=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor + \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\text{indice } j=0} - \lfloor nx \rfloor \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor = f(x)
 \end{aligned}$$

ainsi la fonction f est $\frac{1}{n}$ périodique, il suffit de prouver qu'elle est nulle sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Mais

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 \leq \frac{k}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 \leq nx < 1 \\ 0 \leq x + \frac{k}{n} < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = 0 \\ \lfloor nx \rfloor = 0 \end{array} \right\}$$

d'où

$$f(x) = 0 \text{ sur } \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

et par périodicité on a $f = 0$ sur $\mathbb{R}$. Ceci prouve le résultat demandé.

Exercice de khôlle 390

Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Solution : L'idée est de faire des paquets entre les carrés des entiers. Si on regarde les premiers entiers :

$$\underbrace{1, 2, 3}_{\text{entre } 1 \text{ et } 2^2-1}, \underbrace{4, 5, 6, 7, 8}_{\text{entre } 2^2 \text{ et } 3^2-1}, 9, 10, \dots, \underbrace{p^2, p^2+2, \dots, (p+1)^2-1}_{\text{entre } p^2 \text{ et } (p+1)^2-1}, \dots$$

En effet si on a $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$p^2 \leq k < (p+1)^2$$

par croissance de $\sqrt{\cdot}$, on en déduit que

$$\textcircled{1} \quad p \in \mathbb{Z} \text{ et } \textcircled{2} \quad p \leq k < (p+1)$$

d'où $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = p$ (caractérisation de $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$). On écrit donc que

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^3 \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \sum_{k=3}^8 \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \dots + \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \dots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor \quad (\text{piège!}) \\
 &= n + \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \right) = n + \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} p \right) = n + \sum_{p=1}^{n-1} p \left((p+1)^2 - 1 - p^2 + 1 \right) \\
 &= n + \sum_{p=1}^{n-1} p(2p+1) = n + 2 \sum_{p=1}^{n-1} p^2 + \sum_{p=1}^{n-1} p = n + 2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\
 &= n + \frac{n(n-1)}{6} \times (4n-2+3) = n + \frac{n(n-1)(4n+1)}{6} = \frac{n(4n^2-3n+5)}{6}
 \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 391

(★) On veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

1. Montrer que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

2. On pose $p = \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor$, montrer que

$$4n+2 \leq (p+1)^2$$

(on utilisera le fait que si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a < b \implies a+1 \leq b$)

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4n+2$ ne peut pas être un carré parfait.

4. Conclure.

Solution :

1. Par croissance de la partie entière, il suffit de montrer que $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+2}$. Puisque ce sont des nombres positifs, cela revient à montrer que

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} \leq 4n+2$$

soit

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+1$$

Et comme, on a encore des nombres positifs, cela revient à

$$4n(n+1) = 4n^2 + 4n \leq (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

ce qui, compte tenu de $0 \leq 1$ est vrai !

2. On sait que

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < p+1$$

soit (toujours des nombres positifs)

$$\begin{aligned} 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} &< (p+1)^2 \\ \text{donc au passage } 0 &\leq (p+1)^2 - (2n+1) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$4n(n+1) < \left((p+1)^2 - (2n+1) \right)^2$$

d'où

$$4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2 \leq \left((p+1)^2 - (2n+1) \right)^2$$

On passe à la racine carrée (qui est croissante) pour avoir

$$|2n+1| = 2n+1 \leq \left| (p+1)^2 - (2n+1) \right| = (p+1)^2 - (2n+1)$$

ce qui donne (miracle !)

$$4n+2 \leq (p+1)^2$$

3. Si on regarde les carrés modulo 4, on obtient

$$0^2 = 0 \pmod{4}, 1^2 = 1 \pmod{4}, 2^2 = 0 \pmod{4} \text{ et } 3^2 = (-1)^2 = 1 \pmod{4}$$

donc modulo 4, un carré n'est jamais égal à 2. Ainsi $4n+2$ n'est jamais un carré parfait.

4. Conclusion $4n + 2 \leq (p + 1)^2$ et $4n + 2 \neq (p + 1)^2$ donc

$$4n + 2 < (p + 1)^2$$

en passant à la racine carrée (croissante), on a

$$\sqrt{4n + 2} < p + 1 \text{ doù } \sqrt{4n + 2} + 1 \leq p + 1$$

d'où par croissance de $\lfloor \cdot \rfloor$ (ou car $\lfloor x \rfloor \leq x$)

$$\lfloor \sqrt{4n + 2} \rfloor \leq \lfloor p \rfloor = p = \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n + 1} \rfloor$$

Par double inégalité, on a égalité entre $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n + 1} \rfloor$ et $\lfloor \sqrt{4n + 2} \rfloor$.

Exercice de khôlle 392

On désire résoudre l'équation

$$(E) \quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor$$

1. Soit x une solution de (E) , justifier que

$$\frac{x}{2} < \sqrt{x} < \frac{x}{2} + 2$$

2. En déduire que $x \in]0, 4[$ puis conclure.

Solution :

1. On sait que si $y \in \mathbb{R}$ alors

$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$$

Si $N = \lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor$ alors

$$\sqrt{x} - 1 < N \leq \sqrt{x} \text{ et } \frac{x}{2} < N \leq \frac{x}{2} + 1$$

d'où

$$\sqrt{x} - 1 < \frac{x}{2} + 1 \text{ et } \frac{x}{2} < \sqrt{x}$$

d'où

$$\frac{x}{2} < \sqrt{x} < \frac{x}{2} + 2$$

2. Si x est une solution alors $x \geq 0$. Les nombres étant positifs, on a

$$0 \leq \sqrt{x} < \frac{x}{2} + 2 \iff x < \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 \iff 0 < \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - x$$

Ce qui est toujours vrai car $\left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - x = \frac{1}{4}x^2 + x + 4 = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 + 3 > 0$.

Pour l'autre inégalité, on a (nombres positifs)

$$\frac{x}{2} < \sqrt{x} \iff \frac{x^2}{4} < x \iff \frac{x^2}{4} - x = \frac{1}{4}x(x - 4) < 0 \iff x \in]0, 4[$$

On a alors :

Cas ① : $x \in [0, 1[$ d'où $\sqrt{x} \in [0, 1[$ et $\frac{x}{2} \in [0, 1[$ ainsi

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 0, \quad \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 = 1 \text{ pas solution}$$

Cas ② : $x \in [1, 2[$ d'où $\sqrt{x} \in [1, \sqrt{2}[\subset [1, 2[$ et $\frac{x}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et ainsi

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1, \quad \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 = 1 \text{ solution}$$

Cas ③ : $x \in [2, 4[$ d'où $\sqrt{x} \in [\sqrt{2}, 2[\subset]1, 2[$ et $\frac{x}{2} \in [1, 2[$ et ainsi

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1, \quad \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 = 2 \text{ pas solution}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [1, 2[$.

Exercice de khôlle 393

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
2. En déduire une simplification de $S_n(a) = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{a+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ où $a \in \mathbb{R}$.
3. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a)$?

Solution :

1. On pose $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = f(x) \end{aligned}$$

car $\forall y \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor p+y \rfloor = p + \lfloor y \rfloor$. Ainsi f est périodique de période 1. Si $x \in [0, 1[$ alors $\lfloor x \rfloor = 0$ et

$$\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } \frac{x+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\text{ d'où } \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 0$$

On en déduit que f est nulle sur une période donc nulle sur $\mathbb{R}$. Si on demande de le justifier, on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ donc } 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)) = f(x - \lfloor x \rfloor) \text{ par 1-périodicité} \\ &= 0 \text{ car } x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[\text{ et } f|_{[0,1[} = 0 \text{ (} f \text{ nulle sur } [0, 1[) \end{aligned}$$

2. On va chercher la somme télescopique en écrivant que $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ donc

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{a+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{a}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \sum_{k=0}^n \left(\left\lfloor \frac{a}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) = \lfloor a \rfloor - \left\lfloor \frac{a}{2^{n+1}} \right\rfloor$$

3. Pour finir, $\frac{a}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, mais la partie entière n'est pas continue en 0, on ne peut donc conclure. En fait cela dépend du signe de a !

Cas ① : Si $a > 0$ alors $\frac{a}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$ donc APCR (à partir d'un certain rang), on a $\frac{a}{2^{n+1}} \in [0, 1[$ et ainsi $\left\lfloor \frac{a}{2^{n+1}} \right\rfloor = 0$ et $S_n(a) = \lfloor a \rfloor$. La suite est stationnaire donc converge vers $\lfloor a \rfloor$.

Cas ② : Si $a < 0$ alors $\frac{a}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^-$ donc APCR (à partir d'un certain rang), on a $\frac{a}{2^{n+1}} \in]-1, 0[$ et ainsi $\left\lfloor \frac{a}{2^{n+1}} \right\rfloor = -1$ et $S_n(a) = \lfloor a \rfloor - 1$. La suite est stationnaire donc converge vers $\lfloor a \rfloor - 1$.

Exercice de khôlle 394

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(E) \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Indication : poser $a = x - \lfloor x \rfloor \dots$

Solution : On pose donc $a = x - \lfloor x \rfloor$ et $b = y - \lfloor y \rfloor$. Puisque $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ on a $0 \leq a < 1$ et de même $0 < b < 1$. Puis

$$(E) \iff \lfloor x \rfloor + \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + a + b \rfloor + \lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2 \lfloor x \rfloor + 2a \rfloor + \lfloor 2 \lfloor y \rfloor + 2b \rfloor$$

Avec $\lfloor u + p \rfloor = \lfloor u \rfloor + p$ si $u \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$ (et le fait que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, $2 \lfloor x \rfloor$ et $2 \lfloor y \rfloor$ sont dans $\mathbb{Z}$), on a

$$\begin{aligned} (E) &\iff \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor a + b \rfloor + \lfloor x \rfloor \leq 2 \lfloor x \rfloor + \lfloor 2a \rfloor + 2 \lfloor y \rfloor + \lfloor 2b \rfloor \\ &\iff \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor 2a \rfloor + \lfloor 2b \rfloor \end{aligned}$$

On a gagné en simplicité car $(a, b) \in [0, 1[$! Pour prouver la dernière inégalité, on fait un zoli tableau

$a \setminus b$	$b \in [0, \frac{1}{2}[$	$b \in [\frac{1}{2}, 1[$
$a \in [0, \frac{1}{2}[$	$a + b \in [0, 1[$ donc $\lfloor a + b \rfloor = 0$ $2a \in [0, 1[$ donc $\lfloor 2a \rfloor = 0$ $2b \in [0, 1[$ donc $\lfloor 2b \rfloor = 0$ et on a bien $0 \leq 0 + 1$	$a + b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ donc $\lfloor a + b \rfloor \leq 1$ $2a \in [0, 1[$ donc $\lfloor 2a \rfloor = 0$ $2b \in [1, 2[$ donc $\lfloor 2b \rfloor = 1$ et on a bien $\lfloor a + b \rfloor \leq 1 = 0 + 1$
$a \in [\frac{1}{2}, 1[$	$a + b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ donc $\lfloor a + b \rfloor \leq 1$ $2b \in [0, 1[$ donc $\lfloor 2b \rfloor = 0$ $2a \in [1, 2[$ donc $\lfloor 2a \rfloor = 1$ et on a bien $\lfloor a + b \rfloor \leq 1 = 0 + 1$	$a + b \in [1, 2[$ donc $\lfloor a + b \rfloor = 1$ $2a \in [1, 2[$ donc $\lfloor 2a \rfloor = 1$ $2b \in [1, 2[$ donc $\lfloor 2b \rfloor = 1$ et on a bien $1 \leq 1 + 1$

Exercice de khôlle 395

On se propose de déterminer les réels x tels que

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=0}^5 \lfloor 2^k x \rfloor = 20242024 \text{ et } \textcircled{2} \quad \sum_{k=0}^5 \left\lfloor 2^k x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 20242024$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $n \lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq n \lfloor x \rfloor + n - 1$.
2. Montrer que $\textcircled{1}$ n'a pas de solution (on donne $20242024 = 63 \times 321\,301 + 61$).
3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$, alors $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
4. Déterminer une solution de $\textcircled{2}$ (utiliser une calculatrice pour vérifier si on veut, mais est-ce utile?).

Solution :

1. On suit l'indication. Si $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ d'où } n \lfloor x \rfloor \leq nx < n \lfloor x \rfloor + n$$

On en déduit que $n \lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à nx donc inférieur à $\lfloor nx \rfloor$ (qui est le plus grand entier inférieur ou égal à x).

Puis $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ d'où

$$\lfloor nx \rfloor < n \lfloor x \rfloor + n$$

et comme il s'agit d'entiers, on a $\lfloor nx \rfloor \leq n \lfloor x \rfloor + n - 1$.

2. Si x est solution de $\textcircled{1}$ alors pour $k \in \llbracket 1 ; 4 \rrbracket$

$$2^k \lfloor x \rfloor \leq \lfloor 2^k x \rfloor \leq 2^k \lfloor x \rfloor + 2^k - 1$$

d'où en sommant les inégalités (avec $\sum_{k=0}^5 2^k = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 63$)

$$\sum_{k=0}^5 2^k \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor \sum_{k=0}^5 2^k = 63 \lfloor x \rfloor \leq \sum_{k=0}^5 \lfloor 2^k x \rfloor = 20242024 \leq 63 \lfloor x \rfloor + \sum_{k=0}^5 (2^k - 1) = 63 \lfloor x \rfloor + 57$$

On a donc

$$63 \lfloor x \rfloor \leq 63 \times 321\,301 + 61 \leq 63 \lfloor x \rfloor + 57$$

ce qui donne

$$\lfloor x \rfloor \leq 321\,301 + \frac{61}{63} \leq \lfloor x \rfloor + \frac{57}{63} < \lfloor x \rfloor + 1$$

d'où $\lfloor x \rfloor = 321\,301$ puis

$$321\,301 + \frac{61}{63} \leq \lfloor x \rfloor + \frac{57}{63} = 321\,301 + \frac{57}{63} \text{ donne } \frac{61}{63} \leq \frac{57}{63} \text{ absurde.}$$

3. On pose $f(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - \lfloor 2x \rfloor$ alors

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lfloor x+1 \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} + 1 \right\rfloor - \lfloor 2x+2 \rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + 1 + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 - \lfloor 2x \rfloor - 2 = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi f est 1-périodique. Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ alors $\lfloor x \rfloor = 0$, $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$ (car $x + \frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[$) et $\lfloor 2x \rfloor = 0$ (car $0 \leq 2x < 1$) donc $f(x) = 0$. Si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ alors $\lfloor x \rfloor = 0$, $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1$ (car $x + \frac{1}{2} \in [1, \frac{3}{2}[$) et $\lfloor 2x \rfloor = 1$ (car $1 \leq 2x < 2$) donc $f(x) = 0$. Ainsi f est nulle sur une période donc sur $\mathbb{R}$. Ceci prouve l'égalité demandée.

4. Analyse : On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^5 \left\lfloor 2^k x + \frac{1}{2} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^5 \lfloor 2 \times 2^k x \rfloor - \sum_{k=0}^5 \lfloor 2^k x \rfloor = \sum_{k=0}^5 (\lfloor 2^{k+1} x \rfloor - \lfloor 2^k x \rfloor) \stackrel{\text{pirate}}{=} \lfloor 2^6 x \rfloor - \lfloor 2^0 x \rfloor \\ &= \lfloor 64x \rfloor - \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \lfloor 64x \rfloor &\leq 64x < \lfloor 64x \rfloor + 1 \\ \text{et } -\lfloor x \rfloor - 1 &< -x \leq -\lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lfloor 64x \rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = 20242023 < 63x < \lfloor 64x \rfloor - \lfloor x \rfloor + 1 = 20242025$$

d'où

$$\frac{20242023}{63} = 321\,301 + \frac{60}{63} < x < \frac{20242025}{63} = 321\,301 + \frac{62}{63}$$

Synthèse : On tente $x = 321\,301 + \frac{61}{63}$ alors

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= 321\,301 \text{ car } \frac{61}{63} \in]0, 1[\\ 64x &= 64 \times \left(321\,301 + \frac{61}{63} \right) = 64 \times 321\,301 + 64 \times \frac{61}{63} \\ &= (63 + 1) \times 321\,301 + (63 + 1) \times \frac{61}{63} \\ &= 20242024 - 61 + 321\,301 + 61 + \frac{61}{63} \\ &= 20242024 + 321\,301 + \frac{61}{63} \\ \text{d'où } \lfloor 64x \rfloor &= 20242024 + 321\,301 \end{aligned}$$

et

$$\lfloor 64x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 20242024$$

Remarque : Plus généralement si on prend $x = 321\,301 + t$ où $t \in \left] \frac{60}{63}, \frac{62}{63} \right[$ alors $\lfloor x \rfloor = 321\,301$ et

$$\begin{aligned} 64x &= 64 \times (321\,301 + t) = 64 \times 321\,301 + 64t \\ &= (63 + 1) \times 321\,301 + 64t = 20242024 - 61 + 321\,301 + 64t \\ &= 20242024 + 321\,301 + 64t - 61 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{60}{63} &< t < \frac{62}{63} \text{ donne} \\ -\frac{1}{21} &< 64 \times \frac{60}{63} - 61 < 64t - 61 < 64 \times \frac{62}{63} - 61 = 1 + \frac{1}{63} \\ \text{donc } \lfloor 64t - 61 \rfloor &\in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Bref; $\lfloor 64x \rfloor = 20242024 + 321\,301 + \lfloor 64t - 61 \rfloor$ n'est pas toujours égal à $20242024 + 321\,301$! Et x n'est pas solution de ②. Il faut ajuster en prenant

$$t \in \left[\frac{60}{63} + \alpha, \frac{62}{63} - \beta \right[$$

afin d'avoir

$$0 = 64 \times \left(\frac{60}{63} + \alpha \right) - 61 \leq 64t - 61 < 64 \times \left(\frac{62}{63} - \beta \right) - 61 = 1$$

Avec $64 \times \left(\frac{60}{63} + \alpha\right) - 61 = 0$, on a $\alpha = \frac{1}{1344}$ et avec $64 \times \left(\frac{62}{63} - \beta\right) - 61 = 1$ on obtient $\beta = \frac{31}{2016}$. Conclusion, si

$$x = 321\,301 + t \text{ où } t \in \left[\frac{60}{63} + \frac{1}{1344}, \frac{62}{63} - \frac{31}{2016}\right] = \left[\frac{61}{64}, \frac{62}{64}\right[$$

alors x est solution de ②.

Exercice de khôlle 396

Soit $x \geq 0$, on note u_n (resp. v_n) le nombre d'entiers pairs (resp. impairs) de $[0, x]$.

1. Justifier que $u_n = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$.
2. Donner une formule analogue pour v_n .
3. En déduire que si $x \geq 0$ alors $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$.
4. La formule établie est-elle encore vraie si $x < 0$?

Solution :

1. Il s'agit de déterminer le nombre d'entiers naturels p tels que $0 \leq 2p \leq x$ ce qui équivaut à $0 \leq p \leq \frac{x}{2}$. Puisque $p \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{x}{2}$.

$$p \leq \frac{x}{2} \iff p \leq \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

Ainsi u_n est le nombre d'entiers de l'intervalle (entier) $\llbracket 0 ; \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \rrbracket$, i.e vaut $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$.

2. De la même manière il s'agit de déterminer le nombre d'entiers naturels p tels que

$$0 \leq 2p + 1 \leq x \text{ soit } -\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{x-1}{2}$$

Puisque p est entier, on a

$$-\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{x-1}{2} \iff p \in \llbracket 0 ; \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \rrbracket$$

d'où $v_n = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor + 1$.

3. Le nombre d'entiers de $[0, x]$ vaut $\lfloor x \rfloor + 1$ (car $0 \leq p \leq x \iff 0 \leq p \leq \lfloor x \rfloor \iff p \in \llbracket 0 ; \lfloor x \rfloor \rrbracket$) et il vaut aussi (par tiers exclus) $u_n + v_n$. On a donc

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$$

Puisque $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{x-1}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$, on a bien

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor.$$

4. Le plus simple est de montrer que $f(x) = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ est périodique de période 1. En effet

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lfloor x+1 \rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{2} + 1 \right\rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + 1 - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 1 = f(x) \end{aligned}$$

Puisque $f = 0$ sur $[0, +\infty[$ elle est nulle sur une période (sur $[0, 1[$) donc partout !

Remarque : On peut aussi écrire que si $x \leq 0$ alors $f(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$ par périodicité. Mais $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$ d'où $f(x - \lfloor x \rfloor) = 0$.

Exercice de khôlle 397

On se propose de montrer que

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier $g(n) = \left\lfloor \frac{(n+3)^2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{N}$ par $f(n) = \left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$. Montrer que f est périodique et en déduire $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer le résultat énoncé.

Solution :

1. On a $(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$ d'où $\left\lfloor \frac{(n+3)^2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{3} + 2n + 3 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor + 2n + 3$ car $2n + 3 \in \mathbb{Z}$. Ainsi $g(n) = 2n + 3$.

2. On a

$$\begin{aligned} f(n+3) - f(n) &= \left\lfloor \frac{2(n+3+1)}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n+3+1)^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n+3)^2}{3} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor \right) \\ &= \left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} + 2 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor - g(n+1) + g(n) \\ &= \left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor + 2 - \left\lfloor \frac{2(n+1)}{3} \right\rfloor - (2(n+1) + 3) + 2n + 3 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est 3-périodique. Puisque $f(0) = \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{0}{3} \right\rfloor = 0$, $f(1) = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = 0$, $f(2) = \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 0$, on a $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Par récurrence sur n , on montre $\mathcal{P}(n) = \left\langle \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor = 0 \right\rangle$. C'est vrai si $n = 0$ car

$$\sum_{k=0}^0 \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor = 0 = \left\lfloor \frac{0^2}{3} \right\rfloor$$

Puis si c'est vrai au rang n , alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor + f(n) = 0$$

et c'est fini !

Exercice de khôlle 398

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b^2} \right\rfloor$$

(on posera, pour $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor$).

Solution : Pour $x \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f(x + b^2) &= \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x + b^2}{b} \right\rfloor \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x + b^2}{b^2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{b} + b \right\rfloor \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{b^2} + 1 \right\rfloor \end{aligned}$$

On sait que si $u \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors $\lfloor u + k \rfloor = \lfloor u \rfloor + k$ donc

$$\begin{aligned} f(x + b^2) &= \left\lfloor \frac{1}{b} \left(\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor + b \right) \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor + 1 \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= \left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor \right\rfloor + 1 - \left(\left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor + 1 \right) = f(x) \end{aligned}$$

Ainsi f est b^2 périodique. Pour $x \in [0, b^2[$, puisque

$$0 \leq x < b^2 \implies 0 \leq \frac{x}{b^2} < 1$$

on a $\left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor = 0$. De même,

$$0 \leq x < b^2 \implies 0 \leq \frac{x}{b} < b$$

d'où $0 \leq \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor \leq \frac{x}{b} < b$ puis $0 \leq \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor < 1$, ainsi $\left\lfloor \frac{1}{b} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor \right\rfloor = 0$. On en déduit que f est nulle sur $[0, b^2[$. Par périodicité, f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On peut détailler la fin, en effet si $x \in \mathbb{R}$ alors $\left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor \leq \frac{x}{b^2} < \left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor + 1$ donc

$$0 \leq \frac{x}{b^2} - \left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor < 1$$

Mais alors $0 \leq b^2 \left(\frac{x}{b^2} - \left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor \right) = x - b^2 \left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor < b^2$. On en déduit que $f\left(x - b^2 \left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor\right) = 0$ et par périodicité

$$f(x) = f\left(x - b^2 \left\lfloor \frac{x}{b^2} \right\rfloor\right) = 0$$

12.4 Suites classiques

Exercice de khôlle 399

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$u_0 = -1, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n + 3$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$. Déterminer v_n en fonction de n puis u_n . Comment doit-on choisir u_1 pour que $\frac{u_n}{n}$ ait une limite finie ?

Solution : On a $v_n = u_n - n$, ainsi $u_n = v_n + n$ d'où $u_{n+2} = v_{n+2} + n + 2$ et $v_{n+1} = u_{n+1} + n + 1$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= v_{n+2} + n + 2 = -(v_{n+1} + n + 1) + 2(v_n + n) + 3 \\ &= -v_{n+1} + 2v_n + n + 2 \end{aligned}$$

soit

$$v_{n+2} = -v_{n+1} + 2v_n$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$ qui admet comme solution 1 et -2 . Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \lambda + \mu \times (-2)^n \text{ et ainsi } u_n = v_n + n = \lambda + \mu \times (-2)^n + n$$

On désire que $\frac{u_n}{n}$ ait une limite finie. Puisque

$$\frac{u_n}{n} = 1 + \frac{\lambda}{n} + (-1)^n \mu \times \frac{2^n}{n}$$

on a

$$\mu = (-1)^n \frac{n}{2^n} \times \left(\frac{u_n}{n} - 1 - \frac{\lambda}{n} \right)$$

Si $\frac{u_n}{n}$, puisque $\frac{n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$(-1)^n \frac{n}{2^n} \times \left(\frac{u_n}{n} - 1 - \frac{\lambda}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où une condition nécessaire est $\mu = 0$. Dans ce cas,

$$u_n = n + \lambda$$

Il reste à calculer λ en fonction des conditions initiales. Puisque $u_0 = -1 = \lambda$ et que $u_1 = \lambda + 1$. On doit choisir

$$u_1 = 0$$

Exercice de khôlle 400

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique, i.e. telle qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 1$, pour lesquels $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également linéaire récurrente d'ordre 2. En déduire u_n en fonction de n .
2. Comparer avec la méthode du cours.

Solution :

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ et } u_{n+2} = au_{n+1} + b$$

par différence, il vient

$$u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} - au_n \text{ d'où } u_{n+1} - (a+1)u_n + au_n = 0$$

L'équation caractéristique $r^2 - (a+1)r + a = 0$ admet comme racines évidentes a et 1. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda a^n + \mu$$

Avec les valeurs initiales, on a

$$u_0 = \lambda + \mu \text{ et } u_1 = au_0 + b = \lambda a + \mu = \lambda a + u_0 - \lambda = \lambda(a-1) + u_0$$

d'où

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ au_0 + b = \lambda(a-1) + u_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \frac{b}{1-a} \\ \lambda = u_0 + \frac{b}{a-1} \end{cases}$$

d'où

$$u_n = u_0 a^n + \frac{b}{a-1} (a^n - 1)$$

2. La méthode usuelle est d'introduire ℓ tel que $\ell = a\ell + b$ soit $\ell = \frac{b}{1-a}$, puis on écrit que

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ et } \ell = a\ell + b$$

par différence, il vient $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$, la suite $(u_n - \ell)_n$ est géométrique de raison a . Ainsi

$$u_n - \ell = a^n (u_0 - \ell) \implies u_n = u_0 a^n + \ell(1 - a^n) = u_0 a^n + \frac{b}{a-1} (a^n - 1)$$

On retrouve bien le même résultat.

Exercice de khôlle 401

Soit a un réel, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2a u_{n+1} - u_n + (2 - 2a)$$

- Pour $a \neq 1$, chercher une suite constante solution. En posant $v_n = u_n - c$ où c est une constante judicieusement choisie, trouver u_n en fonction de n lorsque $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et dans les deux cas $a = 0$ et $a = \frac{5}{4}$.
- Si $a = 1$, déterminer u_n lorsque $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

Solution :

- Soit $u_n = c$ une suite constante solution, alors $c = 2ac - c + a$ d'où $c(2 - 2a) = (2 - 2a)$, si $a \neq 1$, on obtient $c = 1$.

On pose alors $v_n = u_n - 1$, d'où si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation donnée,

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+2} - 1 = 2a u_{n+1} - u_n + (2 - 2a) - 1 \\ &= 2a(u_{n+1} - 1) - (u_n - 1) \\ &= 2a v_{n+1} - v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie donc

$$v_0 = 0, v_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2a v_{n+1} - v_n$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 2ar + 1$.

Pour $a = 0$, on obtient deux racines i et $-i$ et ainsi il existe C_1 et C_2 tels que

$$v_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

Avec $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$, on a $C_1 = 0$ et $C_2 = 1$ d'où

$$v_n = \sin \frac{n\pi}{2} + 1$$

Pour $a = \frac{5}{4}$, on obtient deux racines 2 et $\frac{1}{2}$, il existe C_1 et C_2 tels que

$$v_n = C_1 2^n + \frac{C_2}{2^n}$$

Avec $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$, il vient $C_1 + C_2 = 0$ et $2C_1 + \frac{C_2}{2} = 1$ d'où

$$u_n = \frac{2}{3} \left(2^n - \frac{1}{2^n} \right) + 1 = \frac{2}{3} \left(\frac{4^n - 1}{2^n} \right) + 1$$

2. Si $a = 1$, la relation qui définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'écrit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2 u_{n+1} - u_n$$

L'équation caractéristique a une racine double $r = 1$, il existe donc C_1 et C_2 réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (C_1 n + C_2)$$

avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, on a $C_2 = 1$ et $C_1 = 1$ d'où $u_n = n + 1$.

Remarque : En fait, on a $\frac{u_{n+2} + u_n}{2} = u_{n+1}$, la suite est donc arithmétique de raison $u_1 - u_0 = 1$ de premier terme $u_0 = 1$ donc $u_n = n \times 1 + 1 = n + 1$.

Exercice de khôlle 402

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{\sqrt{3}u_n + v_n}{4}$$

On se propose de déterminer u_n et v_n en fonction de n .

- Méthode ① : Montrer que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $z_n = u_n + iv_n$ est géométrique et en déduire u_n et v_n en fonction de n .
- Méthode ② : Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et retrouver ainsi l'expression de u_n en fonction de n .

Solution :

1. On a

$$z_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}v_n}{4} + i \frac{\sqrt{3}u_n + v_n}{4}$$

et on aimerait avoir, si $k = a + ib$ est le rapport de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (a + ib) \times z_n = (a + ib) \times (u_n + iv_n) \\ &= au_n - bv_n + i(bu_n + av_n) \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{4}$ d'où $k = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi

$$\begin{aligned} z_n &= k^n z_0 = \frac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{2^n} (1 + 2i) = \frac{1}{2^n} (1 + 2i) \left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right) + \frac{i}{2^n} \left(2 \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

Puisque $u_n = \operatorname{Re}(z_n)$ et $v_n = \operatorname{Im}(z_n)$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n} \left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right) \text{ et } v_n = \frac{1}{2^n} \left(2 \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

2. On découple en écrivant que

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}v_{n+1}}{4} = \frac{1}{4} \left(u_{n+1} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}u_n + v_n}{4} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(u_{n+1} - \frac{3u_n}{4} - \frac{\sqrt{3}v_n}{4} \right) \end{aligned}$$

mais de $u_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}v_n}{4}$, on déduit que $\sqrt{3}v_n = u_n - 4u_{n+1}$ d'où

$$u_{n+2} = \frac{1}{4} \left(u_{n+1} - \frac{3u_n}{4} - \frac{u_n - 4u_{n+1}}{4} \right) = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

L'équation caractéristique est $r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} = 0$ dont les racines sont $r_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}$ et $r_2 = \overline{r_1}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2^n} \left(\lambda \cos \left(n \frac{\pi}{3} \right) + \mu \sin \left(n \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

On obtient λ et μ par résolution de

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \lambda \\ u_1 = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \left(\lambda \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + \mu \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{1 - \mu\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

On a bien le même résultat !

Exercice de khôlle 403

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n(an + b)$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique et calculer u_n en fonction de n .

Solution : On a donc pour $n \geq 1$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)(a(n+1) + b)$$

mais

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) + u_n = n(an + b) + u_n$$

d'où

$$u_n = (n+1)(a(n+1) + b) - n(an + b) = 2an + (a + b)$$

Mais **attention**, $n \geq 1$ ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n = 2an + (a + b)$$

On en déduit que pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = 2a$. La suite est bien arithmétique à partir du rang 1. Mais avec $n = 1$, on a $u_0 = a + b$. Or on a montré que $u_1 = 2a \times 1 + a + b = 3a + b$, donc $u_1 = u_0 + 2a$. Elle est bien arithmétique de premier terme nul et de raison $2a$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2an + (a + b)$$

Exercice de khôlle 404

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = 1, v_1 = \frac{1}{2} \text{ et } v_{n+2} = \sqrt{v_n \times v_{n+1}}$$

Justifier que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer v_n en fonction de n .

Solution : Par récurrence double on montre $\mathcal{P}(n) = \ll v_n \text{ existe et } v_n > 0 \gg$.

C'est vrai au rang 0 et 1 et si c'est vrai au rangs n et $n+1$, alors $v_n \times v_{n+1} > 0$ donc v_{n+2} existe et $v_{n+2} > 0$ (en tant que racine carrée d'un nombre strictement positif).

On peut alors passer au $\ln$ pour avoir

$$\ln v_{n+2} = \frac{1}{2} (\ln v_{n+1} + \ln v_n)$$

On pose $u_n = \ln v_n$, ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique est $r^2 = \frac{1}{2}(r+1)$ soit $2r^2 - r - 1 = (2r+1)(r-1) = 0$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \frac{\mu}{2^n}$$

Avec $u_0 = 0$ et $u_1 = -\ln 2$ on a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \frac{\mu}{2} = -\ln 2 \end{cases}$$

dont la solution est $\lambda = -2 \ln 2, \mu = 2 \ln 2$.

Conclusion

$$u_n = 2 \ln(2) \times \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right) = \frac{\ln 2}{2^{n-1}} - \ln 4 = \ln \left(2^{\frac{1}{2^{n-1}}} \right) - \ln 4$$

et

$$v_n = \exp(u_n) = \frac{1}{4} 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Exercice de khôlle 405

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$u_0 = -1, v_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. Déterminer u_n en fonction de n . Montrer que u_n peut s'écrire $\frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{\sqrt{13}}$ où r_1 et r_2 sont deux réels dont on précisera les valeurs.
3. Donner un équivalent de u_n .
4. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+2z_n}{z_n-1}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \frac{u_n}{v_n}$.
5. En déduire la limite de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. On a

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n - v_n = 2u_{n+1} + u_n - (u_{n+1} - 2u_n) = u_{n+1} + 3u_n$$

2. L'équation caractéristique est $r^2 = r + 3$ dont les racines sont $r_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Avec $n = 0$ on a $u_0 = -1 = \lambda + \mu$. Puis $u_1 = 2u_0 + v_0 = -2 + 1 = -1$ d'où $\lambda r_1 + \mu r_2 = -1$. On résout donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = -1 \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda = \frac{1 - r_2}{r_2 - r_1}$ et $\mu = \frac{r_1 - 1}{r_2 - r_1}$ soit (avec $r_1 + r_2 = 1$ donc $1 - r_2 = r_1$ et $r_1 - 1 = -r_2$, et $r_2 - r_1 = \sqrt{13}$)

$$u_n = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{\sqrt{13}}$$

3. On a $r_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} > |r_1| = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$ donc $\left| \frac{r_1}{r_2} \right| < 1$ et ainsi $\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Mais alors $r_1^n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(r_2^n)$ d'où

$$u_n \sim -\frac{r_2^{n+1}}{\sqrt{13}}$$

4. Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) \equiv \ll z_n = \frac{u_n}{v_n} \gg$. C'est vrai si $n = 0$ puis si $z_n = \frac{u_n}{v_n}$ alors

$$z_{n+1} = \frac{1 + 2z_n}{z_n - 1} = \frac{1 + 2\frac{u_n}{v_n}}{\frac{u_n}{v_n} - 1} = \frac{2u_n + v_n}{u_n - v_n} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \text{ d'où } \mathcal{P}(n+1)$$

ce qui conclut la récurrence.

5. On a $z_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n}{u_{n+1} - 2u_n} = \frac{1}{\frac{u_{n+1}}{u_n} - 2}$. Puisque

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{-\frac{r_2^{n+2}}{\sqrt{13}}}{-\frac{r_2^{n+1}}{\sqrt{13}}} = r_2, \text{ on a } \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r_2 \text{ et ainsi } z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{r_2 - 2}$$

On peut simplifier la limite $\frac{1}{r_2 - 2} = \frac{2}{\sqrt{13} - 3} = 2 \times \frac{\sqrt{13} + 3}{13 - 9} = \frac{\sqrt{13} + 3}{2} = r_2 + 1$.

Exercice de khôlle 406

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{2^n}$. On se propose de déterminer u_n en fonction de n par deux méthodes.

1. Méthode ① : Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 puis conclure.
2. Méthode ② : Soit $c \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison c .

- (a) Déterminer c et v_0 pour que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n + \frac{3}{2^n}$.
- (b) Montrer que $w_n = u_n - v_n$ est géométrique et conclure.

Solution :

1. On a, d'après la définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= \frac{1}{5}u_{n+1} + \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}u_n + \frac{3}{2^n} \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2^n} \right) \\
 &= \frac{1}{25}u_n + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{3}{2^n} \right) \\
 &= \frac{1}{25}u_n + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{3}{2^n} \right) \\
 &= \frac{1}{25}u_n + \frac{7}{10} \times \left(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \right) \text{ car } u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{2^n} \\
 &= \frac{7}{10}u_{n+1} + \left(\frac{1}{25} - \frac{7}{50} \right)u_n = \frac{7}{10}u_{n+1} - \frac{1}{10}u_n
 \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique est $r^2 - \frac{7}{10}r + \frac{1}{10}$ dont les racines sont $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$ (petit poisson rouge se souvient-il que $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$?). Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\lambda}{2^n} + \frac{\mu}{5^n}$$

Avec $u_0 = 2$ on a $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + \frac{3}{2^0} = \frac{2}{5} + 3 = \frac{17}{5}$ d'où

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 = u_0 \\ \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{5} = \frac{17}{5} = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \frac{5\lambda}{2} + \mu = 17 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \frac{5\lambda}{2} - \lambda = 15 \end{cases}$$

dont la solution est $\lambda = 10$ et $\mu = -8$. Conclusion

$$u_n = \frac{10}{2^n} - \frac{8}{5^n}$$

2.

(a) On a $v_n = v_0 \times c^n$, ainsi

$$v_{n+1} - \frac{1}{5}v_n - \frac{3}{2^n} = v_0c^{n+1} - \frac{1}{5}v_0c^n - \frac{3}{2^n} = v_0c^n \left(c - \frac{1}{5} \right) - \frac{3}{2^n}$$

Si on choisit $c = \frac{1}{2}$ et $v_0 \left(c - \frac{1}{5} \right) = 3$, i.e. $c = \frac{1}{2}$ et $v_0 = 10$ alors $v_{n+1} - \frac{1}{5}v_n - \frac{3}{2^n} = 0$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \left(\frac{1}{5}u_n + \frac{3}{2^n} \right) - \left(\frac{1}{5}v_n + \frac{3}{2^n} \right) = \frac{1}{5}(u_n - v_n)$$

ainsi $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = -8$. On conclut car

$$w_n = -\frac{8}{5^n} = u_n - v_n = u_n - \frac{10}{2^n} \text{ d'où } u_n = \frac{10}{2^n} - \frac{8}{5^n}$$

Exercice de khôlle 407

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq 2$, on définit le polynôme P par

$$P(x) = a_p + \binom{n}{1} a_{p+1} x + \binom{n}{2} a_{p+2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} a_{p+n} x^n$$

1. Montrer que

$$P(x) = (a_p + x a_{p+n}) (1+x)^{n-1}$$

2. En déduire, uniquement en fonction de a_0 , les valeurs de

$$\begin{aligned} S_1 &= a_p - \binom{n}{1} a_{p+1} + \binom{n}{2} a_{p+2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} a_{p+n} \\ S_2 &= a_n - \binom{n}{1} \frac{a_{n+1}}{2} + \binom{n}{2} \frac{a_{n+2}}{4} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{a_{2n}}{2^n} \end{aligned}$$

Solution :

1. Soit a_0 le premier terme et r la raison, on a $a_{p+k} = a_p + kr$. Il s'agit de calculer

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{p+k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_p + kr) x^k \\ &= a_p \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + r \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k \\ &= a_p (1+x)^n + r \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k \end{aligned}$$

Reste à calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k$.

Méthode ① : La formule du capitaine donne $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ si $k \geq 1$ (et $n \geq 2$) donc (l'indice $k=0$ dans la somme étant loin d'être indispensable)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k \\ &= n \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i+1} = nx \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i = nx (1+x)^{n-1} \end{aligned}$$

Méthode ② : On sait que pour $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Si on dérive les deux membres par rapport à x (on peut car il s'agit de polynômes), on obtient

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} \text{ et } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k = nx(1+x)^{n-1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(x) &= a_p (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} \\ &= (a_p (1+x) + nx) (1+x)^{n-1} \\ &= (a_p + x(a_p + nr)) (1+x)^{n-1} \\ &= (a_p + x a_{p+n}) (1+x)^{n-1} \end{aligned}$$

2. Pour S_1 on fait $x = -1$ ainsi

$$S_1 = 0$$

Pour S_2 , on fait $p = n$ et $x = -\frac{1}{2}$ ainsi, $S_2 = \left(a_n - \frac{1}{2}a_{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Mais $a_{2n} = a_{n+n} = a_n + nr$ d'où $a_n - \frac{1}{2}a_{2n} = \frac{a_n}{2} - \frac{nr}{2} = \frac{a_0}{2}$. On en conclut que

$$S_2 = \frac{a_0}{2^n}$$

Remarque : Avec $x = 1$ dans $P(x)$ et compte tenu de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, on obtient

$$\frac{\binom{n}{0}a_p + \binom{n}{1}a_{p+1} + \binom{n}{2}a_{p+2} + \cdots + \binom{n}{n}a_{p+n}}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}} = \frac{a_p + a_{p+n}}{2}$$

Un autre exercice serait de montrer que cela caractérise les suites arithmétiques

Exercice de khôlle 408

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{16} (1 + 4u_n + \sqrt{1 + 24u_n})$$

1. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On pose $v_n = \sqrt{1 + 24u_n}$, montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Solution :

1. Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \ll u_n \text{ existe et } u_n \geq 0 \gg$. C'est vrai si $n = 0$ puis si u_n existe et $u_n \geq 0$ alors $1 + 24u_n \geq 0$ et u_{n+1} est alors défini et est positif.
2. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{16} (1 + 4u_n + v_n)$$

d'où

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 &= 1 + 24u_{n+1} = 1 + \frac{24}{16} (1 + 4u_n + v_n) \\ &= \frac{5}{2} + 6u_n + \frac{3}{2}v_n \end{aligned}$$

Puis $v_n^2 = 1 + 24u_n$ donc $6u_n = \frac{v_n^2 - 1}{4}$ d'où

$$v_{n+1}^2 = 1 + 24u_{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{v_n^2 - 1}{4} + \frac{3}{2}v_n = \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{2}v_n + \frac{9}{4}$$

Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $v_{n+1} = av_n + b$ donc

$$v_{n+1}^2 = a^2v_n^2 + 2abv_n + b^2$$

Il suffit de choisir $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$ pour avoir

$$v_{n+1}^2 = \left(\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}\right)^2$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \geq 0$, on en déduit que

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}$$

3. On a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2} \\ \ell &= \frac{1}{2}\ell + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

par différence $w_n = v_n - \ell$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ d'où $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n w_0$. Avec

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{1+24} = 5, \ell = 3, w_0 = 5 - 3 = 2 \\ v_n &= 3 + \frac{1}{2^n} \times 2 = 3 + \frac{1}{2^{n-1}} \\ v_n^2 - 1 &= (v_n - 1)(v_n + 1) = \left(2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \left(4 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{v_n^2 - 1}{24} = \frac{1}{3 \times 8} \left(2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \left(4 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{8}{3 \times 8} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 409

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, pour $n \geq 2$ on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix}_n$$

1. Donner, pour $n \geq 2$, une relation entre D_{n+2} , D_{n+1} et D_n (attention ce n'est pas tout à fait comme l'exercice type...).
2. Quelles valeurs peut-on donner à D_0 et D_1 pour que la récurrence commence à $n = 0$?
3. En déduire D_n en fonction de n .

Solution :

1. On développe par rapport à la dernière colonne puis le second déterminant par rapport à la dernière ligne pour

avoir :

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \cos \alpha & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 2 \cos \alpha & \ominus 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \oplus 2 \cos \alpha \end{vmatrix}_{n+2} \\
 &= 2 \cos(\alpha) D_{n+1} - \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & \ddots & & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \cos \alpha & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \oplus 1 \end{vmatrix}_{n+1} \\
 &= 2 \cos(\alpha) D_{n+1} - D_n
 \end{aligned}$$

2. On a facilement

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = \cos(2\alpha) \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & \ominus 1 \\ 0 & 1 & \oplus 2 \cos \alpha \end{vmatrix} = 2 \cos(\alpha) D_2 - \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cos(\alpha) \cos(2\alpha) - \cos(\alpha)
 \end{aligned}$$

Avec $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, on obtient

$$D_3 = \cos(3\alpha)$$

Si vous n'avez pas envie d'avoir $\cos(n\alpha)$, eh bien, c'est inquiétant ! On pose donc $D_0 = 1$, $D_1 = \cos(\alpha)$ ainsi

$$\begin{aligned}
 D_2 &= 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 2 \cos(\alpha) D_1 - D_0 \\
 D_3 &= 2 \cos(\alpha) \cos(2\alpha) - \cos(\alpha) = 2 \cos(\alpha) D_2 - D_1
 \end{aligned}$$

Remarque : Mézamor, c'est Tchebychev qui est caché dans tout cela !

3. Méthode ① : Par récurrence **double**, on montre que

$$D_n = \cos(n\alpha)$$

C'est vrai aux rangs 0 et 1, puis si c'est vrai au rang n et $n+1$, on a

$$D_{n+2} = 2 \cos(\alpha) \cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) = \cos((n+2)\alpha)$$

en utilisant $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

Méthode ② : L'équation caractéristique est $r^2 - 2 \cos(\alpha)r + 1$ dont les racines sont $r_1 = e^{i\alpha}$ et $r_2 = \overline{r_1}$ (car $\Delta = 4 \cos^2(\alpha) - 1 = -4 \sin^2(\alpha) = (2i \sin \alpha)^2$ ou bien on utilise la factorisation $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2 \operatorname{Re}(z)X + |z|^2$).

Si $\alpha \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, les deux racines sont distinctes. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = 1^n \times (\lambda \cos(n\alpha) + \mu \sin(n\alpha))$$

Avec $D_0 = 1$, on a $\lambda = 1$ et avec $D_1 = \cos(\alpha)$, on obtient $\mu = 0$.

Si $\alpha = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a une racine double qui est $r = e^{i\alpha} = \cos(\alpha)$ (elle vaut 1 si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ et -1 si $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$).

(2π)). Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $D_n = (\lambda n + \mu) r^n$. Avec $n = 0$, on a $\mu = 1$ et avec $n = 1$, on obtient $\lambda = 0$. Conclusion

$$D_n = r^n = e^{in\alpha}$$

Mais r étant réel, il en est de même de r^n donc $r^n = \operatorname{Re}(r^n) = \cos(n\alpha)$. Ce qui prouve que la relation $D_n = \cos(n\alpha)$ est vraie, ceci quelque soit la valeur de α !

12.5 Un peu de tout

Exercice de khôlle 410

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad u_1 = a \\ u_{n+2} &= au_{n+1} + (1-a)u_n \end{aligned}$$

- Exprimer u_n en fonction de n (et de a bien sur!).
- Si $a > 1$, $a \neq 2$, on pose $a = 1 + e^{2t}$, montrer qu'alors $u_n = 2 \frac{\operatorname{sh} nt}{\operatorname{th} t} e^{nt}$.

Solution :

- C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $r^2 - ar + (a-1) = 0$ dont les racines évidentes sont 1 et $a-1$. On a donc deux cas :

Cas ① : $a \neq 2$, les deux racines sont distinctes. On sait qu'il existe λ et μ réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \times 1^n + \mu \times (a-1)^n$. Or $u_0 = 0$ d'où $\lambda + \mu = 0$ et $u_1 = a$ d'où $\lambda + (a-1)\mu = a$. On a donc le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + (a-1)\mu = a \end{cases}$$

dont la solution est (immédiate) $\mu = \frac{a}{a-2} = -\lambda$. Ainsi

$$u_n = \frac{a}{a-2} ((a-1)^n - 1) = \frac{a}{a-2} ((a-2+1)^n - 1)$$

Cas ② : $a = 2$.

Il existe λ et μ tels que $u_n = (\lambda + \mu n) \times 1^n = \lambda + \mu n$. Avec $u_0 = 0 = \lambda$ et $u_1 = \lambda + \mu = 2$, on a

$$u_n = 2n$$

- Avec $a = 1 + e^{2t}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{a}{a-2} ((a-1)^n - 1) &= \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} (e^{2nt} - 1) \\ &= \frac{e^t (e^t + e^{-t})}{e^t (e^t - e^{-t})} e^{nt} \times (e^{nt} - e^{-nt}) \\ &= \frac{2 \operatorname{ch} t}{2 \operatorname{sh} t} e^{nt} \times 2 \operatorname{sh} nt \\ &= 2 \frac{\operatorname{sh} nt}{\operatorname{th} t} e^{nt} \end{aligned}$$

On peut remarquer que si t tend vers 0, on a $\frac{\operatorname{sh} nt}{\operatorname{th} t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{nt}{t} = n$ d'où $2 \frac{\operatorname{sh} nt}{\operatorname{th} t} e^{nt} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 2n$ qui est la valeur de u_n dans le cas où $a = 2$.

Exercice de khôlle 411

On définit la suite de Fibonacci par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer f_n en fonction de n .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que pour $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

3. Montrer l'identité de Cassini

$$\forall n \geq 1, f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

4. Montrer que pour $n \geq 2$, on a

$$f_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

où le déterminant est de taille $n-1$.

Solution :

1. L'équation caractéristique est $r^2 = r + 1$ dont les solutions sont $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$ car le produit des racines vaut -1 . Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Avec $n = 0$ et $n = 1$ il vient

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases} \quad \text{d'où } \lambda = \frac{1}{r_1 - r_2} = -\mu$$

Ainsi avec $r_1 - r_2 = \sqrt{5}$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

On peut aussi écrire que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \frac{(-1)^n}{\varphi^n} \right) = \frac{(\varphi^{2n} - (-1)^n)}{\sqrt{5}\varphi^n}$$

2. Par récurrence, on montre $\mathcal{P}(n) = \langle A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \rangle$. C'est vrai si $n = 1$ car $f_2 = f_1 + f_0 = 1$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 1$ fixé alors

$$A^{n+1} = A \times A^n \stackrel{HR_n}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n+1} & f_n + f_{n-1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$$

par définition de la suite de Fibonacci

3. On a donc pour $n \geq 1$

$$(-1)^n = (\det A)^n = \det A^n = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2$$

4. On pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

pour $n \geq 4$, on développe par rapport à la première colonne pour avoir

$$D_n = D_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-2} = D_{n-1} + D_{n-2}$$

en développant le second déterminant par rapport à la première ligne. Ainsi pour $n \geq 2$, on a

$$D_{n+2} = D_{n+1} + D_n$$

Puisque $D_2 = 1$ et $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, en posant $D_1 = 1$ puis $D_0 = 0$, la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci et les mêmes conditions initiales, elles sont donc égales.

Exercice de khôlle 412

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & \bigcirc \\ 3 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & 3 & 2 \end{vmatrix}_n$$

où la matrice est «tribande» (les termes en dehors de la diagonale et des deux diagonales secondaires sont nuls).

Solution : On s'inspire de l'exo type, on développe par rapport à la première colonne pour avoir

$$D_n = 2D_{n-1} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \bigcirc \\ 3 & 2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} - 3D_{n-2}$$

Avec $D_1 = 2$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$, en posant $D_0 = 1$, la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - 3D_n, \quad D_0 = 1 \text{ et } D_1 = 2$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 3 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = 1 + i\sqrt{2}$ et $r_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

Méthode ① : Si $r_1 = 1 + i\sqrt{2}$ alors $|r_1| = \sqrt{3}$ et $\varphi = \arg r_1$ est défini par $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ d'où

$$\varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } \tan \varphi = \sqrt{2}$$

Ceci permet d'affirmer que $\varphi = \arctan \sqrt{2}$.

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = (\lambda \cos(n\varphi) + \mu \sin(n\varphi)) (\sqrt{3})^n$$

Avec $n = 0$ on a $\lambda = 1$ puis $n = 1$ donne

$$(\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi) \sqrt{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \mu \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{3} = 2$$

d'où $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Conclusion

$$D_n = \left(\cos(n\varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(n\varphi) \right) \times 3^{\frac{n}{2}}$$

Méthode ② : On reste en complexe, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 2 \end{cases}$$

d'où $\lambda = \frac{2 - r_2}{r_1 - r_2}, \mu = \frac{r_1 - 2}{r_1 - r_2}$ soit $r_1 - r_2 = 2i\sqrt{2}$ et $r_1 + r_2 = 2$ donc $r_1 - 2 = -r_2$ et $2 - r_2 = r_1$

$$\lambda = \frac{r_1}{2i\sqrt{2}} \text{ et } \mu = -\frac{r_2}{2i\sqrt{2}}$$

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Im}(r_1^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Im}\left((1 + i\sqrt{2})^{n+1}\right) \text{ car } r_2^{n+1} = \overline{r_1}^{n+1} = \overline{(r_1)^{n+1}}$$

On peut également écrire (avec le binôme) que

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k (\sqrt{2})^k \right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\sqrt{2})^{k-1} \operatorname{Im}(i^k) \\ \text{car } \binom{n}{k} \sqrt{2}^k &\in \mathbb{R} \text{ et si } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z) \text{ et } \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n+1} z_k\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \operatorname{Im}(z_k) \end{aligned}$$

Si $k = 2p$ est pair alors $i^k = i^{2p} = (i^2)^p = (-1)^p$ d'où $\operatorname{Im}(i^{2p}) = 0$, alors que si $k = 2p + 1$ est impair alors

$$\operatorname{Im}(i^{2p+1}) = \operatorname{Im}((-1)^p i) = (-1)^p$$

ainsi

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2p+1} (\sqrt{2})^{2p+1-1} (-1)^p = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2p+1} 2^p (-1)^p \\ &= \sum_{0 \leq p \leq \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2p+1} 2^p (-1)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-2)^p \binom{n+1}{2p+1} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 413

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 & & \bigcirc \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix}_n \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}$$

Solution : Par parité et périodicité, on peut supposer que

$$\theta \in [0, \pi]$$

On s'inspire de l'exo type, on développe par rapport à la première colonne pour avoir

$$D_n = 2 \cos(\theta) D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \bigcirc \\ 1 & 2 \cos \theta & 1 \\ \bigcirc & \ddots & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix} = 2 \cos(\theta) D_{n-1} - D_{n-2}$$

Avec $D_1 = 2 \cos \theta$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta & 1 \\ 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix} = 4 \cos^2 \theta - 1$, en posant $D_0 = 1$, la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$D_{n+2} = 2 \cos(\theta) D_{n+1} - D_n, \quad D_0 = 1, D_1 = 2 \cos \theta$$

L'équation caractéristique est $r^2 - 2 \cos(\theta) r + 1 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = e^{i\theta}$ et $r_2 = \overline{r_1}$ (on a $\Delta = 4 \cos^2 \theta - 4 = -4 \sin^2 \theta = (2i \sin \theta)^2$ d'où $r_1 = \frac{2 \cos \theta + 2i \sin \theta}{2} = e^{i\theta}$).

Attention : Les deux racines ne sont pas toujours distinctes !

Cas ① : $\Delta = 0 \iff \sin \theta = 0 \iff \theta = 0$ ou $\theta = \pi$. On a alors $r_1 = \cos \theta = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta = 0 \\ -1 & \text{si } \theta = \pi \end{cases}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = (\lambda n + \mu) \times r_1^n$$

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on a

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ (\lambda + \mu) = 2 \cos \theta = 2r_1 \end{cases}$$

Si $\theta = 0$ on obtient $r_1 = 1$, $\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 2 \end{cases}$ d'où

$$D_n = n + 1$$

Si $\theta = \pi$, on obtient $r_1 = -1$, $\begin{cases} \mu = 1 \\ -(\lambda + \mu) = -2 \end{cases}$ d'où

$$D_n = (-1)^n (n + 1)$$

Si $\theta \in]0, \pi[$, on a deux racines distinctes. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$$

Avec $n = 0$ et $n = 1$, on a

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = 2 \cos \theta \end{cases} \quad \text{d'où } \lambda = 1 \text{ et } \mu = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \cos(n\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin(n\theta) = \frac{\cos(n\theta) \sin \theta + \cos \theta \sin(n\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$$

On peut remarquer que $D_n \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} n + 1$ (ce qui est bien la valeur de D_n si $\theta = 0$).

Exercice de khôlle 414

Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} aI_n & bD_n \\ bD_n & aI_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $D_n = \begin{pmatrix} \bigcirc & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \bigcirc \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice antidiagonale de «1».

Solution : On note $\Delta_n = \det A_n$. On commence par regarder pour $n = 3$, ainsi

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{2 \times 3}$$

On le développe par rapport à la première ligne pour avoir

$$\Delta_3 = a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^7 b \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe le premier déterminant par rapport à la dernière colonne et le second par rapport à la première colonne pour avoir

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^7 b \times (-1)^6 b \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \\ &= (a^2 - b^2) \Delta_2 \end{aligned}$$

Dans le cas général, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_n &= a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{2n-1} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{2n-1} \\ &= a^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{2n-2} + (-1)^{2n+1} b \times (-1)^{2n-1+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}_{2n-2} \\ &= (a^2 - b^2) \Delta_{n-1} \end{aligned}$$

La suite $(\Delta_n)_n$ est donc géométrique de raison $(a^2 - b^2)$. Pour finir, on a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \text{ (donc } \Delta_0 = 1 \text{ permet de commencer à } n = 0)$$

d'où

$$\Delta_n = (a^2 - b^2)^n$$

12.6 Topologie et densité

Exercice de khôlle 415

Soient I et J deux intervalles ouverts et non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que

$$I \cap J \cap \mathbb{Q} = \emptyset$$

Montrer que $I \cap J = \emptyset$.

Solution : Notons $I =]a, b[$ et $J =]c, d[$, par l'absurde, on suppose qu'il existe $\alpha \in I \cap J$. Il existe alors $r_1 > 0$ tel que $]\alpha - r_1, \alpha + r_1[\subset I$ (car I est ouvert, par exemple $r_1 = \min(\alpha - a, b - \alpha)$). De même il existe $r_2 > 0$ tel que $]\alpha - r_2, \alpha + r_2[\subset J$ (par exemple $r_2 = \min(\alpha - c, d - \alpha)$). Pour $r = \min(r_1, r_2)$, on a

$$]\alpha - r, \alpha + r[\subset I \cap J$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha - r < q < \alpha + r$. Absurde, car cela implique que $q \in I \cap J \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

13.1 Suites extraites

Exercice de khôlle 416

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. Montrer que les suites extraites $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2+3})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n^2-1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser leur limite.
2. Que peut-on en déduire pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Solution :

1. On a $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = n - \lfloor n \rfloor = 0$ car $n \geq 0$ donc $\sqrt{n^2} = n$ et $n \in \mathbb{N}$ donc $\lfloor n \rfloor = n$, ainsi $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante nulle donc converge vers 0.

Pour u_{n^2+3} , on a $n^2 + 3 < (n+1)^2 \iff 0 < (n+1)^2 - n^2 - 3 = 2(n-1)$, ainsi pour $n \geq 1$

$$n^2 \leq n^2 + 3 < (n+1)^2$$

d'où

$$n \in \mathbb{Z} \text{ et } n = \sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2 + 3} < n+1$$

ce qui permet d'affirmer que $n = \lfloor \sqrt{n^2 + 3} \rfloor$ d'où

$$u_{n^2+3} = \sqrt{n^2 + 3} - n = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)} - n = n \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - 1 \right) \sim n \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(On peut aussi écrire que $\sqrt{n^2 + 3} - n = \frac{n^2 + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 3} + n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$)

Enfin, $(n-1)^2 \leq n^2 - 1 \iff 0 \leq n^2 - 1 - (n-1)^2 = 2(n-1)$ d'où pour $n \geq 1$

$$(n-1)^2 \leq n^2 - 1 < n^2$$

et ainsi

$$n \in \mathbb{Z}, n-1 \leq \sqrt{n^2 - 1} < n$$

donne $n-1 = \lfloor \sqrt{n^2 - 1} \rfloor$ et

$$u_{n^2-1} = \sqrt{n^2 - 1} - (n-1) = n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1 \right) + 1$$

Mais $n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1 \right) \sim n \times \left(-\frac{1}{2n^2} \right) = -\frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_{n^2-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. (Encore une fois, on peut aussi écrire que $\sqrt{n^2-1} - n = \frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour conclure).

2. Conclusion, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge car elle admet deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes.

Exercice de khôlle 417

On pose pour $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ dit n ème nombre harmonique

1. Justifier que $\forall x > 1$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}$$

2. En déduire que $H_{3n+1} \geq 1 + H_n$.

3. Montrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est croissante puis en déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.

Cette preuve de la divergence de la série harmonique est celle du prêtre italien Pietro Mengoli (1625-1686).

Solution :

1. Simple car $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x(x^2-1)} \geq 0$.

2. On a alors

$$\begin{aligned} H_{3n+1} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} \right) \geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{3}{3k} = 1 + H_n \end{aligned}$$

3. Puisque $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$, la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Si elle converge, soit ℓ sa limite alors en tant que suite extraite,

$$H_{3n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

et en passant à la limite dans $H_{3n+1} \geq 1 + H_n$, il vient

$$\ell \geq 1 + \ell$$

donc $\ell \leq 0$, absurde car $H_1 = 1 \leq \ell$.

Exercice de khôlle 418

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^n u_n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée entre 0 et 2.

2. Nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. Par récurrence, c'est vrai si $n = 1$ puis si $u_n \in [0, 2]$ alors $|(-1)^n u_n| = u_n \in [0, 2]$ donc

$$(-1)^n u_n \in [-2, 2] \text{ et } 2 + (-1)^n u_n \in [0, 4]$$

puis par croissance de $\sqrt{\cdot}$, on a bien $u_{n+1} \in [0, 2]$.

2. La présence du $(-1)^n$ incite à considérer les suites extraites de rang pair et impair. On pose donc

$$p_n = u_{2n} \text{ et } i_n = u_{2n+1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= u_{2n+2} = \sqrt{2 + (-1)^{2n+1} u_{2n+1}} = \sqrt{2 - i_n} \\ i_{n+1} &= u_{2n+3} = \sqrt{2 + (-1)^{2n+2} u_{2n+2}} = \sqrt{2 + p_{n+1}} \end{aligned}$$

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, soit ℓ sa limite (qui est dans $[0, 2]$) alors p_n, p_{n+1}, i_n et i_{n+1} tendent aussi vers ℓ . Par PAL dans les égalités ci dessus, on en déduit que

$$\ell = \sqrt{2 - \ell} \text{ et } \ell = \sqrt{2 + \ell}$$

Ainsi

$$\sqrt{2 - \ell} = \sqrt{2 + \ell} \implies 2 - \ell = 2 + \ell \implies \ell = 0$$

mais puisque $0 \neq \sqrt{2 - 0}$, c'est absurde. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Exercice de khôlle 419

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, ① u est majorée, ② $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \geq u_n$ et ③ $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

0. Montrer que u converge.

Solution : Soit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de rangs pairs et impairs (donc $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$). La condition ② permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{2n+2} \geq u_{2n} = v_n$ et $w_{n+1} = u_{(2n+1)+2} \geq u_{2n+1} = w_n$. Ainsi v et w sont croissantes. Puisque u est majorée, il en est de même de v et w . Ainsi v et w convergent. Notons ℓ_1 et ℓ_2 les limites de v et w respectivement. Soit $z_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$, alors $z_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (suite extraite). Mais

$$z_{2n} = v_{n+1} - 2w_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell_1 - 2\ell_2$$

(car $v_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, suite extraite!). Par unicité de la limite, on a $2\ell_1 - 2\ell_2 = 0$ d'où $\ell_1 = \ell_2$. Les suites extraites de rangs pairs et impairs de u convergent vers la **même limite**. Ainsi u converge également vers cette limite.

13.2 John Montagu (4^e comte de Sandwich)

Exercice de khôlle 420

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(u_n)_n$ par

$$u_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} x \right]$$

- Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Même question avec

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} x^k \right]$$

Solution :

1. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$x \binom{n}{k} - 1 < \left\lfloor \binom{n}{k} x \right\rfloor \leq \binom{n}{k} x$$

En sommant les inégalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} x - 1 \right) = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - (n+1) < \sum_{k=0}^n \left\lfloor \binom{n}{k} x \right\rfloor \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x = x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Mais la formule du binôme $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ avec $a = b = 1$ donne

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Ainsi

$$x - \frac{n+1}{2^n} \leq u_n \leq x$$

Du théorème des gendarmes et de la croissance comparée $\frac{n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on déduit $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

2. On a de la même manière

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} x^k - 1 \right) = \left(\frac{1+x}{2} \right)^n - \frac{(n+1)}{2^n} \leq v_n \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \left(\frac{1+x}{2} \right)^n$$

Si $\frac{1+x}{2} > 1$ soit $x > 1$, puisque $\frac{(n+1)}{2^n} \sim \frac{n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left(\frac{1+x}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, par minoration on a $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Si $x = 1$ alors $1 - \frac{(n+1)}{2^n} \leq v_n \leq 1$ d'où $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Si $-1 < \frac{1+x}{2} < 1$, soit $-3 < x < 1$, on a $\frac{(n+1)}{2^n} \sim \frac{n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left(\frac{1+x}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et ainsi $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $x = -3$, on obtient $(-1)^n - \frac{(n+1)}{2^n} \leq v_n \leq (-1)^n$, ainsi $v_n \sim (-1)^n$ qui n'a pas de limite.

Reste le cas où $x < -3$, dans ce cas on considère les suites de rangs pairs et impairs, en effet

$$\left(\frac{1+x}{2} \right)^{2n} - \frac{(n+1)}{2^n} \leq v_{2n}$$

Mais $\left(\frac{1+x}{2} \right)^{2n} = q^n$ où $q = \left(\frac{1+x}{2} \right)^2 > 1$ donc $\left(\frac{1+x}{2} \right)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et ainsi $v_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Et enfin

$$v_{2n+1} \leq \left(\frac{1+x}{2} \right)^{2n+1} = \left(\frac{1+x}{2} \right) q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \text{ car } \frac{1+x}{2} < 0$$

On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite (finie ou infinie).

Exercice de khôlle 421

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$.

1. Montrer que $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Solution :

- On pose $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = x - \ln(1+x)$. Ces fonctions sont définies et dérivables sur $[0, +\infty[$.
On a $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$. Les deux fonctions sont croissantes, puisque $f(0) = g(0) = 0$, on a pour $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$ et $g(x) \geq g(0) = 0$. Ceci prouve la double inégalité.
- Pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $x = \frac{k}{n^2} \geq 0$ d'où

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} \leq \ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Mais

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} = \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{2n^3}{12n^4} = \frac{1}{6n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(On peut aussi écrire que $0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^4} \leq \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n n^2 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$). Ainsi par encadrement $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Par continuité de l'exponentielle en $\frac{1}{2}$, on a

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{e}$$

Exercice de khôlle 422

Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k^k$.

Solution : Si on majore sans réfléchir chaque terme par n^n , on obtient $u_n \leq n$ ce qui est fort peu utile. Mais si on regarde bien, on a pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^n} \left(1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + (n-1)^{n-1} + n^n \right) \\ &= 1 + \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n-1} k^k \end{aligned}$$

Et avec un peu de chance $v_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n-1} k^k$ tend vers 0 ! On majore brutalement, si $k \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket$, $0 \leq k^k \leq (n-1)^{n-1}$ d'où

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^n} \times \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)^{n-1} = \frac{1}{n^n} \times (n-1) \times (n-1)^{n-1} = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

Bon c'est encore un peu trop brutal, car $\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$. En effet $\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)$ et $n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sim n \times \left(-\frac{1}{n} \right) = -1$ donc $n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ et par continuité en -1 de la fonction $\exp$, on a $\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$.

On affine donc encore un peu en écrivant que si $n \geq 3$

$$u_n = 1 + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} + \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n-2} k^k$$

Puis (comme pour la mioration brutale de v_n)

$$0 \leq \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n-2} k^k \leq \frac{1}{n^n} \times (n-2) \times (n-2)^{n-2} = \frac{(n-2)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{car } 0 \leq 1 - \frac{2}{n} \leq 1 \text{ donc } \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-1} \leq 1$$

et

$$\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n-1} \times \frac{(n-1)^n}{n^n} = \frac{1}{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{car } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \text{ et } \frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Conclusion

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

13.3 La vie est un long fleuve monotone

Exercice de khôlle 423

Soient u_0 et v_0 deux réels positifs tels que $0 < u_0 < v_0$, on définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont parfaitement définies et que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et préciser leur limite.
3. On pose $r_n = \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, justifier que r_n est bien définie et qu'elle est géométrique.
4. On suppose que $u_0 = r \in]0, 1[$ et $v_0 = 1$, exprimer alors r_n en fonction de n . En déduire l'existence et la valeur de : $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 + r^{2^k})$.
(Il sera alors judicieux de considérer $\frac{v_n}{v_{n+1}}$).

Solution : On a imposé $0 < u_0$ car si $u_0 = 0$, par une simple récurrence, on obtient $u_n = 0$ et $v_n = v_0$. En fait ce cas limite permet d'anticiper certains résultats à venir...

1. Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \langle u_n \text{ et } v_n \text{ existent et } 0 < u_n < v_n \rangle$. C'est vrai si $n = 0$ puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 0$ alors

$$0 < u_n < v_n \text{ d'où } 0 < u_n + v_n$$

donc u_{n+1} et v_{n+1} existent (on ne divise pas par 0) et sont strictement positifs (en tant que quotient de nombre positifs) et enfin

$$v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - u_n > 0 \text{ par HR}_n$$

ce qui termine la récurrence.

2. Déjà, on remarque que $v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - u_n$ donc que la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $v_0 - u_0$.
Puis, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - u_n = -\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} - v_n = -\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} < 0$$

Les deux suites sont donc décroissantes et minorées par 0 (elles sont positives) donc convergentes par le TLM. Soit $\ell_u = \lim u_n$ et $\ell_v = \lim v_n$ alors

$$v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_v - \ell_u$$

mais $v_n - u_n = v_0 - u_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v_0 - u_0$, donc par unicité de la limite

$$\ell_v - \ell_u = v_0 - u_0 > 0 \text{ d'où } \ell_v > \ell_u \geq 0$$

Puis

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_u \times \ell_v}{\ell_u + \ell_v}$$

Mais $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_u$ (suite extraite) donc

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi

$$\ell_u \times \ell_v = 0$$

et comme on a montré que $\ell_v > \ell_u \geq 0$, on en déduit que

$$\ell_v = v_0 - u_0 \text{ et } \ell_u = 0$$

3. Puisque $v_n > 0$ et $u_n > 0$, on en déduit que r_n est bien définie puis

$$r_{n+1} = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \right) = \ln \left(\frac{v_n^2}{u_n^2} \right) = 2 \ln \left(\frac{v_n}{u_n} \right) = 2r_n$$

4. On a alors $r_0 = \ln(r)$ d'où $r_n = 2^n \ln(r)$ et ainsi

$$\frac{u_n}{v_n} = r^{2^n}$$

Puis, selon l'indication

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{v_n + u_n}{v_n} = 1 + \frac{u_n}{v_n}$$

et

$$1 + r^{2^k} = 1 + \frac{u_k}{v_k} = \frac{v_k}{v_{k+1}}$$

d'où

$$\prod_{k=0}^n (1 + r^{2^k}) = \prod_{k=0}^n \frac{v_k}{v_{k+1}} = \frac{v_0}{v_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{v_0}{v_0 - u_0} = \frac{1}{1 - r}$$

Exercice de khôlle 424

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée qui vérifie la condition

$$(C) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}.$$

1. Soit $v_n = u_n - u_{n-1}$, montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note alors $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 0$.
3. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n \geq N}$ soit monotone. Que peut-on en déduire pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Solution :

1. On a

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n \geq 0$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Par IT on a alors $|v_n| \leq |u_n| + |u_{n-1}| \leq 2M$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc majorée. Par le TLM (théorème de la limite monotone), elle converge.

2. On suppose que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \neq 0$. Le terme $u_n - u_{n-1}$ donne envie de faire un télescopage. En effet, on

$$\sum_{k=p}^n v_k = \sum_{k=p}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_p$$

Si $\ell > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq N \implies v_k \geq \frac{\ell}{2}$. Mais alors pour $n \geq N$

$$u_n = u_N + \sum_{k=N}^n v_k \geq u_N + (n - N) \frac{\ell}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée ! De même si $\ell < 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq N \implies v_k \leq \frac{\ell}{2}$ et pour $n \geq N$

$$u_n = u_N + \sum_{k=N}^n v_k \leq u_N + (n - N) \frac{\ell}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

Conclusion $\ell = 0$.

Remarque : Si on se dit que la suite la plus simple qui converge vers une limite ℓ (nulle ou pas) est la suite constante égale à ℓ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - u_{n-1} = \ell$$

donc $u_n = u_{n-1} + \ell$ est arithmétique. Dans ce cas

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

Pour résumer, si on prend $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique de raison $\ell \neq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \neq 0$. Mais si la raison n'est pas nulle, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée !

3. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et tend vers 0. Montrons qu'elle est alors toujours négative. Par l'absurde, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_N > 0$ alors par croissance de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\forall n \geq N, v_n \geq v_N$$

par PAL (passage à la limite), on a $\ell = 0 \geq v_N > 0$, absurde. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 0$$

ce qui prouve que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, elle est minorée et par le TLM, elle converge.

Exercice de khôlle 425

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{nu_n}{n+1+u_n}$.

En considérant $v_n = nu_n$ dont on étudiera les variations, déterminer la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution : On suit l'indication car

$$\begin{aligned}(n+1)v_{n+1} - nv_n &= (n+1) \times \frac{nu_n}{n+1+u_n} - nu_n \\ &= nu_n \left(\frac{n+1}{n+1+u_n} - 1 \right) = -\frac{nu_n^2}{n+1+u_n}\end{aligned}$$

Si tout cela a un sens. On commence donc par montrer par récurrence (immédiate) que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$. On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante (car $n+1+u_n > 0$) et minorée par 0 (car $u_n > 0$ donc $nu_n \geq 0$). Ainsi, par le TLM, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Mais alors

$$u_n = \frac{v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque : ①

$$u_{n+1} - u_n = \frac{nu_n}{n+1+u_n} - u_n = \frac{nu_n - (n+1+u_n)u_n}{n+1+u_n} = -\frac{u_n(1+u_n)}{n+1+u_n}$$

ce qui prouve que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également décroissante, par le TLM, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Mais on ne peut pas, à l'aide de $u_{n+1} = \frac{nu_n}{n+1+u_n}$ en déduire la valeur de cette limite !

② En fait, si on regarde les premiers termes, on se rend compte que

$$u_n = \frac{u_1}{n + (n-1)u_1}$$

ce qui se prouve par récurrence très facilement et retire tout intérêt à cet exercice....

Exercice de khôlle 426

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n.$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Solution : On ne demande pas la limite, on tente donc le théorème de la limite monotone. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2}{2n+5}u_n - u_n = -\frac{3u_n}{2n+5}$$

Dont le signe est celui de u_n . On montre donc par récurrence $\mathcal{P}(n) = \langle u_n \geq 0 \rangle$ qui est vrai si $n = 1$ et clairement héréditaire (si $u_n \geq 0$, puisque $\frac{2n+2}{2n+5} \geq 0$, on a $u_{n+1} \geq 0$). Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

Exercice de khôlle 427

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

1. Simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (n+1)u_n^2$. Simplifier $\frac{v_n}{v_{n-1}}$ pour $n \geq 1$, en déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone puis qu'elle converge.

3. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution : On a $u_n > 0$ et $v_n > 0$ (car $\binom{2n}{n} \neq 0$), et la présence de factorielle nous indique qu'il est préférable de considérer le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ (qui existe) pour étudier la monotonie.

$$1. \text{ On a } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{4} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}. \text{ Or}$$

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2) \times (2n+1) \times (2n)!}{((n+1) \times n!)^2} = \frac{(2n+2) \times (2n+1)}{(n+1)^2} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} = 2 \times \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$2. \text{ On a } v_{n+1} = (n+2) u_{n+1}^2 \text{ d'où}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2$$

d'où, pour $n \geq 1$

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 = \frac{(n+1) \times (4n^2 - 4n + 1)}{4n^3} = \frac{4n^3 - 3n + 1}{4n^3} = 1 - \left(\frac{3n-1}{4n^3} \right) < 1 \text{ si } n \geq 1$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante, minorée par 0 donc converge.

3. Pour finir

$$0 \leq u_n = \sqrt{\frac{v_n}{n+1}} \leq \sqrt{\frac{v_0}{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice de khôlle 428

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite noté ℓ .
- En considérant $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right)$, montrer que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solution :

- Simple récurrence avec $\mathcal{P}(n) = \langle u_n > 0 \rangle$.
- On a alors $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} (1 - \sqrt{1+u_n^2}) \leq 0$ car $1 + u_n^2 \geq 1$ (et $\sqrt{\cdot}$ est croissante) et $u_n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante, minorée par 0 donc converge. Soit ℓ sa limite alors $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ (suite extraite). Mais $1 + u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + \ell^2 \geq 0$ donc par continuité de $\sqrt{\cdot}$ sur $[0, +\infty[$ on a $\sqrt{1+u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\ell^2} \neq 0$ et par quotient

$$u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$$

Par unicité de la limite on a

$$\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$$

ce qui équivaut à $\ell = 0$ ou $1 = \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}$. Or $1 = \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}} \Rightarrow \sqrt{1+\ell^2} = 1 \Rightarrow 1 + \ell^2 = 1 \Rightarrow \ell = 0$. Conclusion $\ell = 0$.

3. On a (Pirate)

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2}$$

Mais pour $k \geq 1$

$$\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} = \frac{1 + u_k^2}{u_k^2} - \frac{1}{u_k^2} = 1$$

d'où

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$$

Ainsi

$$\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2} = 1 \text{ d'où } nu_n^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{nu_0^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ ce qui prouve que } u_n^2 \sim \frac{1}{n}$$

et en passant à la racine carrée que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice de khôlle 429

Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$. On définit f sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

1. Donner les variations de f .
2. En déduire que pour $n > 0$, on a $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$.
3. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour $n \geq 1$, on a $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Solution :

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ avec, pour $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$$

Ainsi f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et en écrivant que

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

il vient $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

2. En particulier pour $x > 0$, on a $f(x) \leq 0$ d'où avec $x = n$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$$

3. On a $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$ d'où $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = f(n) \leq 0$, ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. On pose $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}$, dérivable, de dérivée égale à $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$ sur $]0, +\infty[$. Puisque

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que $f \leq 0$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi $f(n) \leq 0$ ce qui équivaut à $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$.

5. Il suffit de montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée. Puisque pour $k \geq 1$ on a $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$, en sommant les inégalités on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln n - \ln 1 = 1 \text{ d'où}$$

$$\ln n \leq H_n - \frac{1}{n} \text{ ce qui donne } \frac{1}{n} \leq u_n$$

et montre que $0 \leq u_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc minorée, décroissante, elle converge.

Remarque : ① On peut aussi écrire que

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_n + \ln(n)$$

d'où

$$0 \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq u_n$$

② La concavité de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$ (la dérivée seconde vaut $-\frac{1}{(1+x)^2} < 0$) permet d'affirmer que

$\ln(1+x) \leq x$ si $x \geq -1$ (la courbe est «sous sa tangente»). Avec $x = \frac{1}{n}$, on obtient $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) =$

$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ qui est la seconde inégalité demandée. Avec $x = -\frac{1}{n+1}$ on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1) \leq -\frac{1}{n+1}$$

qui est (en multipliant par -1) la première inégalité.

③ La limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la constante d'Euler, généralement notée γ et dont une valeur approchée est

$$\gamma = 0,577\,215\,664\,901 \dots$$

Cette constante est fondamentale, en un sens elle joue un rôle analogue au nombre π . Le nombre π apparaît naturellement lorsque l'on étudie la fonction $\exp$ (via les parties réelles et imaginaires). Le nombre γ , quant à lui, surgit dans la fonction Γ que vous étudierez en spé et qui est une fonction incontournable en mathématiques. On ne sait pas si γ est irrationnelle et le calcul des décimales de γ n'est pas simple, en comparaison à celles de π ou de e .

Exercice de khôlle 430

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}}$$

Ainsi $u_1 = \sqrt{1} = 1$, $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{1}} = \sqrt{3}$, $u_3 = \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}} = \sqrt{\sqrt{3} + 3}$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq 1 + \sqrt{n}$. En déduire un équivalent de u_n .
3. Montrer que $u_n - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Solution : Avant $u_n \geq 0$ et on peut remarquer que si $n \geq 2$ alors $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1. On a $u_n \geq \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Par récurrence, c'est vrai si $n = 1$ car $u_1 = 1 \leq 1 + \sqrt{1} = 2$. Puis si $u_n \leq 1 + \sqrt{n}$ alors

$$n + u_n \leq n + 1 + \sqrt{n}$$

d'où

$$u_{n+1} \leq \sqrt{n+1 + \sqrt{n}}$$

Il suffit de prouver que $\sqrt{n+1 + \sqrt{n}} \leq 1 + \sqrt{n}$. Puisqu'il s'agit de nombres positifs, cela équivaut à

$$\left(\sqrt{n+1 + \sqrt{n}}\right)^2 = n+1 + \sqrt{n} \leq (1 + \sqrt{n})^2 = 1 + 2\sqrt{n} + n$$

ce qui est vrai ($\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n}$). On a donc

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq 1 + \sqrt{n} \sim \sqrt{n} \text{ d'où } u_n \sim \sqrt{n}$$

3. Pour $n \geq 2$, on a

$$u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n + u_{n-1}} + \sqrt{n}}$$

Mais $u_{n-1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$ donc on se dit que $\sqrt{n + u_{n-1}} + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$. Reste à le prouver !

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n + u_{n-1}} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} + 1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ \text{car } \frac{u_{n-1}}{n} &\sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Conclusion

$$u_n - \sqrt{n} \sim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \text{ ce qui prouve que } u_n - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Remarque : Si l'on est pas à l'aise avec les équivalents, on écrit que

$$\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n + u_{n-1}} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}} + 1} \text{ et que } \frac{u_{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice de khôlle 431

Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$.

1. Montrer que la suite u est monotone.

Indication : Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4n(n+1) + d(n)}$ où d est une fonction de n .

2. On pose pour $n \geq 1, v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

(a) Montrer que $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.

(b) Montrer que pour $n \geq 1, \sum_{k=1}^n v_k \leq \frac{1}{4}$.

3. Montrer que la suite u converge.

Solution :

1. Pour $n \in \mathbb{N}, \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n}$. Ainsi

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} - \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{n+1}}{4 \times 4^n} \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} - \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \times \frac{2n+1}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} - \sqrt{n} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left(\frac{2n+1}{2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n} \right) \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{n}} \times \left(\frac{2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}}{2\sqrt{n+1}} \right) = \frac{u_n}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \times \frac{(2n+1)^2 - 4n(n+1)}{(2n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{u_n}{2\sqrt{n(n+1)} \left((2n+1) + 2\sqrt{n(n+1)} \right)} = \frac{u_n}{4n(n+1) + 2(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} \geq 0 \end{aligned}$$

La suite u est donc croissante.

2. Attention v_0 n'est pas défini !

(a) Inégalité de convexité ou étude de $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$ dont la dérivée est $1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$ ce qui permet d'affirmer que $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$.

(b) Puisque $u_n > 0$ si $n \geq 1$, on a $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}\right)$. Par croissance de u , on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ d'où

$$v_n = \ln\left(1 + \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}\right) \leq \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \frac{1}{4n(n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}(2n+1)} \leq \frac{1}{4n(n+1)}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^n v_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{4}$$

Remarque : L'idée est de majorer $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ par un terme simple w_n tel que l'on sache calculer $\sum_{k=1}^n w_k$.

Donc soit par télescopage, soit en utilisant des sommes géométriques $\sum_{k=1}^n q^k$.

3. Mais si $n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_1)$ ainsi, pour $n \geq 2$

$$\ln(u_n) \leq \frac{1}{4} + \ln(u_1) \text{ d'où } u_n \leq u_1 e^{\frac{1}{4}}$$

La suite u est donc croissante, majorée, elle converge. De plus sa limite ℓ vérifie

$$\ell \leq u_1 \sqrt[4]{e} = \frac{\sqrt[4]{e}}{2} = ,642 \dots$$

Remarque : ① Avec Wallis, on peut (ce n'est pas simple), montrer que $\ell = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,564 \dots$.

② On peut améliorer la majoration de $\frac{1}{4n(n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}(2n+1)}$ car

$$\frac{1}{4n(n+1) + 2n(2n+1)} = \frac{1}{2n(4n+3)} \leq \frac{1}{2n(4n+2)} = \frac{1}{8n(2n+1)} \leq \frac{1}{8n(n+1)}$$

ce qui donne $\sum_{k=1}^n v_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{8k(k+1)} = \frac{1}{8} \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{8}$ (eh oui, une fois de plus on majore de manière à obtenir une somme que l'on sache calculer!).

On en déduit que

$$\ell \leq \frac{\sqrt[8]{e}}{2} = 0,566 \dots$$

ce qui est bien mieux !

Exercice de khôlle 432

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelles telle que ① u est bornée et ② $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.

On définit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que v converge vers 0.

Solution : D'après ②, on a $2u_{n+1} \leq u_{n+2} + u_n$. Puisque $v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} + u_n - 2u_{n+1}$, on en déduit que v est croissante. Puisque u est bornée, il en est de même de v . En effet soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ alors

$$|v_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2M.$$

Par le TLM, on en déduit que v converge. Reste à montrer que $\ell = 0$. On a plusieurs méthodes. Soit ℓ la limite de la suite v .

Méthode ① : Supposons $\ell \neq 0$, par Césaro, on a $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

Mais $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \underset{\text{Pirate}}{=} u_n - u_0$ donc $u_n - u_0 \sim n\ell$ (c'est le lemme de l'escalier) d'où $|u_n| \sim n|\ell|$. Absurde car $n|\ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc u n'est pas bornée. Conclusion $\ell = 0$.

Méthode ② : On n'utilise pas Césaro ! Mais l'idée est la même, à savoir que

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$$

Si $\ell > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies v_n \geq \frac{\ell}{2}$. Mais alors, pour $n > N$

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^N v_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} v_k \geq \sum_{k=0}^N v_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{\ell}{2} \geq \sum_{k=0}^N v_k + (n - N - 1) \frac{\ell}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Ce qui contredit u bornée.

Si $\ell < 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies v_n \leq \frac{\ell}{2}$. Mais alors, pour $n > N$

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^N v_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=0}^N v_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} \frac{\ell}{2} \leq \sum_{k=0}^N v_k + (n - N - 1) \frac{\ell}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

Ce qui contredit u bornée. Conclusion $\ell = 0$.

Méthode ③ : On améliore la méthode ②. Supposons $\ell > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies v_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$.

Méزالor, $v_n = u_{n+1} - u_n > 0$ à partir du rang N . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante APCR, majorée car bornée donc converge. Soit ℓ_u sa limite, on a alors $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_u$ (suite extraite) donc $v_n = u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_u - \ell_u = 0$.

Par unicité de la limite $\ell = 0$. De la même manière si $\ell < 0$, la suite u est décroissante, minorée donc converge et on en déduit que $\ell = 0$. Donc si $\ell \neq 0$ on a $\ell = 0$ absurde ! Conclusion $\ell = 0$!

Remarque : De manière générale si u vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$ (je la qualifierais de sous-arithmétique),

soit w la suite telle que $w_0 = u_0$, $w_1 = u_1$ et $w_n = \frac{w_{n+1} + w_{n-1}}{2}$ alors w est arithmétique de premier terme u_0 et de raison $u_1 - u_0$ d'où

$$w_n = u_0 + n(u_1 - u_0)$$

On pose alors $z_n = u_n - w_n$ alors

$$z_0 = 0, z_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, z_n \leq \frac{z_{n+1} + z_{n-1}}{2} \text{ car } w_n = \frac{w_{n+1} + w_{n-1}}{2}$$

et en posant $v_n = z_{n+1} - z_n$, on a $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $v_0 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 0$. Ceci signifie que

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = z_n - z_0 = z_n = u_n - w_n \geq 0$$

d'où

$$u_n \geq w_n = u_0 + n(u_1 - u_0)$$

Si $u_1 - u_0 > 0$ alors $u_0 + n(u_1 - u_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et u n'est pas bornée ! Si on revient à notre exercice, puisque u est supposée bornée, on a $u_1 \leq u_0$ et $v_0 \leq 0 \leq v_n = u_{n+1} - u_n \leq \ell = 0$. Ceci implique que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Puisqu'elle est bornée, elle converge.

13.4 Tout est dans le non-dit

Exercice de khôlle 433

Soit l'équation $(E_n) \quad x = 1 + \ln(x + n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (E_n) admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution notée u_n .
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \ln n \leq u_n \leq n$. Que peut-on en déduire pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
4. Déterminer un équivalent de u_n .

Solution : On pose $f_n(x) = 1 + \ln(x + n) - x$ qui est bien définie, continue, dérivable sur $]0, +\infty[$.

1. On a $f'_n(x) = \frac{1}{x+n} - 1 = \frac{1-n-x}{x+n} < 0$ si $n \geq 1$. Puisque f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left] \lim_{0^+} f_n, \lim_{+\infty} f_n \right[$. Or $\ln(x+n) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(n) \geq 0$ et par les croissances comparées $\ln(x+n) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$, on a $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Ainsi f_n réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]\ln(n), -\infty[$ qui contient 0. Il existe un unique $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

Remarque : Pour $n = 0$, on peut montrer que l'on a une unique solution qui vaut 1.

2. On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = 1 + \ln(u_n + n + 1) - u_n - (1 + \ln(u_n + n) - u_n) \\ &= \ln\left(\frac{n + u_n + 1}{n + u_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n + u_n}\right) > 0 \text{ car } \frac{1}{n + u_n} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$$

et par stricte décroissance de f_{n+1} , on en déduit que $u_n < u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. Ainsi ou bien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et elle converge, ou bien elle diverge (et vu la question suivante)

3. On a pour $n \geq 1$

$$1 + \ln(u_n + n) = u_n$$

d'où

$$1 + \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) = u_n$$

Puisque $\ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) > 0$ car $\frac{u_n}{n} > 0$, on a $\ln(n) \leq 1 + \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) = u_n$.

Pour l'inégalité de gauche, par décroissance de f_n , il suffit de prouver que $f_n(n) \leq 0$ APCR. Mais

$$f_n(n) = 1 + \ln(2n) - n = 1 + \ln(2) + \ln(n) - n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

donc APCR, $f(n) \leq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \implies f_n(n) < f_n(u_n)$ d'où $u_n \leq n$.
par minoration, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

4. Pour finir, on a donc

$$u_n = \ln(n) + 1 + \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)$$

Si on montre que $\ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) = o(\ln(n))$, on a l'équivalent (car bien sûr $1 = o(\ln(n))$). Mais avec l'encadrement précédent

$$0 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 \text{ d'où } 0 \leq \frac{\ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)}{\ln n} \leq \frac{\ln 2}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve la domination annoncée.

Conclusion

$$u_n \sim \ln(n)$$

Remarque : En fait, puisque $u_n \sim \ln n$, on a

$$\ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et ainsi

$$u_n = \ln(n) + 1 + o(1)$$

Si on pose $u_n = 1 + \ln(n) + v_n$, on a alors

$$1 + \ln(n) + v_n = \ln(n) + 1 + \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)$$

soit (avec $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$)

$$v_n = \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) \sim \frac{u_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$$

donc

$$u_n = \ln(n) + 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice de khôlle 434

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, on considère l'équation $(E_n) \quad \ln(x) = \frac{x^2}{n}$.

1. Montrer que (E_n) admet deux solutions $a_n < b_n$ sur $]0, +\infty[$.
2. Etudier les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, préciser leur nature.
3. Donner la limite ℓ de a_n et un équivalent de $a_n - \ell$.

Solution :

1. On pose $f_n(x) = \ln(x) - \frac{x^2}{n}$ qui est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{n} = \frac{n - 2x^2}{nx}$.

On a facilement $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. On en déduit les variations de f_n

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f'_n		+	-
f_n	$-\infty$	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	$-\infty$

On a $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) - \frac{\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^2}{n} = \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{n}{2}\right) - 1\right)$. Si $n \geq 6$ alors $\frac{n}{2} \geq 3 > e$ d'où $\ln\left(\frac{n}{2}\right) > \ln e = 1$. Le théorème de la bijection sur chacun des intervalles $]0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$ permet alors de conclure (à l'oral, on attend les mots continue et strictement monotone sur chacun des intervalles susnommés).

2. D'après le tableau de variations de f_n , on a

$$a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \leq b_n$$

donc par minoration, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$f_{n+1}(a_n) = f_{n+1}(a_n) - f_n(a_n) = \left(\ln(a_n) - \frac{a_n^2}{n+1}\right) - \left(\ln(a_n) - \frac{a_n^2}{n}\right) = \frac{a_n^2}{n(n+1)} > 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$$

Attention, il peut sembler y avoir un piège! Puisque $a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{\frac{n+1}{2}}$, on peut affirmer que

$a_n \in \left]0, \sqrt{\frac{n+1}{2}}\right]$, intervalle sur lequel f_{n+1} est strictement croissante. Donc $a_n \geq a_{n+1}$ et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

décroissante, minorée par 0 (car positive), donc par le TLM elle converge.

En fait si on examine bien les variations de f_{n+1} , la positivité de $f_{n+1}(a_n)$ permet d'affirmer que $a_n \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, donc que $a_{n+1} \leq a_n$!

3. Soit ℓ la limite de a_n , on a donc $a_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^2$ et $f_n(a_n) = 0$ donne

$$\ln(a_n) = \frac{a_n^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où $a_n = \exp(\ln(a_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (continuité de l'exponentielle).

Enfin

$$\begin{aligned} \ln(a_n) &= \ln(1 + (a_n - 1)) \sim a_n - 1 \\ \text{car } \ln x &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ et } x = a_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Or

$$\ln(a_n) = \frac{a_n^2}{n} \sim \frac{1}{n} \text{ car } a_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

ainsi

$$a_n - 1 \sim \frac{1}{n}$$

Remarque : On peut résoudre cet exercice d'une toute autre manière. L'équation $\ln x = \frac{x^2}{n}$ équivaut à $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{n}$. On pose alors $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Une étude rapide de φ (avec $\varphi'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$) montre que φ réalise une bijection strictement croissante de $]0, \sqrt{e}]$ sur $\left] \lim_{0^+} \varphi, \varphi(\sqrt{e}) \right] = \left] -\infty, \frac{1}{2e} \right]$ et une bijection (strictement décroissante) de $[\sqrt{e}, +\infty[$ sur $\left] 0, \frac{1}{2e} \right]$ (car avec les CC, $\frac{\ln x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$). On note φ_1 et φ_2 ces bijections (donc $\varphi_1 : \begin{matrix}]0, \sqrt{e}] \longrightarrow \left] -\infty, \frac{1}{2e} \right] \\ x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2} \end{matrix}$ et idem pour φ_2). Si $n \geq 6$, on a $\frac{1}{n} < \frac{1}{2e}$ ainsi $\frac{1}{n} \in \left] -\infty, \frac{1}{2e} \right]$ et $a_n = \varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ et de même $b_n = \varphi_2^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

C'est maintenant que tout est plus simple. En effet φ_1 est croissante, puisque $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ on a $\varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = a_{n+1} < \varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$. La suite $(a_n)_{n \geq 6}$ est donc croissante. De la même manière $(b_n)_{n \geq 6}$ est croissante.

On sait que φ_1^{-1} est continue, et la résolution de $\varphi_1(x) = \frac{\ln x}{x^2} = 1$ donne $x = 1 = \varphi_1^{-1}(0)$. Puisque

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \varphi_1^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \varphi_1^{-1}(0) = 1$$

on en déduit (c'est le critère séquentiel sur les limites) que $\varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Pour la suite $(b_n)_{n \leq 6}$, on sait que $\varphi_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\varphi_2^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ (si $\lim_{x \rightarrow a} \varphi_2(x) = b$ alors $\lim_{u \rightarrow b} \varphi_2^{-1}(u) = a$) donc (toujours par ce que l'on nommera critère séquentiel) on a

$$b_n = \varphi_2^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Enfin, pour l'équivalent, on sait que φ_1 est dérivable en $x = 1$ de dérivée égale à $\varphi_1'(1) = 1$ donc

$$\varphi_1^{-1} \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } (\varphi_1^{-1})'(0) = \frac{1}{\varphi_1'(1)} = 1$$

Mais alors φ_1^{-1} admet un DL₁(1) de la forme

$$\varphi_1^{-1}(x) = \varphi_1^{-1}(0) + x(\varphi_1^{-1})'(0) + o_{x \rightarrow 0}(x) = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

d'où

$$a_n = \varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ce qui donne } a_n - 1 \sim \frac{1}{n}$$

Exercice de khôlle 435

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n e^{\sqrt{u_n}} = \sqrt{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1. Justifier l'existence de la suite.
2. Quelle est la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? En déduire sa nature et sa limite éventuelle.
3. Donner un équivalent de u_n .

Solution :

- On pose $f_n(x) = xe^{\sqrt{x}} - \sqrt{n}$ qui est définie sur $[0, +\infty[$ strictement croissante (sa dérivée est $e^{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}e^x}{2} > 0$) donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\left[f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n\right] = [-\sqrt{n}, +\infty[$ qui contient bien 0. Il existe donc un unique u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

- On a

$$f_{n+1}(u_n) = f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$$

donc par stricte croissance de f_{n+1} , on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

Si elle converge, soit ℓ sa limite alors $\ell \geq 0$ (car $u_n \geq 0$) et par continuité de $x \mapsto xe^{\sqrt{x}}$ sur $[0, +\infty[$ (donc en ℓ), on a $u_n e^{\sqrt{u_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell e^{\sqrt{\ell}}$. Mais $u_n e^{\sqrt{u_n}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, absurde!

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

- Pour l'équivalent, on écrit que $u_n e^{\sqrt{u_n}} = \sqrt{n}$ d'où, en passant au $\ln$:

$$\ln(u_n) + \sqrt{u_n} = \frac{1}{2} \ln(n)$$

Par les CC, on a $\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(\sqrt{x})$, donc puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $\ln(u_n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{u_n})$ d'où

$$\ln(u_n) + \sqrt{u_n} \sim \sqrt{u_n} \text{ et ainsi } \sqrt{u_n} \sim \frac{1}{2} \ln(n)$$

On peut élever au carré pour avoir

$$u_n \sim \frac{\ln^2(n)}{4}$$

Exercice de khôlle 436

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, montrer qu'il existe un unique $u_n \geq 1$ solution de $x^n - x = n$.
- Montrer que : $\forall n \geq 2$, $n^{\frac{2}{n}} \leq n$ et en déduire la limite ℓ de u_n .
- Donner un équivalent de $v_n = u_n - \ell$.

Solution :

- On pose $f_n(x) = x^n - x - n$ et on étudie f_n qui est dérivable sur $[1, +\infty[$ avec $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 > 0$ (car $n \geq 2$ et $x \geq 1$) donc réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-n, +\infty[$. Ainsi u_n existe et est unique.
- Puisque $n^{\frac{2}{n}} > 0$, cela revient à montrer que $1 \leq \frac{n}{n^{\frac{2}{n}}} = n^{1-\frac{2}{n}} = n^{\frac{n-2}{n}}$ ce qui est vrai car $1 < n$ et $\frac{n-2}{n} \geq 0$ (si vous avez un doute, en passant au $\ln$, cela revient à $\frac{n-2}{n} \ln n \geq 0$ ce qui est vrai). On en déduit que $-n^{\frac{2}{n}} \geq -n$ et ainsi

$$f_n\left(n^{\frac{2}{n}}\right) = n^2 - n^{\frac{2}{n}} - n \geq n^2 - 2n = n(n-2) \geq 0 = f_n(u_n)$$

Ainsi par stricte croissance de f_n

$$u_n \leq n^{\frac{2}{n}}$$

Or $n^{\frac{2}{n}} = \exp\left(\frac{2}{n} \ln(n)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (car $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par les CC et $\exp$ est continue en 0), on a alors

$$1 \leq u_n \leq n^{\frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ donc } \lim u_n = 1$$

3. On a $u_n = 1 + v_n$ avec $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ainsi

$$\ln(u_n^n) = n \ln(u_n) = n \ln(1 + v_n) \sim n v_n \text{ car } \ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

mais

$$\ln(u_n^n) = \ln(n + u_n) \sim \ln n \text{ car } n + u_n \sim n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ainsi

$$n v_n \sim \ln(n) \text{ d'où } v_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

Exercice de khôlle 437

Soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ pour $n \geq 1$.

- Montrer que il existe, dans $[0, 1]$, un unique u_n tel que $f_n(u_n) = 1$. Que vaut u_2 ?
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[, f_n(x) + \ln(1 - x) = - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt$.
- En déduire que $f_n(u_n) + \ln(1 - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donner alors la valeur de $\lim u_n$.

Solution :

- La fonction f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ car elle y est dérivable (polynôme) avec $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} \geq 1$ sur $[0, 1]$. Elle réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$. Puisque $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq 1$, il existe un unique $u_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(u_n) = 1$. En fait $u_n \in]0, 1[$ si $n \geq 2$.
Enfin, $f_2(x) = x + \frac{x^2}{2}$, une simple résolution d'une équation du second degré donne $u_2 = \sqrt{3} - 1$.
- On a $f_{n+1}(u_n) - 1 = f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = \frac{u_n^{n+1}}{n+1} > 0$ donc $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$ et par stricte croissance de f_{n+1} il en découle que $u_n \geq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante, minorée par 0 donc converge. On note ℓ sa limite.
- On a, pour $t \in [0, 1[$ on a $f'_n(t) = \sum_{k=1}^n t^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j = \frac{1 - t^n}{1 - t} = \frac{1}{1 - t} - \frac{t^n}{1 - t}$. Mais avec $f_n(0) = 0$ et par linéarité de l'intégration,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f_n(0) + \int_0^x f'_n(t) dt = \int_0^x f'_n(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1 - t} - \int_0^x \frac{t^n dt}{1 - t} \\ &= [-\ln(1 - t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n dt}{1 - t} = -\ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n dt}{1 - t} \end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.

4. On en déduit que (puisque $0 \leq u_n < 1$)

$$\begin{aligned} |f_n(u_n) + \ln(1 - u_n)| &= \left| \int_0^{u_n} \frac{t^n dt}{1 - t} \right| = \int_0^{u_n} \frac{t^n dt}{1 - t} \\ \text{car pour } t &\in [0, 1[, 0 \leq \frac{t^n}{1 - t} \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que $\int_0^{u_n} \frac{t^n dt}{1-t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par décroissance de u_n , on a pour $n \geq 2$, $u_n \leq u_2 < 1$ et ainsi

$$0 \leq \int_0^{u_n} \frac{t^n dt}{1-t} = \int_0^{u_2} \frac{t^n dt}{1-t} - \underbrace{\int_{u_n}^{u_2} \frac{t^n dt}{1-t}}_{\geq 0} \leq \int_0^{u_2} \frac{t^n dt}{1-t}$$

Mais si $t \in [0, u_2]$, on a $1-t \geq 1-u_2 = \sqrt{3} > 0$ d'où $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ et on en déduit que

$$\forall t \in [0, u_2], \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{\sqrt{3}}$$

ce qui donne alors

$$\int_0^{u_2} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \int_0^{u_2} \frac{t^n dt}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{u_2} t^n dt = \frac{1}{n+1} \frac{u_2^{n+1}}{\sqrt{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } u_2 \in [0, 1[$$

Conclusion $\int_0^{u_n} \frac{t^n dt}{1-t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $|f_n(u_n) + \ln(1-u_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Mais puisque $f_n(u_n) = 1$, on a

$$\ln(1-u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$$

par continuité de l'exponentielle, $1-u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$ d'où $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1-e^{-1}$.

Exercice de khôlle 438

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1+nx) - \frac{1}{x}$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n > 0$.
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n)$.
3. En déduire la monotonie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis qu'elle converge. On notera ℓ sa limite.
4. Montrer que $\ell = 0$.

Solution :

1. La fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'_n(x) = \frac{n}{1+nx} + \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x^2} > 0$. Ainsi f_n est strictement croissante, continue sur $]0, +\infty[$ donc réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[=]-\infty, +\infty[$. En particulier, il existe un unique $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. On a $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = \ln(1+(n+1)u_n) - \frac{1}{u_n} - \ln(1+nu_n) + \frac{1}{u_n} = \ln\left(\frac{1+(n+1)u_n}{1+nu_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+nu_n}\right) > \ln(1) = 0$ car $\frac{1}{1+nu_n} > 0$.
3. Puisque $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Par stricte croissance, cela implique que $u_n > u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, minorée par 0 donc converge.
4. On a $u_n \geq 0$ donc $\ell \geq 0$. Si $\ell \neq 0$ alors $1+nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et ainsi $\ln(1+nu_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Mais $\ln(1+nu_n) = \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$ (on a supposé $\ell \neq 0$), absurde ! Conclusion $\ell = 0$.

Exercice de khôlle 439

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Justifier qu'il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on déterminera le signe de $f_{n+1}(u_n)$).
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
4. Donner un équivalent de u_n .

Solution :

1. La fonction f_n est dérivable (elle est polynomiale) sur $\mathbb{R}$ avec $f'_n(x) = 5x^4 + n > 0$ si $x \neq 0$ (et même sur $\mathbb{R}$ dès que $n \geq 1$). Ainsi f_n est strictement croissante, continue, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (car $f_n(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^5$ donne les limites aux bords). Ceci prouve l'existence et l'unicité de u_n .
2. On a $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 - (u_n^5 + nu_n - 1) = u_n$. Or $f_n(0) = -1 < f_n(u_n) = 0$ donc par stricte croissance de f_n , on a $0 \leq u_n$ (ce qui, au passage, montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée).
On a donc $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = f_{n+1}(u_n) - 0 = f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Par stricte croissance de f_{n+1} , on en déduit que

$$u_n \geq u_{n+1}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Par le TLM ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée), $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit ℓ sa limite, puisque

$$u_n^5 - 1 = -nu_n \text{ on a } u_n = \frac{1 - u_n^5}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } 1 - u_n^5 \text{ est bornée et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Conclusion $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque : En fait, on a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} \geq 0$ donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, ce qui donne aussi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. On a donc

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times (-u_n^5) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ car } \varepsilon_n = -u_n^5 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

conclusion $u_n \sim \frac{1}{n}$. Et on a même

$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^5}{n} \sim -\frac{1}{n^6}$$

Exercice de khôlle 440

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > -1$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_-, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.
5. Déterminer la limite ℓ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
6. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Solution : La fonction f_n est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 0]$.

1. Pour $x \in]-\infty, 0[$, on a $f'_n(x) = 1 - \frac{e^x}{n} > 0$ car si $x \leq 0$, on a $e^x < 1$ d'où $\frac{e^x}{n} < \frac{1}{n} \leq 1$. Ainsi f_n est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x), f_n(0) \right[= \left] -\infty, 1 - \frac{1}{n} \right[$.
Puisque $n \geq 1$, on a $1 - \frac{1}{n} \geq 0$, ainsi $0 \in \left] -\infty, 1 - \frac{1}{n} \right[$. Il existe donc un unique $u_n \in]-\infty, 0]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. On a $f_n(-1) = -\frac{e^{-1}}{n} < 0 = f_n(u_n)$, par stricte croissance de f_n , on en déduit que $-1 < u_n$.
3. Pour $x \leq 0$ on a

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(x + 1 - \frac{e^x}{n+1}\right) - \left(x + 1 - \frac{e^x}{n}\right) = e^x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{e^x}{n(n+1)} > 0$$

4. On a donc (avec $f_n(u_n) = f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$)

$$f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n) = 0 \text{ ainsi } f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$$

et par stricte croissance de f_{n+1} , on en déduit que $u_n > u_{n+1}$. La suite est décroissante, minorée par -1 donc converge.

5. Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. On sait que $f_n(u_n) = u_n + 1 - \frac{e^{u_n}}{n} = 0$ donc $f_n(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or

$$\begin{aligned} u_n + 1 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell, \quad e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell \text{ (continuité de exp)} \\ \frac{1}{n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ par produit } \frac{e^{u_n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

d'où

$$f_n(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + 1$$

Par unicité de la limite, on a $\ell + 1 = 0$ donc $\ell = -1$.

6. Simple car $u_n - \ell = u_n + 1 = \frac{e^{u_n}}{n} \sim \frac{e^{-1}}{n} = \frac{1}{ne}$.

En fait, on peut même aller plus loin. Posons $v_n = u_n + 1 - \frac{1}{ne}$ alors

$$v_n = \frac{e^{u_n}}{n} - \frac{1}{ne} = \frac{1}{ne} (e^{1+u_n} - 1) \underset{(1+u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0)}{\sim} \frac{1+u_n}{ne} \sim \frac{\frac{1}{ne}}{ne} = \frac{1}{n^2 e^2}$$

Bref, on a

$$u_n = -1 + \frac{1}{ne} + \frac{1}{n^2 e^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice de khôlle 441

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left[2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$.

1. Montrer que l'équation $\sin(x) = e^{-x}$ admet une unique solution, notée x_n , dans l'intervalle I_n .
2. Etudier la monotonie et la nature de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Donner un équivalent, noté u_n de x .
4. (★) Puis donner un équivalent de $v_n = x_n - u_n$.

Solution : On pose $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$ qui est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \cos(x) + e^{-x}$.

1. Sur $I_n = \left[2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, on a $\cos(x) \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, ainsi $f' > 0$ sur I_n . Puisque f est continue, strictement croissante sur I_n , on en déduit que f réalise une bijection de I_n sur $\left[f(2n\pi), f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] = \left[-e^{-2n\pi}, 1 - e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right]$. Mais, $e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} < 1$ donc $0 \in \left[-e^{-2n\pi}, 1 - e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right]$ donc admet un unique antécédent noté x_n .
2. Par définition $x_n \in I_n$ et $x_{n+1} \in I_{n+1}$ donc

$$2n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi < 2(n+1)\pi \leq x_{n+1}$$

La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante. De $2n\pi \leq x_n$ on déduit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ car $2n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3. On a

$$2n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

donc $x_n \sim 2n\pi$ (car $1 \leq \frac{x_n}{2n\pi} \leq \frac{\pi}{4n\pi} + 1$ et par le théorème d'encadrement). On pose donc $u_n = x_n - 2n\pi$.

4. On a donc $v_n = x_n - u_n = x_n - 2n\pi$. Par définition de x_n , on a

$$x_n \in I_n \text{ d'où } v_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin(x_n) = \sin(v_n + 2n\pi) = \sin(v_n) = e^{-x_n}$$

Ceci permet d'affirmer que (puisque v_n est dans l'intervalle fondamental du sinus)

$$v_n = \arcsin(\sin v_n) = \arcsin(e^{-x_n})$$

Puisque $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $e^{-x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $v_n \sim e^{-x_n}$ (car $\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$). Attention, on ne peut pas écrire que $e^{-x_n} \sim e^{-2n\pi}$, on ne compose pas les équivalents par l'exponentielle! En revanche

$$e^{-x_n} = e^{-(v_n + 2n\pi)} = e^{-2n\pi} \times e^{-v_n}$$

et puisque $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par continuité de l'exponentielle en 0, on a $e^{-v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc

$$\frac{e^{-x_n}}{e^{-2n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \text{ ce qui prouve que } e^{-x_n} \sim e^{-2n\pi}$$

Conclusion

$$x_n = 2n\pi + e^{-2n\pi} + o_{n \rightarrow +\infty}(e^{-2n\pi})$$

Exercice de khôlle 442

Pour $n \geq 1$, on définit $P_n(x) = 1 - (x + x^2 + \dots + x^n)$.

1. Montrer que pour $n \geq 1$, l'équation $x + x^2 + \dots + x^n = 1$ admet, sur $]0, +\infty[$ une unique solution notée u_n .
2. Déterminer la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis sa nature.
3. Déterminer ℓ la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. (★) Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Solution : Résoudre $x + x^2 + \dots + x^n = 1$ équivaut à chercher x solution (racine) de $P_n(x) = 0$.

1. La fonction P_n est polynômiale donc continue, dérivable sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est $P'_n(x) = -1 - 2x - 3x^2 - \dots - nx^{n-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k < 0$ si $x > 0$. Ainsi P_n est continue, strictement décroissante donc réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left]P_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x)\right[=]1, -\infty[$ (car $P_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^n$). Puisque $0 \in]1, -\infty[$, le réel 0 a un unique antécédent noté $u_n > 0$.

2. On a

$$P_{n+1}(u_n) \underset{P_n(u_n)=0}{=} P_{n+1}(u_n) - P_n(u_n) = -u_n^{n+1} < 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$$

Par stricte décroissance de P_{n+1} , on en déduit que $u_n \geq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

Remarque : Il est clair que $u_1 = 1$ et u_2 est l'unique solution positive de $1 = x + x^2$, donc $u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618 \dots$. Tout est bien cohérent.

3. Soit ℓ la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par décroissance on a $0 < u_n \leq u_2 < 1$ donc par PAL, $0 \leq \ell < 1$. On sait que

$$1 = u_n + u_n^2 + \dots + u_n^n \text{ donc } 2 = 1 + u_n + u_n^2 + \dots + u_n^n = \frac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n}$$

$$\text{ce qui donne } 2(1 - u_n) = 1 - u_n^{n+1}$$

Puisque $0 \leq u_n \leq u_2$ on a $0 \leq u_n^{n+1} \leq u_2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $0 \leq u_2 < 1$). On a donc $u_n^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Un PAL donne

$$2(1 - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2(1 - \ell) \text{ et } 1 - u_n^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et par unicité de la limite $2(1 - \ell) = 1$ d'où $\ell = \frac{1}{2}$.

Remarque : On peut calculer $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} > 0$ ce qui prouve que $\frac{1}{2} \leq u_n$, ouf c'est cohérent !

4. On a vu que $2(1 - u_n) = 1 - u_n^{n+1}$, ainsi

$$u_n = 1 - \frac{1 - u_n^{n+1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{u_n^{n+1}}{2}$$

La question qui se pose alors est : Puisque $u_n \sim \frac{1}{2}$, a-t-on $u_n^{n+1} \sim \frac{1}{2^{n+1}}$ (rien dans le cours ne permet de l'affirmer). Mais

$$u_n^{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{u_n^{n+1}}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \times (1 + u_n^{n+1})^{n+1}$$

(Attention $(1 + u_n^{n+1})^{n+1}$ est une FI de la forme $1^{+\infty}$). Puis $(1 + u_n^{n+1})^{n+1} = \exp((n+1) \ln(1 + u_n^{n+1}))$. On sait que donc $u_n^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où

$$(n+1) \ln(1 + u_n^{n+1}) \sim (n+1) u_n^{n+1}$$

Puis $0 \leq u_n^{n+1} \leq u_2^{n+1}$ donne $0 \leq (n+1) u_n^{n+1} \leq (n+1) u_2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par les croissances comparées ($n^\alpha q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q \in]-1, 1[$). Par continuité de la fonction exponentielle

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + u_n^{n+1})^{n+1} = 1 \text{ d'où } u_n^{n+1} \sim \frac{1}{2^{n+1}}$$

et ainsi

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Exercice de khôlle 443

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique u_n solution de $x^n = \cos(x)$ sur $[0, 1]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite ℓ .
3. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Solution : Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^n - \cos(x)$ qui est définie, continue et dérivable sur $[0, 1]$.

1. Pour $x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = nx^{n-1} + \sin x$. Puisque $]0, 1] \subset]0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\sin x > 0$ sur $]0, 1]$, ainsi (il est clair que $x^n > 0$ sur $]0, 1]$), $f'_n > 0$ sur $]0, 1]$. On en déduit que f_n est bien continue, strictement croissante sur $[0, 1]$ donc réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$. Avec $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1 - \cos(1) < 0$ (car $1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$), on peut affirmer 0 a un unique antécédent noté u_n dans $]0, 1[$.
2. On écrit que $f_{n+1}(u_n) = f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = u_n^{n+1} - u_n^n = u_n^n(u_n - 1) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ (car $u_n \in]0, 1[$). Par stricte croissance de f_{n+1} sur $[0, 1]$, on a $u_n \leq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante. Elle est majorée par 1 donc converge. Soit ℓ sa limite. Si $\ell < 1$ alors, $\forall n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \ell$ d'où $0 \leq u_n^n \leq \ell^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et ainsi $u_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Puis on écrit que

$$\begin{aligned} f_n(u_n) &= u_n^n - \cos(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 - \cos(\ell) \\ f_n(u_n) &= 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

(car $\cos$ est continue en ℓ et par le critère séquentiel, $\cos(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(\ell)$). Par unicité de la limite, on en déduit que $\cos \ell = 0$. Absurde car $0 \leq u_n \leq 1$ donc PAL, $0 \leq \ell \leq 1$. Conclusion $\ell = 1$.

3. Mais alors, si on passe au $\ln$ dans l'égalité $u_n^n = \cos(u_n)$ (ce qui est possible car $u_n > 0$ et $\cos u_n \geq \cos 1 > 0$), on obtient

$$\ln(u_n) = \frac{\ln \cos(u_n)}{n} \sim \frac{\ln(\cos(1))}{n} \quad (\text{par continuité du } \cos \text{ en } 1, \cos u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos 1)$$

Pour finir $\ln(u_n) = \ln(1 + (u_n - 1)) \sim u_n - 1$ car $u_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où

$$u_n - 1 \sim \frac{\ln(\cos(1))}{n}$$

On a donc le DA, $u_n = 1 + \frac{\ln(\cos(1))}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice de khôlle 444

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique u_n solution de $x\sqrt{1 + \frac{x}{n}} = 1$ sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite ℓ .
3. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Solution : Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x\sqrt{1 + \frac{x}{n}} - 1$ qui est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$.

1. La fonction f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (soit par composition et produit de fonctions croissantes et **positives**, soit parce qu'elle est dérivable avec $f'_n(x) = \sqrt{1 + \frac{x}{n}} + \frac{x}{2n\sqrt{1 + \frac{x}{n}}} \geq 1$ sur $[0, +\infty[$). Elle est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\left[f_n(0), \lim_{+\infty} f_n\right] = [-1, +\infty[$ qui contient 0. Bref 0 a un unique antécédent que l'on note u_n . Et on a $u_n \in]0, +\infty[$

2. On écrit que

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(u_n) &= f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = u_n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n+1}} - u_n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} \\
 &= u_n \left(\sqrt{1 + \frac{u_n}{n+1}} - \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} \right) \\
 &= \frac{u_n}{\sqrt{1 + \frac{u_n}{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}}} \left(\left(1 + \frac{u_n}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{u_n}{n}\right) \right) \\
 &= -\frac{u_n}{n(n+1) \sqrt{1 + \frac{u_n}{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}}} < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})
 \end{aligned}$$

Par stricte croissance de f_{n+1} , on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$.

Remarque : Pour le signe de $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n)$, on peut aussi écrire que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $\frac{u_n}{n+1} \leq \frac{u_n}{n}$ (car $u_n > 0$) puis $\sqrt{1 + \frac{u_n}{n+1}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}}$ (croissance de $x \mapsto \sqrt{1+x}$) et on remultiplie par $u_n > 0 \dots$.

Reste à montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien majorée. Mais, $f_n(1) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 > 0$ donc $u_n \leq 1$. Conclusion par le TLM, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée, elle converge. Si ℓ est sa limite, alors $\ell \leq 1$ (PAL sur $u_n \leq 1$).

Pour finir, on a $f_n(u_n) = u_n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} - 1 = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Mais $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$), par continuité de $\sqrt{\cdot}$, on a $\sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et

$$u_n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - 1$$

Par unicité de la limite, $\ell = 1$.

3. Puisque $\sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} = 1$, on a

$$u_n - 1 = u_n - u_n \sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} = -u_n \left(\sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} - 1 \right)$$

Mais $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sqrt{1 + \frac{u_n}{n}} - 1 \sim \frac{u_n}{2n} \sim \frac{1}{2n}$. On en déduit que

$$u_n - 1 \sim -\frac{1}{2n}$$

car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \iff u_n \sim 1$. Ce qui donne le DA $u_n = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ (le $-$ devant $\frac{1}{2n}$ nous rassure, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante de limite égale à 1).

Remarque : On peut aussi écrire que $\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) = \frac{1}{u_n^2}$ d'où

$$u_n = n \left(\frac{1}{u_n^2} - 1 \right) = n \left(\frac{1 - u_n^2}{u_n^2} \right) = \frac{n(1 + u_n)}{u_n^2} (1 - u_n)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 u_n - 1 &= -\frac{u_n^3}{n(1 + u_n)} \text{ (qui donne bien } u_n - 1 \sim -\frac{1}{2n} \text{)} \\
 u_n - 1 + \frac{1}{2n} &= -\frac{u_n^3}{n(1 + u_n)} + \frac{1}{2n} = \frac{1 + u_n - 2u_n^3}{2n(1 + u_n)}
 \end{aligned}$$

On remarque que 1 est racine de $1 + X - 2X^3$ (ce qui est nécessaire, car avec un PAL quand n tend vers l'infini, on doit obtenir 0). Après factorisation, on a

$$u_n - 1 + \frac{1}{2n} = -\frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2(1 + u_n)} \times \frac{u_n - 1}{n} \sim -\frac{2 + 2 + 1}{2 \times 2} \times \frac{-\frac{1}{2n}}{n} = \frac{5}{8n^2}$$

d'où

$$u_n = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{5}{8n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

13.5 Adjacentes, ensembles, ils convergent

Exercice de khôlle 445

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

sont convergentes. Comment obtenir une valeur approchée de la limite à 10^{-5} près ?

Solution : On pense aux suites adjacentes. On a

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \right) + \frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} \geq 0, \text{ la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} \\ &= \frac{1 + n^2 - (n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} = -\frac{2}{n(n+1)^2} \leq 0, \text{ la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes donc par le théorème des suites adjacentes convergent vers la même limite. Soit ℓ la limite, on sait que

$$u_n \leq \ell \leq v_n$$

d'où

$$0 \leq u_n - \ell \leq v_n - u_n = \frac{1}{3n^2} \text{ et } 0 \leq v_n - \ell \leq v_n - u_n = \frac{1}{3n^2}$$

Si $\frac{1}{3n^2} \leq 10^{-5}$ i.e. $n \geq \sqrt{\frac{10^5}{3}} = 10^2 \times \sqrt{\frac{10}{3}}$ (soit $n \geq 183$) on est sûr que u_n est une valeur approchée par défaut, que v_n en est une par excès à 10^{-5} près.

Remarque : Cette limite peut être calculée (c'est plus dur) et vaut : $\frac{\pi^2}{3} - 3 \simeq 0.28987$.

On peut montrer que $\zeta(2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Comment en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$?

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2(X+1)^2}$ est

$$\frac{1}{X^2(X+1)^2} = \frac{1}{X^2} - \frac{2}{X} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{2}{X+1}$$

On en tire

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=2 \\ j=k+2}}^n \frac{1}{j^2} + \overbrace{\sum_{\substack{j=2 \\ j=k+1}}^n \frac{2}{j} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}}^{\text{somme telescopique}} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{2}{n} - 2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} - 3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(2) - 3. \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 446

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ et $u_n = S_{2n}$, $v_n = S_{2n+1}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de $(S_n)_n$.

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \end{aligned}$$

la suite $(u_n)_n$ est donc décroissante.

Puis

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \end{aligned}$$

la suite $(v_n)_n$ est croissante.

Enfin $v_n - u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, les deux suites sont donc adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, que l'on note ℓ .

2. On en déduit que la suite $(S_n)_n$ converge aussi vers ℓ , en effet, on a le résultat suivant du cours :
 Soit $(S_n)_n$ une suite réelle telle que les deux suites extraites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ convergent vers la **même** limite ℓ , alors $(S_n)_n$ converge vers ℓ .

Exercice de khôlle 447

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Solution : On montre qu'elles sont adjacentes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_n - u_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ (avec } \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}})$$

Ainsi $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $v_n - u_n > 0$ donc on s'attend à avoir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissante (et l'autre décroissante).

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$

Mais, puisque $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$ on a

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} \\ \text{d'où } \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

puis

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

et ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

De même

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ car $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$ et ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Les suites sont bien adjacentes.

Exercice de khôlle 448

On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \end{aligned}$$

1. Montrer que ces deux suites sont parfaitement définies et à termes strictement positifs.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}})} (v_n - u_n)$$

3. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ et en déduire la limite de $v_n - u_n$.
5. Montrer que les deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Solution :

1. Par récurrence, soit $\mathcal{P}(n) = \ll u_n \text{ et } v_n \text{ existent et sont strictement positifs} \gg$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } u_{n+1} > 0 \\ u_{n+1}v_n &> 0 \text{ donc } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \text{ existe et } v_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \sqrt{u_{n+1}v_n} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_{n+1}}) \\ &= \sqrt{u_{n+1}} \frac{v_n - u_{n+1}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}} \text{ (avec } \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}) \\ &= \sqrt{u_{n+1}} \frac{v_n - \frac{u_n + v_n}{2}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}} = \sqrt{u_{n+1}} \frac{v_n - u_n}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}})} \end{aligned}$$

3. Par récurrence, si $\mathcal{P}(n) = \ll u_n \leq v_n \gg$ alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $1 \leq 3$ puis

$$\frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}})} \geq 0 \text{ et } v_n - u_n \geq 0 \text{ par HR}_n$$

d'où $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$ ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

4. Enfin $0 < \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ d'où

$$\frac{1}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}$$

et $(\frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2} > 0)$

$$\frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}})} \leq \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

En multipliant par $v_n - u_n \geq 0$ on obtient

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}})} (v_n - u_n) \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

Et on n'oublie pas que $v_{n+1} \geq u_{n+1}$ d'où $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$.

Pour conclure, on montre alors par récurrence que $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Remarque : On peut aussi faire dans le futé. Si on pose $w_n = 2^n(v_n - u_n)$ alors

$$w_{n+1} = 2^{n+1}(v_{n+1} - u_{n+1}) \leq 2^{n+1} \times \frac{v_n - u_n}{2} = w_n$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante d'où $w_n \leq w_0 = v_0 - u_0$ ce qui donne

$$2^n (v_n - u_n) \leq v_0 - u_0 \text{ et ainsi } v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (v_0 - u_0)$$

5. Reste à montrer la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0 \text{ d'où la croissance de } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ v_{n+1} - v_n &= \sqrt{u_{n+1} v_n} - v_n = \sqrt{v_n} (\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{v_n}) \end{aligned}$$

Mais

$$u_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = -\frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$$

d'où $0 < u_{n+1} \leq v_n$ et par croissance de $\sqrt{\cdot}$, on a $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{v_n}$ ce qui donne

$$v_{n+1} - v_n \leq 0$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, les deux suites sont adjacentes donc convergent vers la même limite ℓ .

Remarque : Par PAL dans $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$ on obtient $\ell = \ell$ et $\ell = \sqrt{\ell^2} = \ell$, on ne peut donc pas calculer la valeur de cette limite.

Exercice de khôlle 449

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Montrer que pour $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$. Puis en déduire que si $x \in]-\infty, 1[$, on a $x \leq -\ln(1-x)$.
3. Justifier que pour $n \geq 1$,

$$u_n \leq \ln 2 \leq v_n$$

Que peut-on en déduire ?

4. Soit $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, quelle est la limite de w_n ?

Solution :

1. Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0 \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Puis $v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{2n}$ d'où $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Elles sont donc adjacentes.

- Simple inégalité de convexité, ou bien une étude de $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$ (qui a un minimum en $x=0$) montre l'inégalité. Puis, si $x < 1$, la première inégalité appliquée à $-x > -1$ donne $\ln(1-x) \leq -x$. En multipliant par -1 , on en déduit la seconde.
- On a donc pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \text{ car } -1 < 0 < \frac{1}{k}$$

$$\text{et pour } k \geq 2, \frac{1}{k} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \text{ car } \frac{1}{k} < 1$$

Ainsi, pour $n \geq 1$ et $k \geq n+1 \geq 2$

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) - \ln(k-1) = \ln(2n) - \ln n = \ln 2$$

et

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

$$\text{et (encore un pirate)} \sum_{k=n}^{2n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{2n-1} \ln(k+1) - \ln k = \ln(2n) - \ln(n) = \ln 2.$$

Ceci prouve que $u_n \leq \ln 2 \leq v_n$. Par le théorème des suites adjacentes, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ℓ . Par PAL dans $u_n \leq \ln 2 \leq v_n$, on a $\ell \leq \ln(2) \leq \ell$ d'où $\ell = \ln 2$.

- Un simple changement d'indice ($j = n+k$) montre que $w_n = u_n$ donc $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$.

Exercice de khôlle 450

On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$0 < u_0 < v_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$$

- Etudier la convergence de ces deux suites.
- On pose $\alpha = \arccos\left(\frac{u_0}{v_0}\right)$, déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution : Avant tout, on montre que ces deux suites sont définies. Par récurrence, soit $\mathcal{P}(n) = \ll u_n \text{ et } v_n \text{ existent et sont strictement positifs} \gg$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } u_{n+1} > 0$$

$$u_{n+1}v_n > 0 \text{ donc } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \text{ existe et } v_{n+1} > 0$$

- On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_{n+1}v_n} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{v_n})$$

Mais

$$u_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = -\frac{v_n - u_n}{2}$$

Donc le signe de $v_n - u_n$ donne les monotonies. On a $v_0 - u_0 > 0$, montrons par récurrence que $v_n - u_n > 0$. C'est vrai au rang 0, puis $v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_{n+1}}) = \sqrt{u_{n+1}} \frac{v_n - u_{n+1}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}}$ (car $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$). Ainsi

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}} \left(v_n - \frac{u_n + v_n}{2} \right) = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}} \times \frac{v_n - u_n}{2}$$

est du signe de $v_n - u_n$. Ceci prouve l'hérédité. Conclusion $v_n - u_n > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On est alors tenté de montrer que $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (c'est fait dans un autre exo de khôlles où l'approche est différente). Mais on vient de montrer que pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_0 \underset{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow}{\leq} u_n \leq v_n \underset{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow}{\leq} v_0$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 , elle converge. De même $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 , elle converge. Soit $\ell_u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell_v = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$$

or par suite extraite, $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_u$. Par unicité de la limite, on a $\ell_u = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$ ce qui donne $\ell_u = \ell_v$. Les deux suites convergent vers la même limite (et donc $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et elles sont bien adjacentes!).

2. On donc $u_0 = v_0 \cos(\alpha)$, calculons u_1 et v_1 , pour se donner une idée. On a

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u_0 + v_0}{2} = v_0 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) \text{ or } \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \text{ d'où } u_1 = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 \\ v_1 &= \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0^2} = \left| \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 \right| = \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 \text{ (car } \frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ et } v_0 > 0) \end{aligned}$$

Pour se rassurer, on calcule u_2 et v_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 + \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 \right) = \frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{4} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 \\ v_2 &= \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha}{4} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 \times \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0} = \cos \left(\frac{\alpha}{4} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) v_0 \end{aligned}$$

Par récurrence on montre que pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_n &= v_0 \cos \left(\frac{\alpha}{2^n} \right) \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{\alpha}{2^k} \right) \text{ et } v_n = v_0 \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{\alpha}{2^k} \right) \\ \text{et ainsi } u_n &= \cos \left(\frac{\alpha}{2^n} \right) v_n \end{aligned}$$

C'est vrai au rang 0, puis

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1 + \cos \left(\frac{\alpha}{2^n} \right)}{2} v_n = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) v_n = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) v_n \\ v_{n+1} &= \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) v_n^2} = \cos \left(\frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) v_n = \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) v_n \times v_0 \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{\alpha}{2^k} \right) = v_0 \prod_{k=1}^{n+1} \cos \left(\frac{\alpha}{2^k} \right) \\ \text{et ainsi } u_{n+1} &= \cos \left(\frac{\alpha}{2^{n+1}} \right) v_{n+1} \end{aligned}$$

On se souvient alors d'un exercice type. Si on pose $c_n = \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$ alors

$$c_n = \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{\alpha}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = \frac{c_{n-1}}{2}$$

Ainsi $c_n = \frac{c_1}{2^{n-1}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha}{2^{n-1}} = \frac{\sin \alpha}{2^n}$ d'où (puisque $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \neq 0$)

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = \frac{c_n}{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \sim \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

car $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $u = \frac{\alpha}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On en déduit que

$$v_n = v_0 \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \times v_0$$

et que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \times v_0$ également ouf! En particulier avec $v_0 = 1$, les deux suites convergent vers $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ et permet un calcul rapide de $\sin \alpha$ (en considérant αu_n !).

CHAPITRE 14

LIMITES ET CONTINUITÉ.

14.1 Le critère séquentiel en action

Exercice de khôlle 451

Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^{\sqrt{x}}}$$

Montrer que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Solution : Soit $u_n = n^2$ et $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ qui sont deux suites qui divergent vers $+\infty$. On a

$$\lfloor u_n \rfloor = n \text{ et } \lfloor v_n \rfloor = n$$

$$\sqrt{u_n} = n \text{ d'où } \lfloor \sqrt{u_n} \rfloor = n \text{ et de même } \sqrt{v_n} = n + \frac{1}{2} \text{ et } \lfloor \sqrt{v_n} \rfloor = n$$

d'où

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{(n^2)^n}{(n^2)^n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ \text{et } f(v_n) &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n + \frac{1}{2}}} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{2n+1}} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Or si f a une limite en $+\infty$, alors $f(u_n)$ et $f(v_n)$ convergent toutes les deux vers cette limite. Ce qui est absurde. La fonction f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice de khôlle 452

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right)$, que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? En déduire f .

Solution : Il est évident que $\frac{a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la fonction f étant continue en $x = 0$, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ et ainsi (critère séquentiel)

$$u_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$$

On exploite ensuite la relation fonctionnelle sur f qui donne

$$u_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right) = f\left(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}\right) = u_{n+1} \text{ si } n \geq 1$$

La suite u est donc constante. On en déduit que

$$u_n = u_0 = f(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$$

par unicité de la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(a) = f(0)$$

La fonction f est donc constante (égale à $f(0)$!).

Remarque : Il existe d'autres fonctions (non continue en $x = 0$) qui vérifient $f(x) = f(2x)$, par exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ définie par $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice de khôlle 453

Soit f définie par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que f n'a pas de limite (finie ou infinie) en 0.

Solution : Par l'absurde, si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$ existe. On choisit bien deux suites, par exemple

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ et } v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

On a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(u_n) = 1$ donc par le critère séquentiel, $\ell = 1$. Puis $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\cos(v_n) = 0$ donne, cette fois ci, $\ell = 0$. Absurde.

Exercice de khôlle 454

Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ (dite indicatrice de $\mathbb{Q}$) définie par

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est nulle part continue.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ continue en x .

Cas ① : Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on sait qu'il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \in \mathbb{Q}$ et $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. On a alors

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$$

Ceci contredit le critère séquentiel. Absurde.

Cas ② : Si $x \in \mathbb{Q}$, idem, on sait qu'il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. On a alors

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$$

Ceci contredit le critère séquentiel. Absurde.

Exercice de khôlle 455

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\forall (r, s) \in \mathbb{Q}^2, r \leq s \implies f(r) \leq f(s)$$

On dit que la restriction de f à $\mathbb{Q}$, notée $f|_{\mathbb{Q}}$, est croissante. Montrer que f est croissante.

Solution : Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$, il s'agit de prouver que $f(x) \leq f(y)$ (car si $x = y$, on a $f(x) = f(y)$ donc $f(x) \leq f(y)$). Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe r_n et s_n dans $\mathbb{Q}$ tels que

$$x - \frac{1}{n+1} \leq r_n \leq x \leq y \leq s_n \leq s_n + \frac{1}{n+1}$$

(Rappel : la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ permet d'affirmer qu'entre deux réels, il y a toujours un rationnel). Par croissance de $f|_{\mathbb{Q}}$ on a

$$f(r_n) \leq f(s_n)$$

Par encadrement, on a $r_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ et $s_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y$. Par continuité de f en x et y (et par le critère séquentiel), on a $f(r_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ et $f(s_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(y)$. Enfin par PAL dans $f(r_n) \leq f(s_n)$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = f(x) \leq f(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(s_n)$$

Ce qui prouve la croissance de f .

Remarque : En fait, on sait que si on pose $r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $s_n = \frac{\lfloor 10^n y \rfloor + 1}{10^n}$ alors $r_n \leq x, y \leq s_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = y$. Ceci permet d'aller plus vite.

14.2 Continue ou pas ?

Exercice de khôlle 456

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

1. Montrer que f est continue.
2. Déterminer la monotonie de f , est-elle stricte ?
3. Exprimer f^{-1} .

Solution :

1. On peut aussi simplement écrire que si $x \in [p, p+1]$, où $p \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = p$ et $f(x) = p + (x - p)^2$. Ainsi f est clairement continue sur $[p, p+1[$. En particulier $\lim_{x \rightarrow p^{+-}} f(x) = p = f(p)$.

Reste à montrer la continuité à gauche en $n \in \mathbb{N}^*$ (car on a restreint f à $[0, +\infty[$). Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]p-1, p[$ on a $f(x) = (p-1) + (x - p + 1)^2 \xrightarrow[x \rightarrow p^-]{} (p-1) + (p - p + 1)^2 = p$. Puisque $f(p) = p$, on a bien

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = f(p)$$

d'où la continuité à gauche en $p \in \mathbb{N}^*$. Conclusion f est continue sur $[0, +\infty[$.

Remarque : On peut aussi écrire que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et est continue à droite en tout entier $p \in \mathbb{Z}$. Par élévation au carré et somme, f est donc continue sur $[0, +\infty[\setminus \mathbb{Z}$ et est continue à droite en tout entier $p \in \mathbb{N}$. Puis étudier la continuité à gauche en $p \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour la monotonie, soient $(x, y) \in [0, +\infty[$ tels que $x < y$. On pose $p = \lfloor x \rfloor$ et $q = \lfloor y \rfloor$. On a vu qu'alors

$$f(x) = p + (x - p)^2 \text{ et } f(y) = q + (y - q)^2$$

Ainsi

$$f(y) - f(x) = q - p + (y - q)^2 - (x - p)^2$$

Par croissance de $\lfloor \cdot \rfloor$, on a $p \leq q$. Puis

$$\begin{aligned} p &\leq x < p + 1 \text{ d'où } (x - p)^2 \in [0, 1] \text{ , et de même avec } y \text{ et } q \\ \text{Ainsi } -1 &< (y - q)^2 - (x - p)^2 < 1 \end{aligned}$$

On a deux cas :

Cas ① : Si $p < q$ alors $p \leq x < p + 1 \leq q \leq y$ d'où

$$q - p \geq 1 \text{ et } -1 < (y - q)^2 - (x - p)^2 \text{ donne } f(y) - f(x) > 0$$

Cas ② : Si $p = q$ alors

$$f(y) - f(x) = 0 + (y - p)^2 - (x - p)^2 = (y - x)((x - p) + (y - p)) > 0$$

Car $x < y$, $p \leq x$ et $p \leq x < y$ ainsi $(y - x) > 0$, $(x - p) \geq 0$ et $y - p > 0$.

Conclusion f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3. Bref, f est bien strictement croissante, continue, donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $\left[f(0), \lim_{+\infty} f \right]$. On a $f(0) = 0$. Par le TLM, f a une limite en $+\infty$. Puisque si $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc (critère séquentiel), $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (ne pas oublier qu'une fonction croissante sur $[0, +\infty[$ a toujours une limite de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ d'après le TLM). Soit $y \geq 0$, si $p = \lfloor y \rfloor$ alors $y \in [p, p + 1[$. Soit $x = f^{-1}(y)$, puisque $f(p) = p$ et $f(p + 1) = p + 1$, on a, par stricte croissance de f , $x \in [p, p + 1[$ et ainsi

$$f(x) = p + (x - p)^2 = y$$

d'où $(x - p)^2 = y - p$ et puisque $x \geq p$

$$x = p + \sqrt{y - p} = \lfloor y \rfloor + \sqrt{y - \lfloor y \rfloor}$$

Conclusion pour $y \geq 0$ on a

$$f^{-1}(y) = \lfloor y \rfloor + \sqrt{y - \lfloor y \rfloor}$$

Exercice de khôlle 457

Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. Justifier que f est continue sur l'intervalle $I_p =]p, p + 1[$.
3. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} f(x)$.
4. La fonction f est-elle continue en $x = p$?

Solution :

1. On sait que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$, ainsi $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$. Ceci assure l'existence de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Sur I_p , on a $\lfloor x \rfloor = p$ d'où $f(x) = p + \sqrt{x - p}$ qui est continue (composée et somme).

3. Pour $x \in]p-1, p[= I_{p-1}$, on a $f(x) = p-1 + \sqrt{x-(p-1)}$ d'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} (p-1 + \sqrt{x-(p-1)}) = p-1 + \sqrt{p-(p-1)} = p$$

Pour $x \in I_p$, on a $f(x) = p + \sqrt{x-p}$ d'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} (p + \sqrt{x-p}) = p + \sqrt{p-p} = p$$

Enfin $f(p) = p + \sqrt{p-p} = p$. On a bien $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = p$, ce qui prouve la continuité de f en $p \in \mathbb{Z}$.

Conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice de khôlle 458

Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = [x] + (x - [x])^2$$

- Montrer que f est continue sur $I_p =]p, p+1[$.
- En déterminant $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} f(x)$, justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Quels sont les points fixes de f ? (i.e. quels sont les réels x tels que $f(x) = x$?).
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - Si $u_0 \in \mathbb{Z}$, que dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - On suppose que $u_0 \notin \mathbb{Z}$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ où $I =]\lfloor u_0 \rfloor, \lfloor u_0 \rfloor + 1[$.
 - Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution :

- Sur I_p on a $f(x) = p + (x-p)^2$ qui est polynomiale donc continue.
- Pour $x \in]p-1, p[= I_{p-1}$, on a $f(x) = p-1 + (x-(p-1))^2$ d'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} (p-1 + (x-(p-1))^2) = p-1 + (p-(p-1))^2 = p$$

Pour $x \in I_p$, on a $f(x) = p + (x-p)^2$ d'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} (p + (x-p)^2) = p + (p-p)^2 = p$$

Enfin $f(p) = p + (p-p)^2 = p$. On a bien $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = p$, ce qui prouve la continuité de f en $p \in \mathbb{Z}$.

Conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

- Analyse : Soit x un point fixe de f alors

$$f(x) = [x] + (x - [x])^2 = x \text{ i.e. } x - [x] = (x - [x])^2$$

d'où $y = x - [x]$ vérifie $y^2 - y = y(y-1) = 0$. Puisque $[x] \leq x < [x] + 1$, on a $y \in [0, 1[$. La seule solution est donc $y = 0$ d'où $x = [x] \in \mathbb{Z}$. Synthèse, si $x \in \mathbb{Z}$, on a $f(x) = x$. Les points fixes de f sont les entiers relatifs.

4.

- (a) Si $u_0 = p \in \mathbb{Z}$ alors $f(u_0) = u_0$ d'où $u_1 = u_0$. Par récurrence on a $u_n = p$ (facile, la rédiger!).
- (b) Pour simplifier, puisque u_0 est fixé, on pose $p = \lfloor u_0 \rfloor$ qui est donc dans $\mathbb{Z}$. On rappelle que si $x \in I_p$ alors $f(x) = p + (x - p)^2$.

i. Par récurrence, on montre $\mathcal{P}(n) = \ll u_n \in]p, p+1[\gg$. C'est vrai si $n = 0$ car

$$\lfloor u_0 \rfloor = p \leq u_0 < \lfloor u_0 \rfloor + 1 = p + 1 \text{ et } \lfloor u_0 \rfloor \neq u_0 \text{ (sinon } u_0 \in \mathbb{Z})$$

Puis si $u_n \in]p, p+1[$ alors $f(u_n) = p + (u_n - p)^2$. Mais $p < u_n < p+1$ d'où $0 < u_n - p < 1$ et ainsi $0 < (u_n - p)^2 < 1$. On ajoute à cette inégalité l'entier p , ce qui donne $p < p + (u_n - p)^2 < p + 1$. Ce qui prouve l'hérédité et termine la récurrence.

- ii. On a $u_{n+1} - u_n = (u_n - \lfloor u_n \rfloor)^2 \geq 0$. La suite est donc croissante.
- iii. On conclut, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $p+1$ donc converge. Soit ℓ sa limite, par croissance (et parce que $u_0 \notin \mathbb{Z}$)

$$p < u_0 \leq u_n < p+1$$

d'où par PAL

$$p < u_0 \leq \ell \leq p+1$$

Par continuité de f , on a $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$, mais $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ (suite extraite) donc

$$\ell = f(\ell)$$

Conclusion, ℓ est un point fixe de f donc un entier. Le seul entier de $]p, p+1[$ est $p+1$ d'où

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p+1 = (u_n - p)^2 (u_n - p)^2 \lfloor u_0 \rfloor + 1$$

Exercice de khôlle 459

Soit f définie par $f(x) = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}$.

- Quel est le domaine de définition de f ?
- Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
- Déterminer les limites aux bords du domaine de définition.

Solution : Rappel $x^{\lfloor x \rfloor} = \exp(\lfloor x \rfloor \ln(x))$.

- Le numérateur $x^{\lfloor x \rfloor} = \exp(\lfloor x \rfloor \ln(x))$ est défini pour $x > 0$. Et si $x > 0$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ donc $\lfloor x \rfloor!$ est défini (ne pas oublier que si $0!$ est défini, la factorielle d'un entier strictement négatif n'existe pas, même si vous faites, un jour, des maths plus élaborées).

- Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p =]p, p+1[$, pour $x \in I_p$ on a $f(x) = \frac{x^p}{p!}$ qui est polynômiale. Ainsi f est continue sur I_p .

Pour $p \geq 1$, on va chercher les limites à droite et à gauche en p .

Pour $x \in I_p$, on a $f(x) = \frac{x^p}{p!}$ d'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} \frac{x^p}{p!} = \frac{p^p}{p!}$$

Pour $x \in I_{p-1}$, on a $f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}$ d'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} = \frac{p^{p-1}}{(p-1)!}$$

Puisque $\frac{p^p}{p!} = \frac{p \times p^{p-1}}{p \times (p-1)!}$ (car $p \geq 1$), on a $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x > p}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x < p}} f(x) = \frac{p^p}{p!} = f(p)$ (car $\lfloor p \rfloor = p$ si $p \in \mathbb{Z}$). Ainsi f est continue en tout point $p \in \mathbb{N}^*$. Conclusion, f est continue sur $]0, +\infty[$.

3. Pour la limite en 0^+ . Si $x \in]0, 1[$ on a $f(x) = \frac{x^0}{0!} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$, on peut donc prolonger par continuité en posant $f(0) = 1$.

Pour la limite en $+\infty$:

On a

$$f(p) = \frac{p^{p-1}}{(p-1)!} = \frac{p \times p \times \cdots \times p}{(p-1) \times \cdots \times 1} = \prod_{k=1}^{p-1} \frac{p}{p-k} = p \times \prod_{k=2}^{p-1} \frac{p}{p-k}$$

Or pour $k \in \llbracket 2; p-1 \rrbracket$ on a $p \geq p-k > 0$ d'où $\frac{p}{p-k} \geq 1$ et ainsi $\prod_{k=2}^{p-1} \frac{p}{p-k} \geq \prod_{k=2}^{p-1} 1 = 1$. Ceci prouve que

$$f(p) \geq p$$

Pour finir, si $x \in]0, +\infty[$ alors $x \in I_p$ où $p = \lfloor x \rfloor$ d'où $f(x) = \frac{x^p}{p!} \geq \frac{p^p}{p!} \geq p = \lfloor x \rfloor$ (par croissance de $x \mapsto x^p$) d'où par minoration $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

14.3 Le TLM

Exercice de khôlle 460

Soit F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{1+t^4} dt$ et $G(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$.

1. Calculer $G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que F admet une limite ℓ en $+\infty$ et donner un encadrement de ℓ .

Solution :

1. La fonction $\frac{\arctan t}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc G est bien définie sur $\mathbb{R}$) et est du type $u(t) \times u'(t)$ où $u = \arctan$ ainsi

$$G(x) = [\arctan^2 t]_1^x = \frac{1}{2} \arctan^2(x) - \frac{\pi^2}{32}$$

2. Par le TFA, puisque $\varphi : t \mapsto \frac{\arctan t}{1+t^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$, F est la primitive de φ nulle en $x = 1$, en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{\arctan x}{1+x^4}$$

On en déduit que $\forall x > 0$, $F'(x) > 0$ et ainsi F est croissante sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 1$ et $t \in [1, x]$ on a

$$t^4 \geq t^2 \text{ d'où } \frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et par positivité de $\arctan$ sur $[0, +\infty[$

$$\forall x > 1, \forall t \in [1, x], \frac{\arctan t}{1+t^4} \leq \frac{\arctan t}{1+t^2}$$

par croissance de l'intégrale on a

$$F(x) \leq G(x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32} \text{ car } 0 \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2} \text{ si } x \geq 0$$

Conclusion f est croissante, majorée par $\frac{3\pi^2}{32}$ donc admet une limite $\ell \in \left[0, \frac{3\pi^2}{32} \right]$ ($\ell \geq 0$ car $F(1) = 0$).

Exercice de khôlle 461

Soit f définie par $f(x) = \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{1+t^4} dt$. Montrer que f admet une limite ℓ en $+\infty$ et que $\ell \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

Solution : Soit $\varphi(t) = \frac{\sin^2(t)}{1+t^4}$, alors $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ainsi par le TFA, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+x^4} \geq 0$.

La fonction f est donc croissante. Pour $x \geq 1$ et $t \in [1, x]$, on a $t^4 \geq t^2$ d'où $\frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Puisque $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$, on en déduit que

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

d'où par croissance de l'intégrale,

$$f(x) = \int_0^1 \varphi(t) dt + \int_1^x \varphi(t) dt = f(1) + \int_1^x \varphi(t) dt \leq f(1) + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = f(1) + \arctan x \leq f(1) + \frac{\pi}{2}$$

La fonction f est croissante, majorée par $\frac{\pi}{2}$ donc par le TLM, elle admet une limite $\ell \leq f(1) + \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$. Enfin pour $t \in [0, 1]$, on a $\frac{\sin^2(t)}{1+t^4} \leq 1$ d'où (croissance de l'intégrale), $f(1) = \int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{1+t^4} dt \leq \int_0^1 dt = 1$. Conclusion $\ell \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice de khôlle 462

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et bijective.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, justifier que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existent. On notera, respectivement, $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ ces limites.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Supposons f minorée sur $\mathbb{R}$. Il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x)$. Mais alors $m - 1$ n'a pas d'antécédent (sinon il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $m - 1 = f(x_0)$ d'où $m \leq m - 1$, absurde). Donc f n'est pas minorée et par le TLM, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. De la même manière, si M majore f , alors $M + 1$ n'a pas d'antécédent. Donc f non majorée et par le TLM, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, par croissance de f , sur $]-\infty, x_0[$, la fonction f est majorée par $f(x_0)$. Par le TLM, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ existe et $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0)$. De même sur $]x_0, +\infty[$, f est minorée par $f(x_0)$, par le TLM, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.
3. On a donc $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$. Si on montre que ces trois valeurs sont égales, on aura $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$ et ainsi f sera continue en x_0 . Si $f(x_0^-) < f(x_0)$, soit $y \in]f(x_0^-), f(x_0)[$ et x l'unique antécédent de y . Ou bien $x < x_0$ et ainsi $f(x) \leq f(x_0^-)$. Ou bien $x_0 < x$ et ainsi $f(x_0) \leq f(x)$ absurde. Donc y n'a pas d'antécédent. Idem, $f(x_0) < f(x_0^+)$, en prenant $y \in]f(x_0), f(x_0^+)[$, y ne peut avoir d'antécédent. Conclusion f est bien continue.

14.4 Des équations fonctionnelles

Exercice de khôlle 463

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$.

1. Quelle est la parité de f ?
2. Soit $x > 0$, montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$.
3. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$, ainsi f est paire. On peut donc se limiter à $x \geq 0$.
2. Pour $x > 0$, par récurrence, on pose $\mathcal{P}(n) = \ll f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) \gg$. C'est vrai si $n = 0$, car alors $x = x^1 = x^{\frac{1}{2^0}}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai à un rang $n \geq 0$ fixé. On a alors

$$f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$$

puis

$$f\left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) = f\left(\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)^2\right) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui termine la récurrence.

3. Si $x > 0$, on a $x^{\frac{1}{2^n}} = \exp\left(\frac{1}{2^n} \ln x\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, ainsi

$$f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1) \text{ car } f \text{ est continue en } 1$$

Par unicité de la limite $f(x) = f(1)$. On en déduit que f est constante sur $]0, +\infty[$ et par parité sur $\mathbb{R}^*$. Reste la valeur en $x = 0$, mais si $f(x) = f(1)$ pour $x \neq 0$ on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = f(1)$$

et par continuité de f en $x = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = f(0)$. Ainsi f est bien constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice de khôlle 464

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Solution : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \frac{\alpha}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$f(2 \times u_{n+1}) = f(u_{n+1})$$

Mais $2u_{n+1} = u_n$ donc $f(u_n) = f(u_{n+1})$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante égale à $f(u_0) = f(\alpha)$. Puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que f est continue en 0, par le critère séquentiel on a $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$. Mais $f(u_n) = f(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\alpha)$, par unicité de la limite, on a $f(\alpha) = f(0)$. Ainsi f est bien constante.

Exercice de khôlle 465

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x > 0, f(x) - f(x^2) = \ln x$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $u_n = \alpha^{\frac{1}{2^n}}$ et $v_n = f(u_n)$ (u_n est donc égal à la puissance $\frac{1}{2^n}$ - ième de α). Soit f une solution du problème posé.

1. Justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. Simplifier $v_{n+1} - v_n$.
3. Donner une forme close de $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$, puis exprimer v_n en fonction de v_0 et de S_n .
4. En déduire la forme générale de f puis conclure.

Solution :

1. On a $u_n = \exp\left(\frac{\ln \alpha}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ car $\frac{\ln \alpha}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par continuité de $\exp$ en $x = 0$. Puisque f est continue en $x = 1$, on obtient (critère séquentiel) $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)$.
2. Puisque $u_{n+1}^2 = u_n$, avec $x = u_{n+1}$ dans la relation fonctionnelle vérifiée par f on obtient $f(u_{n+1}) - f(u_n) = v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) = \frac{\ln \alpha}{2^{n+1}}$.
3. On a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Puis

$$\ln(\alpha) \times S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(\alpha)}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0$$

Puisque $u_0 = \alpha$ on a $v_0 = f(\alpha)$ et on obtient

$$v_n = f(\alpha) + \ln(\alpha) - \frac{\ln \alpha}{2^n}$$

4. Par unicité de la limite, de $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)$ et $v_n = f(\alpha) + \ln(\alpha) - \frac{\ln \alpha}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\alpha) + \ln \alpha$ on déduit que

$$\forall \alpha > 0, f(1) = f(\alpha) + \ln(\alpha)$$

Ainsi f est de la forme

$$f(x) = C - \ln x \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Réciproquement si f est de cette forme, alors f est bien continue sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$

$$f(x) - f(x^2) = C - \ln(x) - (C - \ln(x^2)) = C - \ln(x) - (C - 2\ln(x)) = \ln x$$

Conclusion, les solutions sont les fonctions de la forme

$$f(x) = C - \ln x \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice de khôlle 466

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$.

1. Déterminer h polynomiale de degré 2 solution du problème.
2. En déduire f .

Solution :

1. Soit h définie par $h(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ alors

$$\begin{aligned} h(x+y) - h(x) - h(y) &= a(x+y)^2 + b(x+y) + c - ax^2 - bx - c - ay^2 - by - c \\ &= 2axy - c \end{aligned}$$

Avec $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = 0$, $h(x) = \frac{x^2}{2}$ est solution (ce n'est pas la seule, on peut choisir tout autre valeur de b).

2. Soit f solution alors $g = f - h$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - h(x+y) = (f(x) + f(y) + xy) - (h(x) + h(y) + xy) \\ &= g(x+y) = g(x) + g(y) \end{aligned}$$

On sait alors que g est linéaire. Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = bx$ et ainsi

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + bx \text{ où } b \in \mathbb{R}$$

Enfin les fonctions f de cette forme sont bien continues et vérifie la relation fonctionnelle. Ce sont donc les solutions.

Exercice de khôlle 467

On se propose de déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos x$$

On définit la fonction φ par $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

1. Etudier la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est solution du problème sur $\mathbb{R}$.
3. Soit f une solution du problème et $x \in \mathbb{R}$ non nul.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \times \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

(b) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ et $u_n = 2^n c_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

i. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est constante.

ii. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

4. En déduire $f(x)$ en fonction de x et de $f(0)$.
5. Conclure.

Solution :

1. On sait que $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ ainsi $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = \varphi(0)$. La fonction φ est donc continue en $x = 0$. Elle est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues, donc au final elle l'est sur $\mathbb{R}$.
2. Si $x = 0$, on $\varphi(2x) = 1$ et $\varphi(0) \cos(0) = 1 \times 1$ donc $\varphi(2 \times 0) = \varphi(0) \cos(0)$. Si $x \neq 0$ on a

$$\varphi(2x) = \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2x} = \frac{\sin x}{x} \times \cos x = \varphi(x) \cos(x)$$

Ainsi φ est bien solution (elle est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation fonctionnelle).

3.

- (a) Soit $x \neq 0$ fixé, par récurrence sur n , on montre $\mathcal{P}(n) = \ll f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \times \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \gg$. C'est vrai si $n = 1$ car

$$f\left(\frac{x}{2^1}\right) \times \prod_{k=1}^1 \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) \text{ d'après (E)}$$

Puis si c'est vrai au rang $n \geq 1$ on a

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \times \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \quad (\text{HR}_n)$$

et

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \text{ d'après (E)}$$

d'où

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \times \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

(b)

i. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2^{n+1} c_{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} \left(\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2^n \times \left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) \times \left(2 \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= 2^n \times \left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) \times \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = u_n \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $u_1 = 2^1 c_1 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin x$

- ii. Mais alors puisque $\frac{x}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, APCR on a $\frac{x}{2^n} \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ (car $x \neq 0$) donc, APCR on a $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$. Ceci permet d'écrire que

$$c_n = \frac{u_n}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Avec $2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \sim 2^n \times \frac{x}{2^n} = x$, on en déduit que $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

4. Pour finir, on a $\forall x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) c_n$. Puisque $\frac{x}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par continuité de f en $x = 0$ et critère séquentiel on peut affirmer que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$ et ainsi

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) \times \frac{\sin x}{x}$$

Or $f\left(\frac{x}{2^n}\right) c_n = f(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ donc par unicité de la limite

$$\forall x \neq 0, f(x) = f(0) \varphi(x)$$

et avec $x = 0$ on a encore $f(x) = f(0) \varphi(x)$ car $\varphi(0) = 1$.

5. Conclusion, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \varphi$ et puisque φ et donc $\lambda \varphi$ est solution (car continue et vérifie (E)), les solutions du problème posé sont les fonctions de la forme $f = \lambda \varphi$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

14.5 Les grands théorèmes

Exercice de khôlle 468

Soit f et g continues sur $[0, 1]$ telles que $\sup_{[0,1]} f = \sup_{[0,1]} g$. Montrer que les graphes de f et de g se coupent.

Solution : Le problème se résume à prouver que la fonction $h = f - g$ admet un zéro dans $[0, 1]$. La fonction h est continue, on va donc chercher à appliquer le TVI. Les fonctions f et g sont continues, l'image du segment $[0, 1]$ est donc un segment. Soit $M = \sup_{[0,1]} f = \sup_{[0,1]} g$, il existe $(a, b) \in [0, 1]^2$ tels que $f(a) = g(b) = M$.

On calcule alors $h(a) = f(a) - g(a) = M - g(a) \geq 0$ car $M = \sup_{[0,1]} g$. De même, $h(b) = f(b) - M \leq 0$. Par **continuité** de h , il existe un zéro pour h .

Exercice de khôlle 469

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$ et $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

Solution : La fonction f est continue sur $[0, 1]$, l'image de $[0, 1]$ est un segment $[m, M]$ et il existe $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ tels que $m = f(\alpha)$ et $M = f(\beta)$. Pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a $f(x_i) \in [m, M]$. On a donc

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, m \leq f(x_i) \leq M$$

On en déduit que

$$m = f(\alpha) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f(\beta) = M$$

Par le TVI, il existe x_0 tel que $f(x_0) = y$.

Exercice de khôlle 470

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et telle que $f \circ f = f$. Montrer que $P_f = \{x \in [0, 1], f(x) = x\}$, ensemble des points fixes de f , est un segment non vide.

Solution : Pour $x \in [0, 1]$, on a $f(f(x)) = f(x)$ ainsi $f(x) \in P_f$. On en déduit que $f([0, 1]) \subset P_f$. Réciproquement si $x \in P_f$ on a $x = f(x) \in f([0, 1])$. Conclusion $P_f = f([0, 1])$ est l'image d'un segment par une fonction continue donc est un segment.

Exercice de khôlle 471

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante, montrer que f admet au moins un point fixe.

Application : si φ est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation $x\varphi(x) = 1$ admet au moins une solution.

Solution : On pose $g : x \mapsto f(x) - x$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de prouver que g change de signe (car par le TVI ...)

Méthode ① : Supposons que g garde un signe constant. Si

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0 \text{ alors } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x$$

Mais f est décroissante donc pour $x \geq 0$, on a $f(0) \geq f(x) \geq x$, absurde (faux dès que $x \geq \max(0, f(0)) + 1$, ou bien faire tendre x vers $+\infty$).

De même, si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$ alors $f(x) \leq x$, mais si $x \leq 0$ on a $f(0) \leq f(x) \leq x$ absurde !

Méthode ② : Puisque f est décroissante, en $-\infty$ ou bien f a une limite ℓ ou bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$. Dans les deux cas $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$. De même en $+\infty$, ou bien f a une limite finie ℓ ou diverge vers $+\infty$ et dans les deux cas $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Remarque : Si on a la stricte décroissance de f alors le point fixe est unique car g est alors strictement décroissante !

Application : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\varphi}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{\varphi(\alpha)} = f(\alpha) = \alpha$ d'où le résultat.

Exercice de khôlle 472

Soit $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(2)$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = f(c+1)$.

Solution : On pose $g(x) = f(x+1) - f(x)$ qui est définie et continue (car f l'est ainsi que $x \mapsto x+1$) sur $[0, 1]$. On a $g(0) = f(1) - f(0)$ et $g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1)$. Ainsi

$$g(0)g(1) = -(f(1) - f(0))^2 \leq 0$$

Ceci permet d'affirmer que $g(0)$ et $g(1)$ sont de signes opposés. Par le TVI, g s'annule sur $[0, 1]$, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$ soit $f(c+1) = f(c)$.

Exercice de khôlle 473

Soit g une solution sur $[0, +\infty[$ de

$$y''(x) + xy(x) = 0$$

En considérant $G(x) = g^2(x) + \frac{g'^2(x)}{x}$, montrer que g est bornée sur $[0, +\infty[$.

Solution : On pose $a : x \mapsto x$, la fonction G est définie sur $]0, +\infty[$ et dérivable avec

$$G' = 2gg' + 2\frac{g'g''}{a} - \frac{a'g'^2}{a^2} = 2gg' + 2\frac{g'g''}{a} - \frac{g'^2}{a^2} \quad (\text{car } a' = 1 =$$

or

$$g'' + ag = 0$$

d'où

$$G' = 2gg' - 2\frac{g'(ag)}{a} - \frac{g'^2}{a^2} = -\frac{g'^2}{a^2} \leq 0$$

On en déduit que G est décroissante d'où

$$0 \leq G(x) \leq G(1) \quad \text{sur } [0, 1]$$

Ainsi

$$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq g^2(x) \leq G(1) - \frac{g'^2(x)}{x} \leq G(1) \quad \text{d'où } |g(x)| \leq \sqrt{G(1)}$$

Enfin, g est continue sur $[0, 1]$ donc est bornée sur $[0, 1]$, au final

$$\forall x \geq 0, |g(x)| \leq \max\left(\sqrt{G(1)}, \sup_{[0,1]} |g|\right)$$

Remarque : On peut généraliser à $y''(x) + a(x)y(x) = 0$ où a est définie, dérivable et croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$ en posant $G(x) = g^2(x) + \frac{g'^2(x)}{a(x)}$.

Exercice de khôlle 474

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

Solution : Si f n'est pas constante, elle prend au moins deux valeurs $p < q$ dans $\mathbb{Z}$. Mais alors $p + \frac{1}{2}$ est une valeur intermédiaire. Ainsi, par continuité de f , il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = p + \frac{1}{2}$. Absurde car $p + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Exercice de khôlle 475

Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$. On note $m = \min_{[a, b]} f$ et $M = \max_{[a, b]} f$, montrer que si $y \in]m, M[$ alors y a au moins deux antécédents par f .

Solution : Si $y = f(a)$ alors y a (au moins) deux antécédents qui sont a et b . Sinon, on sait qu'il existe $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tels que $m = f(\alpha)$ et $M = f(\beta)$.

Si $y > f(a)$ alors $f(a) < y < f(\beta)$ et $f(b) < y < f(\beta)$ (car $M \neq y$). Par le TVI, f prend la valeur y sur $]a, \beta[$ et sur $]\beta, b[$ (ce sont des intervalles ouverts car $y \neq M$ et $y \neq f(a) = f(b)$).

Si $y < f(a)$ alors $f(\alpha) < y < f(a)$ et $f(\alpha) < y < f(b)$, de la même manière, par le TVI, f prend la valeur y sur $]a, \alpha[$ et sur $]\alpha, b[$.

Dans tous les cas, il y a au moins deux antécédents.

Exercice de khôlle 476

(★) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \left\{ f\left(\frac{k}{2^n}\right), k \in \llbracket 0; 2^n \rrbracket \right\}$$

et on pose $u_n = \max(A_n)$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \max_{[0, 1]} f$.

Indication : Justifier que pour $n \geq 1$ et $\alpha \in [0, 1]$, il existe $k_n \in \llbracket 0; 2^n \rrbracket$ tel que $\frac{k_n}{2^n} \leq \alpha < \frac{k_n + 1}{2^n}$. Puis bien choisir α !

Solution :

1. Puisque f est continue, $f([0, 1])$ est un segment $[m, M]$. En particulier avec $x = \frac{k}{2^n} \in [0, 1]$ si $k \in \llbracket 0; 2^n \rrbracket$, on a $f\left(\frac{k}{2^n}\right) \leq M$. L'ensemble A_n est donc majoré par M , son maximum aussi, ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $M = \max_{[0, 1]} f$.
2. Puisque $u_n = \max(A_n)$, il existe $k \in \llbracket 0; 2^n \rrbracket$ tel que $u_n = f\left(\frac{k}{2^n}\right) = f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)$ d'où $u_n \in A_{n+1}$ et ainsi

$$u_n \leq \max A_{n+1} = u_{n+1}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante et majorée, elle converge.

Remarque : En fait $A_n \subset A_{n+1}$, ce qui donne $u_n \leq u_{n+1}$.

3. On sait que $M = \max_{[0,1]} f$ est une valeur prise par f . Il existe donc $\alpha \in [0, 1]$ tel que $M = f(\alpha)$. Il existe $k_n \in \llbracket 0 ; 2^n \rrbracket$

$$\frac{k_n}{2^n} \leq \alpha < \frac{k_n + 1}{2^n}$$

En effet $\frac{k_n}{2^n} \leq \alpha < \frac{k_n + 1}{2^n} \iff k_n \leq 2^n \alpha < k_n + 1 \iff k_n = \lfloor 2^n \alpha \rfloor$ et $0 \leq \alpha \leq 1 \implies 0 \leq 2^n \alpha \leq 2^n$ d'où $0 \leq \lfloor 2^n \alpha \rfloor \leq 2^n$. On a alors (ne pas oublier que u_n est le maximum des $f\left(\frac{k}{2^n}\right)$)

$$f\left(\frac{k_n}{2^n}\right) \leq u_n \leq M$$

Puisque $\frac{k_n}{2^n} \leq \alpha < \frac{k_n + 1}{2^n}$, on en déduit que

$$\alpha - \frac{1}{2^n} < \frac{k_n}{2^n} \leq \alpha$$

et par encadrement, $\frac{k_n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$. Par continuité de f en α et critère séquentiel, on a

$$f\left(\frac{k_n}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\alpha) = M$$

Par encadrement, puisque $f\left(\frac{k_n}{2^n}\right) \leq u_n \leq M$, on en déduit que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

Exercice de khôlle 477

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |c - x_k| = \frac{1}{2}$$

Solution : On pose $f(x) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n |x - x_k| \right) - \frac{1}{2}$ qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $| \cdot |$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto |x - x_k|$ aussi et par combinaison linéaire de fonctions continues). On a

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) - \frac{1}{2} \text{ car } x_k \geq 0 \\ f(1) &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n |1 - x_k| \right) - \frac{1}{2} \underset{x_k \leq 1 \text{ donc } 1 - x_k \geq 0}{=} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1 - x_k \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n x_k \right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{n} \left(n - \sum_{k=1}^n x_k \right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) = -f(0) \end{aligned}$$

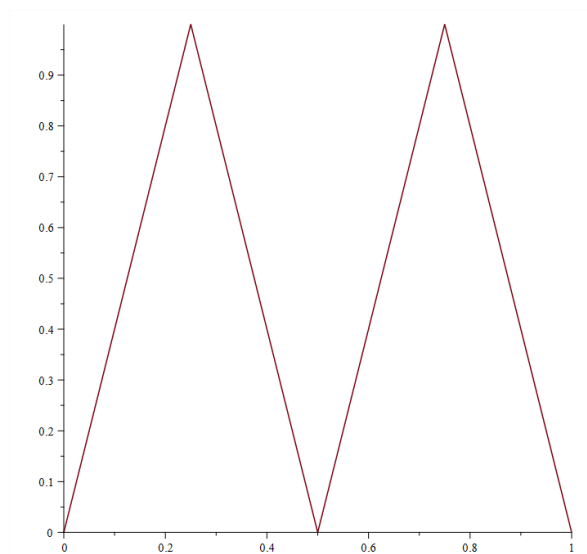
La fonction f est continue et $f(0) \times f(1) \leq 0$, donc f , par le TVI, s'annule (ou bien $f(0) = f(1) = 0$ et dans ce cas f s'annule en 0 ou en 1, ou bien $f(0)f(1) < 0$ et ainsi $f(0)$ et $f(1)$ sont de signe opposé).

Exercice de khôlle 478

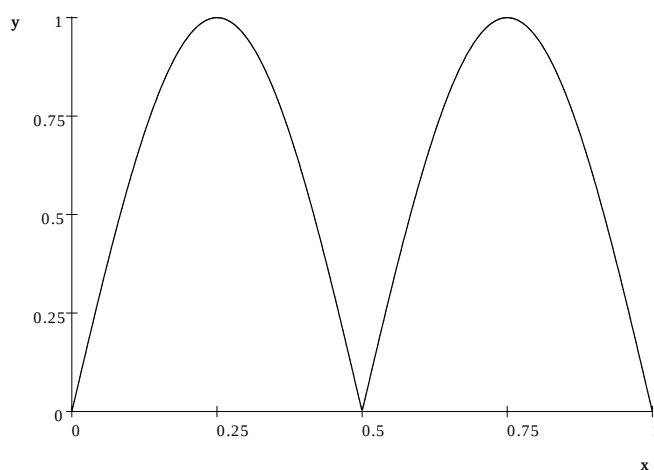
Montrer qu'il n'existe pas de fonction f continue et surjective de $[0, 1]$ dans $]0, 1[$. Est-ce encore vrai pour f continue et surjective de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$?

Solution : Soit f continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $]0, 1[$. L'image du segment $[0, 1]$ par f est un segment $[m, M]$. Puisque m est une valeur de f , on sait que $0 < m < 1$. En particulier $\frac{m}{2} \notin f([0, 1])$, conclusion $\frac{m}{2}$ n'a pas d'antécédent par f et ainsi f ne peut être injective.

En revanche, il existe des fonctions continues de $]0, 1[$ dans $[0, 1]$, par exemple f affine par morceaux dont le graphe est :



Ou plus simplement f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.



Exercice de khôlle 479

(★) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \max_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Solution : On sait que $f([0, 1])$ est un segment car f est continue sur $[0, 1]$. Soit $M = \max_{[0,1]} f$ et $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$M = f(\alpha)$. Pour $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, on a $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq M$ d'où $u_n \leq M$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k(n) = \lfloor n\alpha \rfloor$ alors

$$n\alpha - 1 < k(n) \leq n\alpha \text{ d'où } \alpha - \frac{1}{n} \leq \frac{k(n)}{n} \leq \alpha$$

Ceci montrer que $\frac{k(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$. De plus $0 \leq n\alpha \leq n$ d'où $0 \leq k(n) \leq n$, ce qui prouve que

$$f\left(\frac{k(n)}{n}\right) \leq u_n$$

Puisque f est continue en α , par le critère séquentiel $f\left(\frac{k(n)}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\alpha) = M$. Par encadrement, puisque

$$f\left(\frac{k(n)}{n}\right) \leq u_n \leq M$$

on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\max_{[0,1]} f$.

15.1 Etude de dérivabilité

Exercice de khôlle 480

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$$

1. Montrer que f est 2π périodique.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer $f'(\frac{\pi}{2})$.

Solution :

1. On remplace x par $x + 2\pi$ et y par x pour avoir

$$0 \leq |f(x + 2\pi) - f(x)| \leq |\sin(x + 2\pi) - \sin(x)| = 0$$

Ainsi $|f(x + 2\pi) - f(x)| = 0$ d'où $f(x + 2\pi) = f(x)$, ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Méthode ① : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$$

Par continuité du sinus en x , on a $\lim_{y \rightarrow x} |\sin(x) - \sin(y)| = 0$ d'où par majoration $\lim_{y \rightarrow x} |f(x) - f(y)|$ ce qui donne

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$$

et prouve la continuité en $y \in \mathbb{R}$ quelconque, d'où $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Méthode ② : On sait que $\sin$ est 1 lipschitzienne donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

mais alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. Avec $y = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\left| \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - \frac{\pi}{2}|} \leq \frac{|\sin(x) - \sin(y)|}{|x - \frac{\pi}{2}|} = \left| \frac{\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \right|$$

Mais $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ (car sinus est dérivable en $\frac{\pi}{2}$) d'où

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left| \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \right| = 0$$

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$ et établit la dérivabilité de f en $\frac{\pi}{2}$ avec $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Exercice de khôlle 481

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a , étudier $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

Solution : Méthode ① : On a $xf(a) - af(x) = (x - a)f(a) + af(a) - af(x) = (x - a)f(a) + a(f(a) - f(x))$ ainsi

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - a \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

or f dérivable en a donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et ainsi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$$

Méthode ② : On sait que si f est dérivable en a alors

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} xf(a) - af(x) &= xf(a) - af(a) - a(x - a)f'(a) + o_{x \rightarrow a}(x - a) \\ &= (x - a)(f(a) - af'(a)) + o_{x \rightarrow a}(x - a) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a) + o_{x \rightarrow a}(1) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) - af'(a)$$

Exercice de khôlle 482

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner une CNS sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$ dans ce cas.
3. Pour les valeurs de a et b déterminées à la question précédente, f est-elle dérivable deux fois en 0 ?

Solution : Il est clair que f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (et même $\mathcal{C}^\infty$).

1. Pour la continuité en 0, On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = b = f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$, une CNS est donc $b = 1$.
2. On choisit $b = 1$, sinon f n'est pas continue en 0 donc pas dérivable (contraposition de f dérivable implique f continue). Pour la dérivabilité en 0, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = -1 \end{aligned}$$

Une CNS est donc $a = -1$ et $b = 1$ et on a alors $f'(0) = -1$

3. Avec $a = -1$ et $b = 1$, on a

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ -\frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x+1} = 2$$

Ainsi f n'est pas dérivable deux fois en $x = 0$.

Exercice de khôlle 483

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{|x| + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Solution : Il est clair que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $|x| + 1 \geq 1$ donc ne s'annule pas.

1. On sait que $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, ainsi $x \mapsto |x| + 1$ l'est aussi sur $\mathbb{R}^*$ et ne s'annule pas. Par quotient f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De manière plus précise, si $x > 0$ on a $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ d'où $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Si $x < 0$, on a $f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{x-1+1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$ ainsi $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Reste la dérivabilité en $x = 0$. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{|x| + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, ainsi f est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = 1$. Conclusion

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Puisque $| \cdot |$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$ il en est de même de f . Reste à voir si f' est continue en $x = 0$. C'est immédiat car

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1 = f'(0)$$

Remarque ; Avec le théorème limite de la dérivée, c'est plus rapide car f est continue en 0 et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) =$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1$, ce qui donne la dérivabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$ en $x = 0$ avec $f'(0) = 1$.

Exercice de khôlle 484

Soit f et g dérivables en $x = a$, déterminer la limite de $\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$.

Solution : On sait que f et g admettent un $DL_1(a)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a) \text{ et } g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x)g(a) - f(a)g(x) &= (f(a) + f'(a)(x - a))g(a) - (g(a) + g'(a)(x - a))f(a) + o_{x \rightarrow a}(x - a) \\ &= (f'(a)g(a) - g'(a)f(a))(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} = f'(a)g(a) - g'(a)f(a) + o_{x \rightarrow a}(1)$$

d'où $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} = f'(a)g(a) - g'(a)f(a)$.

Exercice de khôlle 485

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, on suppose qu'il existe $k \in]0, +\infty[$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^2$$

Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que f est dérivable en a . Que dire de f ?

Solution : Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $x \neq a$ on a

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq k|x - a| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Ainsi f est dérivable en $x = a$ avec $f'(a) = 0$. Conclusion $f' = 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice de khôlle 486

(Putnam 2023)^a Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^n \cos(kx)$$

Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$|f_n''(0)| \geq 2023$$

(Indication $18 \times 19 \times 37 = 6 \times 2023 + 516$ et $17 \times 18 \times 35 = 6 \times 2023 - 1428$).

^aLe concours universitaire William Lowell Putnam Mathematical Competition est un concours mathématique annuel prestigieux ouvert aux étudiants des universités et institutions universitaires des États-Unis et du Canada.

Solution : On a $f_{n+1}(x) = f_n(x) \times \cos((n+1)x)$, ainsi pour $x \in \mathbb{R}$, avec Leibniz

$$f_{n+1}''(x) = f_n''(x) \cos(x) - 2(n+1)f_n'(x) \sin(x) - (n+1)^2 f_n(x) \cos(x)$$

en particulier

$$f_{n+1}''(0) = f_n''(0) - (n+1)^2 f_n(0) = f_n''(0) - (n+1)^2 \quad (\text{car } f_n(0) = 1)$$

En sommant (Pirate), on obtient

$$\sum_{k=1}^n f_k''(0) - f_{k-1}''(0) = f_n''(0) - f_0''(0) = \sum_{k=1}^n (-k^2) = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Avec $f_0''(0) = 0$ on a

$$|f_n''(0)| = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Il suffit de prendre n tel que $n(n+1)(2n+1) \geq 6 \times 2023$. Donc $n = 18$.

Exercice de khôlle 487

On note N la fonction valeur absolue.

- Justifier que N est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et préciser sa dérivée.
- Soit $f \in D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (donc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$) et $a \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi = |f| = N \circ f$.
 - Montrer que si $f(a) \neq 0$ alors φ est dérivable en a et préciser $\varphi'(a)$.
 - Montrer que si $f(a) = 0$ alors

$$\varphi \text{ est dérivable en } a \iff f'(a) = 0$$

Solution :

- Puisque $N(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, on a N dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $N'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- Par composition, $\varphi = N \circ f$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$ avec $\varphi'(a) = N'(f(a)) \times f'(a) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } f(a) > 0 \\ -f'(a) & \text{si } f(a) < 0 \end{cases}$.
- Sens $\Leftarrow$: Si $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$ alors

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \right| = \frac{|f(x)|}{|x - a|} = \left| \frac{f(x)}{x - a} \right| \xrightarrow{x \rightarrow a} |f'(a)| = 0$$

Ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = 0$ donc que φ est dérivable en a avec $\varphi'(a) = 0$.

Sens $\Rightarrow$: Par l'absurde (ou par contraposition...). Si $f(a) = 0$ et si $f'(a) \neq 0$, au voisinage de a , on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \underset{x \rightarrow a}{o}(x - a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

Si $f'(a) > 0$, on a $f(x) \geq 0$ au voisinage de a^+ (sur un intervalle de la forme $[a, a + \eta_1[$ où $\eta_1 > 0$) et $f(x) \leq 0$ au voisinage de a^- (sur un intervalle de la forme $]a - \eta_2, a]$ où $\eta_2 > 0$). Ainsi

$$|f(x)| \underset{x \rightarrow a^+}{\sim} f'(a)(x - a) \text{ et } |f(x)| \underset{x \rightarrow a^-}{\sim} -f'(a)(x - a)$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)|}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = f'(a) \text{ d'où } \varphi'_d(a) = f'(a) \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x)|}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = -f'(a) \text{ d'où } \varphi'_g(a) = f'(a) \end{aligned}$$

Les limites à droite et à gauche sont différentes donc φ n'est pas dérivable en a !

Remarque : Pour le sens $\Leftarrow$ (donc lorsque $f(a) = f'(a) = 0$) on peut aussi écrire que $f(x) = o_{x \rightarrow a}(x - a) = \varepsilon(x)(x - a)$ où $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi $|f(x)| = \varphi(x) = |\varepsilon(x)| |x - a| = \varepsilon_1(x)(x - a)$ où $|\varepsilon_1(x)| = |\varepsilon(x)|$ donc $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$. Ceci prouve que φ est dérivable en a avec $\varphi'(a) = 0$.

15.2 Equations fonctionnelle et dérivation

Exercice de khôlle 488

Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que

$$\forall (x, y) \in]-1, +\infty[^2, f(x) + f(y) = f(x + y + xy)$$

Calculer $f(0)$ puis montrer que f est dérivable en tout point $a \in]-1, +\infty[$. En déduire f .

Solution : Analyse : On suppose que f est une solution. Avec $x = y = 0$ (qui sont bien dans $]-1, +\infty[^2$), on a $f(0) + f(0) = f(0)$ d'où $f(0) = 0$. Soit $a \in]-1, +\infty[$ et $h > 0$, on choisit y tel que $y + ay = h$, donc $y = \frac{h}{1+a}$. Puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1+a} = 0$, au voisinage de $h = 0$ on a $\frac{h}{1+a} \in]-1, +\infty[$ et ainsi

$$f(a) + f\left(\frac{h}{1+a}\right) = f(a+h) \text{ d'où } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h} f\left(\frac{h}{1+a}\right) = \frac{1}{1+a} \frac{f\left(\frac{h}{1+a}\right)}{\frac{h}{1+a}}$$

La dérivabilité de f en 0 assure que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u}$ existe et vaut $f'(0)$. Avec $u = \frac{h}{1+a} \xrightarrow{h \rightarrow 0}$ on en déduit que

$$\frac{f\left(\frac{h}{1+a}\right)}{\frac{h}{1+a}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(0) \text{ puis que } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f'(0)}{1+a}$$

Ainsi f est dérivable en a avec $f'(a) = \frac{\lambda}{1+a}$ (ou $\lambda = f'(0)$), ce qui donne

$$f(a) = \lambda \ln(1+a) + \mu \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

De plus $f(0) = 0$ d'où $\mu = 0$.

Synthèse : Soit f de la forme $f(x) = \lambda \ln(1+x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors f est bien définie sur $]-1, +\infty[$, dérivable en 0 (elle l'est sur $\mathbb{R}$) et pour $(x, y) \in]-1, +\infty[^2$, on a

$$f(x) + f(y) = \lambda \ln(1+x) + \lambda \ln(1+y) = \lambda \ln((1+x)(1+y)) = f(x+y+x+y)$$

car $(1+x)(1+y) = 1+x+y+x+y$. Les solutions sont donc de la forme $f(x) = \lambda \ln(1+x)$.

Exercice de khôlle 489

On se propose de déterminer les fonctions $f \in D^1(\mathbb{R})$ et telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)(1-f(x)f(y)) = f(x)+f(y)$.

1. Soit f une solution.

(a) Calculer $f(0)$.

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = f'(0)$.

(c) En déduire la forme de $\arctan(f(x))$.

2. Conclure.

Solution :

1. (a) Avec $x = y = 0$ on obtient $f(0)(1-f(0)^2) = 2f(0)$. Ainsi $f(0)$ est solution de $X(1-X^2) - 2X = 0$.

Mais

$$X(1-X^2) - 2X = -X(X^2 + 1)$$

a une seule solution dans $\mathbb{R}$ qui est $X = 0$. Conclusion $f(0) = 0$.

(b) A $x \in \mathbb{R}$ fixé, on peut dériver par rapport à y . On obtient alors

$$f'(x+y)(1-f(x)f(y)) + f(x+y) \times (0-f(x)f'(y)) = f'(y)$$

avec $y = 0$, on obtient alors

$$f'(x) - f'(0)f(x)^2 = f'(0) \text{ soit } f'(x) = (1+f^2(x))f'(0)$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = f'(0)$.

(c) On en déduit que $\int_0^x \frac{f'(t)}{1+f^2(t)} dt = \int_0^x f'(0) dt$ soit

$$\arctan(f(x)) - \arctan(f(0)) = \arctan(f(x)) = xf'(0)$$

2. Si $f'(0) \neq 0$ alors $xf'(0)$ n'est pas borné alors que $\arctan(f(x))$ l'est. Absurde. La seule solution est donc la fonction nulle, qui est bien dérivable et vérifie $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)(1-f(x)f(y)) = f(x)+f(y)$.

Exercice de khôlle 490

(★) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

Solution : Analyse : Soit f une solution, elle est donc dérivable et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. Si on dérive, on obtient

$$(E_1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(f(x))f'(x) = \frac{1}{2}$$

En remplaçant x par $f(x)$ où $x \in \mathbb{R}$, on obtient $f'(f(f(x)))f'(f(x)) = \frac{1}{2}$ d'où avec $f(f(x)) = \frac{x}{2} + 3$

$$(E_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2} + 3\right)f'(f(x)) = \frac{1}{2}$$

On multiplie (E_2) par $f'(x)$ et avec (E_1) on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f'(x)$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3$ alors

$$f'(u_{n+1}) = f'\left(\frac{u_n}{2} + 3\right) = f'(u_n)$$

La suite $(f'(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante égale à $f'(u_0) = f'(\alpha)$. Mais la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une gentille suite arithmético-géométrique dont le terme général se calcule facilement (il est temps de regarder sa fiche) et vaut

$$u_n = \ell + \frac{1}{2^n} (u_0 - \ell) \text{ où } \ell = \frac{\ell}{2} + 3$$

soit $u_n = 6 + \frac{\alpha - 6}{2^n}$. On a donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$ et par continuité de f' en 6 on a $f'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$. Seulement la suite $f'(u_n)$ est constante égale à $f'(\alpha)$ donc converge vers $f'(\alpha)$. Par unicité de la limite, on en déduit que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, f'(\alpha) = f'(6)$$

Bref f' est constante et f est donc affine donc de la forme $f(x) = ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = a(ax + b) + b = a^2x + b(a + 1)$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$ si et seulement si $a^2 = \frac{1}{2}$ et $b(a + 1) = 3$ (unicité des coefficients d'un polynôme, ou bien faire $x = 0$ puis $x = 1$). Conclusion, on a deux solutions possibles

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{x}{\sqrt{2}} + 6 - 3\sqrt{2} \text{ ou } f(x) = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = -\frac{x}{\sqrt{2}} + 6 + 3\sqrt{2}$$

Synthèse : Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

(A la fin on a bien un «si et seulement si»).

15.3 Questions plus théoriques

Exercice de khôlle 491

(★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

Solution : Par hypothèse, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0)$. Par définition, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$x \in]-\eta, \eta[\implies \left| \frac{f(x)}{x} - f'(0) \right| < \varepsilon$$

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_1 \implies \frac{1}{n} < \eta$ (par exemple $N_1 = \left\lceil \frac{1}{\eta} \right\rceil + 1$). Pour $n > N_1$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \eta$ donc

$$\left| \frac{f\left(\frac{k}{n^2}\right)}{\frac{k}{n^2}} - f'(0) \right| < \varepsilon$$

ce qui s'écrit (avec $\frac{k}{n^2} > 0$)

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| < \frac{k}{n^2} \varepsilon < \frac{\varepsilon}{n}$$

Mais alors

$$\left| \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right) &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \frac{n+1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} - \frac{1}{n} \frac{f'(0)}{2} \end{aligned}$$

d'où pour $n > N_1$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \right| &= \left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} - \frac{1}{n} \frac{f'(0)}{2} + \frac{1}{n} \frac{f'(0)}{2} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} - \frac{1}{n} \frac{f'(0)}{2} \right| + \frac{1}{2n} |f'(0)| < \varepsilon + \frac{1}{2n} |f'(0)| \end{aligned}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que $n > N_2 \Rightarrow \frac{1}{2n} |f'(0)| < \varepsilon$ (car $\frac{1}{2n} |f'(0)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$). Donc pour $n > \max(N_1, N_2)$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{f'(0)}{2} \right| < 2\varepsilon$$

Ceci prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

15.4 Dérivées énièmes

Exercice de khôlle 492

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$.

- Montrer qu'il existe deux suites d'entiers $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}}$.
- Donner le maximum d'informations sur ces deux suites (on pourra considérer $w_n = \frac{(-1)^n v_n}{n!}$ et $z_n = \frac{(-1)^n u_n}{n!}$).

Solution :

- Par récurrence, c'est le plus simple. On pose $\mathcal{P}(n) = \ll \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2, \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln(x)}{x^{n+1}} \gg$. C'est vrai si $n = 0$ en posant $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang n alors $\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, \forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = u_n x^{-(n+1)} + v_n \ln(x) x^{-(n+1)}$. En dérivant on obtient

$$\begin{aligned} \left(f^{(n)} \right)'(x) &= f^{(n+1)}(x) = -(n+1) u_n x^{-(n+2)} - (n+1) v_n x^{-(n+2)} \ln x + \frac{v_n}{x} x^{-(n+1)} \\ &= \frac{v_n - (n+1) u_n - (n+1) v_n \ln x}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

On pose alors

$$u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \text{ et } v_{n+1} = -(n+1)v_n$$

qui sont bien entiers car u_n, v_n et $n+1$ le sont, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

Remarque : On a $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ ce qui permet de vérifier $u_1 = 1 = v_1 - u_0$ et $v_1 = -v_0 = -1$.

2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la plus simple, les premiers termes sont $1, -1, 2, -6, 24, -120 \dots$ on conjecture donc que $v_n = (-1)^n n!$, ce qui est évident en posant $w_n = \frac{(-1)^n v_n}{n!}$. En effet $w_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} v_{n+1}}{(n+1)!} = -(-1)^{n+1} \frac{(n+1)v_n}{(n+1)!} =$

w_n . Ainsi $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a donc

$$u_{n+1} = (-1)^n n! - (n+1)u_n$$

et

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1} u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1} ((-1)^n n! - (n+1)u_n)}{(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n+1} + z_n \end{aligned}$$

d'où

$$z_{n+1} - z_n = -\frac{1}{n+1}$$

et ainsi

$$z_n - z_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -H_n \text{ où } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

avec $z_0 = 0$, il vient

$$u_n = (-1)^{n+1} n! H_n$$

Remarque : On peut aussi appliquer Leibniz au produit $g \times h$ où $g(x) = \ln x$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour avoir

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Avec si $k \geq 0$, $h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{x^{k+1}}$, $g^{(0)} = g$ et si $k \geq 1$, $g^{(k)}(x) = h^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$, on obtient

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \ln(x) \times \frac{(-1)^{n+1} n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \frac{(-1)^{n-k+1} (n-k)!}{x^{n-k+1}} \\ &= \ln(x) \times \frac{(-1)^{n+1} n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \frac{(-1)^{n-k+1} (n-k)!}{x^{n-k+1}} \end{aligned}$$

or

$$\binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \frac{(-1)^{n-k+1} (n-k)!}{x^{n-k+1}} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{(-1)^n (k-1)! (n-k)!}{x^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{k} \times \frac{1}{x^{n+1}}$$

d'où

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \ln(x) \times \frac{(-1)^{n+1} n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \left((-1)^n \frac{n!}{k} \times \frac{1}{x^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{x^{n+1}} \times \left((-1)^n n! \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + (-1)^{n+1} n! \ln(x) \right) \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement le résultat.

Exercice de khôlle 493

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x + 1}}}}$$

où l'on a 10 racine carrées. Calculer $f'(0)$.

Solution : On va généraliser, on pose $f_0(x) = 1$ et $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$ ainsi

$$f_1(x) = \sqrt{x + 1}, \quad f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + 1}} \cdots$$

et on demande donc $f'_{10}(x)$. On montre par récurrence :

$\mathcal{P}(n) = \ll f_n$ est définie sur $[0, +\infty[$, $\forall x \geq 0$, $f_n(x) \geq f_n(0) = 1$ et f_n dérivable sur $[0, +\infty[$ », ce qui se fait facilement (laissé au lecteur).

Puis en dérivant la relation de récurrence, on obtient

$$f'_{n+1}(x) = \frac{1 + f'_n(x)}{2\sqrt{x + f_n(x)}}$$

d'où avec $f_n(0) = 1$ on obtient

$$f'_{n+1}(0) = \frac{1 + f'_n(0)}{2}$$

Si on pose $u_n = f'_n(0)$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique avec $u_0 = f'_0(0) = 0$, en appliquant le cours, on a

$$u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

et ainsi

$$f'(0) = \frac{1023}{1024}$$

Exercice de khôlle 494

★ Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n = f^{(n)}(0)$ où $f(x) = \operatorname{ch}(x) \sin(x)$.

Solution : La fonction f est impaire donc les dérivées d'ordre pair en 0 sont nulles. Pour prouver cela, deux méthodes.

Méthode ① : Si f est impaire et dérivable, en dérivant $f(-x) = -f(x)$ on obtient $f'(-x) = f'(x)$ donc f' est paire. De la même manière la dérivée, si elle existe, d'une fonction paire est impaire. Les dérivées d'ordre pair d'une fonction impaire sont donc impaires et par conséquent s'annule en 0.

Méthode ② : Puisque f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un $\text{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie régulière de ce développement limité est un polynôme impair donc dont les coefficients des puissances paires sont nuls. Or le coefficient en x^n est, d'après Taylor, égal à $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Cela donne donc la valeur de a_n si n est pair. Reste le cas où n est impair. On peut être tenté d'appliquer Leibniz, mais cela va être compliqué (pas infaisable). On a deux options.

La première est d'aller dans $\mathbb{C}$, en effet

$$f(x) = \frac{1}{4i} (e^x + e^{-x}) (e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{4i} (e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} - e^{-(1+i)x})$$

d'où

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{1}{4i} ((1+i)^n - (1-i)^n + (-1+i)^n - (-1-i)^n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} + \frac{(-1+i)^n - (-1-i)^n}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{Im}((1+i)^n) + \operatorname{Im}(-1+i)^n) \end{aligned}$$

Mais $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $-1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$ d'où

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{(\sqrt{2})^n}{2} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) \\ &= \frac{(\sqrt{2})^n}{2} \times 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \quad (\text{sico cosi} \dots) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Comme on ne s'intéresse qu'au cas n impair, si $n = 2p + 1$ on a

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(p\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Bon, on distingue encore selon que p est pair ou impair car

$$\begin{aligned} \cos\left(2q \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(q\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^q \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-1)^q \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left((2q+1) \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(q\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = (-1)^q \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -(-1)^q \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Bref, si $n = 2p + 1$ et $p = 2q$ donc $n = 2 \times 2q + 1 = 4q + 1$ on a

$$f^{(n)}(0) = 2^{\frac{n}{2}} (-1)^p (-1)^q \frac{\sqrt{2}}{2} = (-1)^q 4^q$$

Si $n = 2p + 1$ et $p = 2q + 1$ donc $n = 4q + 3$ on a

$$f^{(n)}(0) = 2^{\frac{n}{2}} (-1)^p \times \left(-(-1)^q \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \times (-1)^q 4^q$$

$$a_{2n} = 0, a_{4q+1} = (-1)^q 4^q \quad \text{et} \quad a_{4q+3} = 2 \times (-1)^q 4^q$$

La seconde option, c'est de chercher l'équation différentielle. Un calcul simple donne

$$f'(x) = \operatorname{sh}(x) \sin(x) + \operatorname{ch}(x) \cos(x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \operatorname{sh}(x) \cos(x), \quad f'''(x) = 2 \operatorname{ch}(x) \cos(x) - 2 \operatorname{sh}(x) \sin(x) \\ \text{et } f^{(4)}(x) &= -4f(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\left(f^{(4)}\right)^{(n)} = f^{(n+4)} = -4f^{(n)}$$

d'où pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+4} = -4a_n$$

On a donc (en posant $v_q = a_{4q+1}$, alors $v_{q+1} = -4v_q$ et idem avec $w_q = a_{4q+3}$, $w_{q+1} = -4w_q$)

$$a_{4q+1} = (-4)^q a_1 \quad \text{et} \quad a_{4q+3} = (-4)^q a_3$$

Mais $a_1 = 1$ et $a_3 = 2$, c'est un peu plus rapide non ?

Exercice de khôlle 495

Soit $f = \arctan$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\cos^2(f(x))$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right)$.
3. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $f^{(n)}(x) = 0$.

Solution : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ceci justifie les calculs qui suivent.

1. C'est du cours, $\cos(f(x)) = \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ d'où $\cos^2(f(x)) = \frac{1}{1+x^2}$. Ce qui se retrouve en écrivant que

$$\forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \cos^2 u = \frac{1}{1+\tan^2 u} \text{ et avec } \tan f(x) = x$$

2. Une récurrence s'impose clairement ! On pose donc $\mathcal{P}(n) = \ll \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \gg$.

Si $n=1$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et (avec $\sin(u + \frac{\pi}{2}) = \cos(u)$)

$$(1-1)! \cos^1(f(x)) \sin\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Puis, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 1$ fixé alors

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$$

Avec l'abus de notation usuel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos(f(x)) &= -\sin(f(x)) \times \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx} \cos^n(f(x)) &= -n \sin(f(x)) \times \frac{1}{1+x^2} \times \cos^{n-1}(f(x)) \\ \frac{d}{dx} \sin\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) &= n \times \frac{1}{1+x^2} \times \cos\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (n-1)! \times \left(-n \sin(f(x)) \times \frac{1}{1+x^2} \times \cos^{n-1}(f(x)) \right) \times \sin\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &+ (n-1)! \times \cos^n(f(x)) \times n \times \frac{1}{1+x^2} \times \cos\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= (n-1)! \times \cos^{n-1}(f(x)) \times n \times \frac{1}{1+x^2} \times \left(-\sin(f(x)) \sin\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) + \cos(f(x)) \cos\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} n \times (n-1)! &= n! = (n+1-1)! \\ \cos(f(x)) \cos\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) - \sin(f(x)) \sin\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) &= \cos\left(f(x) + nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left((n+1)f(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left((n+1)f(x) + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{car } \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(u) \end{aligned}$$

et pour finir

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ donne } \cos^{n-1}(f(x)) \times \frac{1}{1+x^2} = \cos^{n+1}(f(x))$$

Pour finir, on obtient bien

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1-1)! \cos^{n+1}(f(x)) \sin\left((n+1)f(x) + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

3. On sait que $f(x) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(f(x)) \neq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= 0 \iff \sin\left(nf(x) + \frac{n\pi}{2}\right) = 0 \iff nf(x) + \frac{n\pi}{2} = 0 + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ \iff f(x) &= -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Puisque $f(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on ne retient que les $k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$$

soit tels que

$$0 < \frac{k\pi}{n} < \pi \text{ donc } 0 < k < n$$

On a donc $f(x) = \arctan x = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}$ où $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ce qui $x = \tan(f(x)) = \tan\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Au final, les solutions sont les $x_k = -\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ où $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

Remarque : On a $\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = -\cotan\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = -\cotan\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)$. Les racines sont donc les $\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ où $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Ce n'est pas surprenant car f' est paire, donc par récurrence $f^{(n)}$ a la parité inverse de celle de n (paire si n est impaire $\dots$). Si n est pair, $f^{(n)}$ est impaire donc 0 est racine de $f^{(n)}$ (obtenue avec $k = \frac{n}{2}$) et les autres racines se regroupent deux par deux, à savoir x_k et $-x_k = x_{n-k}$. On a bien $n-1$ racines, à savoir 0 et $\frac{n-2}{2}$ couples $(x_k, -x_k)$.

Si n est impair, les racines se regroupent également deux par deux (x_k et $-x_k = x_{n-k}$) et comme il y en a $n-1$ qui est pair, 0 n'est pas racine de $f^{(n)}$ (ce qui se retrouve également de manière directe avec la formule obtenu ou par le DL de arctan que l'on connaît).

Exercice de khôlle 496

(★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose, pour $x > 0$, $f_n(x) = x^n \ln(x)$ et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall x > 0$, $f_n^{(n)}(x) = n! (\ln(x) + H_n)$.

2. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = H_n$.

3. Retrouver le résultat précédent en considérant $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} x^k$.

Solution : Pour $n \geq 1$, la fonction f_n est bien dérivable n fois car de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

1. Par récurrence, on pose $\mathcal{P}(n) = \llbracket \forall x > 0, f_n^{(n)}(x) = n! (\ln(x) + H_n) \rrbracket$. C'est vrai si $n = 1$ car $f_1(x) = x \ln x$ et

$$f_1^{(1)}(x) = f'_1(x) = \ln(x) + 1 = \ln(x) + H_1 \text{ car } H_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1.$$

Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 1$ fixé alors

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (f'_{n+1})^{(n)}(x)$$

Mais $f'_{n+1} = (n+1)x^n \ln(x) + x^n = (n+1)f_n(x) + x^n$. La dérivée énième de $x \mapsto x^n$ est constante égale à $n!$, par linéarité de la dérivation, on obtient

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= (n+1)f_n^{(n)}(x) + n! = (n+1) \times n! (\ln(x) + H_n) + n! \\ &= (n+1)! (\ln(x) + H_n) + (n+1)! \times \frac{1}{n+1} \text{ car } (n+1)! = (n+1) \times n! \\ &= (n+1)! \left(\ln(x) + H_n + \frac{1}{n+1} \right) = (n+1)! (\ln(x) + H_{n+1}) \text{ car } H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

2. La présence des $\binom{n}{k}$ incite à calculer $f_n^{(n)}$ à l'aide de la formule de Leibniz. On pose donc $g(x) = x^n$ et $h(x) = \ln(x)$. Pour $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ on a (c'est un résultat vu en TD qu'il faut savoir retrouver rapidement)

$$g^{(k)}(x) = n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$$

$$h^{(0)}(x) = \ln(x) \text{ et pour } k \geq 1, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

(Pour h , on écrit $h'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $h''(x) = -x^{-2}$, $h^{(3)}(x) = 2x^{-3}$, $h^{(4)}(x) = -6x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$ et si nécessaire, on prouve le résultat général par récurrence). On a donc

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = g^{(n)}(x) h^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) \\ &= n! \ln(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times \frac{n!}{k!} x^k \times \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \\ &= n! \ln(x) + n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k} = n! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \right) \\ &\text{et on a vu que cela vaut aussi } n! (\ln(x) + H_n) \end{aligned}$$

Avec $x = 1$ par exemple, on obtient que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = H_n$.

3. La fonction φ est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient, par linéarité de la dérivation,

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \times kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

Pour $x \neq 0$, on a donc

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{1}{x} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k = -\frac{1}{x} \left(-(-1)^0 \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k \right) \\ &= -\frac{1}{x} (-1 + (1-x)^n) = \frac{1 - (1-x)^n}{x} = \frac{1 - (1-x)^n}{1 - (1-x)} \text{ (du type } \frac{1-q^n}{1-q} \text{ !!!)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k \text{ si } x \neq 0 \end{aligned}$$

Reste le cas $x = 0$. Méthode ① : on vérifie que $\varphi'(0) = \sum_{k=0}^{n-1} (1-0)^k = n$, ce qui est le cas puisque $\varphi'(0) =$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 0^{k-1} = (-1)^{1-1} \binom{n}{1} 0^0 = n.$$

Méthode ② : Les deux polynômes φ' et $\sum_{k=0}^{n-1} (1-X)^k$ prennent les mêmes valeurs sur $\mathbb{R}^*$ qui est une partie infinie, ils sont donc égaux en tant que polynôme donc en $x = 0$.

Pour finir, on a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi'(t) dt &= \varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} - 0 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{1}{k+1} (1-t)^{k+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{k+1} \right) \times (0^{k+1} - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i} = H_n \end{aligned}$$

15.5 Leibniz en action

Exercice de khôlle 497

Calculer la dérivée énième de $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$.

Solution : Les deux fonctions g et h définies par $g(x) = x^2 - x + 1$ et $h(x) = e^{-x}$ sont de classe C^∞ , on peut donc appliquer la formule de Leibniz à tout ordre. Cette formule s'écrit $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$. Cette somme peut s'écrire

$$\binom{n}{0} g^{(0)}(x) h^{(n)}(x) + \binom{n}{1} g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(2)}(x) h^{(n-2)}(x) + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

ceci même si $n < 3$, car dans ce cas les coefficients du binôme $\binom{n}{k}$ sont nuls si $k > n$.

On a donc, en utilisant $h^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$ (qui se prouve facilement par récurrence),

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left[(-1)^n g^{(0)}(x) + n(-1)^{n-1} g^{(1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} g^{(2)}(x) \right] e^{-x} + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \underbrace{g^{(k)}(x)}_{=0 \text{ si } n \geq 3} h^{(n-k)}(x) \\ &= (-1)^n \left((x^2 - x + 1) - n(2x - 1) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \right) e^{-x} = (-1)^n (x^2 - (2n+1)x + 1 + n^2) e^{-x} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 - (2n+1)x + 1 + n^2) e^{-x}$$

On vérifie avec $n = 0$ que l'on a $f^{(0)}(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$.

Exercice de khôlle 498

Soit $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$. Calculer la dérivée énième de f par Leibniz. On donnera son expression sous la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! e^{2x}}{(1+x)^{n+1}} P_n(x)$$

où P_n est un polynôme en x .

Solution : On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$ qui sont C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on peut donc appliquer Leibniz. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$, par récurrence immédiate :

$$g^{(n)}(x) = 2^n e^{2x} \text{ et } h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \text{ si } x \neq -1$$

Ainsi pour $x \neq 1$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{(1+x)^{n-k+1}} 2^k e^{2x} \\ &= \frac{e^{2x}}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n 2^k \frac{n!}{k! (n-k)!} (-1)^{n-k} (n-k)! (1+x)^k \\ &= \frac{(-1)^n n! e^{2x}}{(1+x)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} (1+x)^k \end{aligned}$$

On peut le vérifier si $n = 1$ car

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{(1+x)^2} \times (2x+1) \text{ et } \sum_{k=0}^1 \frac{(-2)^k}{k!} (1+x)^k = -(2x+1)$$

Exercice de khôlle 499

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{x^2}$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' - axy = 0$.
3. Quelle relation donne la formule de Leibniz appliquée à l'équation différentielle vérifiée par f ?
4. Montrer que si P_n a deux racines $\alpha < \beta$ alors P_{n-1} a une racine dans l'intervalle $] \alpha, \beta[$.

Solution : Avant tout f est bien $\mathcal{C}^\infty$, ce qui permet de dériver autant de fois que nécessaire.

1. Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \ll \text{il existe un polynôme } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{x^2} \gg$.
C'est vrai si $n = 0$ en posant $P_0(X) = 1$, puis si c'est vrai au rang n , en dérivant $f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{x^2}$ on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = (P_n'(x) + 2xP_n(x)) e^{x^2}$$

En posant $P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) + P_n'(X)$ qui est bien un polynôme, on a $\mathcal{P}(n+1)$ et ceci termine la récurrence.

2. On a facilement $f'(x) = 2xf(x)$ donc $a = 2$.
3. On peut appliquer Leibniz (tout est $\mathcal{C}^\infty$). On pose $g(x) = 2x$ ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (gf)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) \text{ si } n \geq 1 \\ &= \binom{n}{0} g^{(0)}(x) f^{(n-0)}(x) + \binom{n}{1} g^{(1)}(x) f^{(n-1)}(x) \\ &= 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x) \text{ (encore vrai si } n = 0) \end{aligned}$$

Puisque $f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{x^2}$, on obtient

$$P_{n+1}(x) e^{x^2} = 2xP_n(x) e^{x^2} + 2nP_{n-1}(x) e^{x^2}$$

soit après simplification par $e^{x^2} \neq 0$

$$P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) + 2nP_{n-1}(X)$$

On combine cette relation avec

$$P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) + P'_n(X)$$

Pour avoir

$$P'_n(X) = 2nP_{n-1}(X)$$

4. Si $P_n(\alpha) = P_n(\beta) = 0$, puisque P_n est continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $] \alpha, \beta[$ (il est même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), d'après Rolle, il existe $c \in] \alpha, \beta[$ tel que $P'_n(c) = 0$. Mais alors $P_{n-1}(c) = \frac{P'_n(c)}{2n} = 0$ (on est sûr que $n \neq 0$ car $P_0(X) = 1$ n'a pas de racine, et même puisque $P_1(X) = 2X$ n'ayant qu'une racine, on a $n \geq 2$).

Exercice de khôlle 500

Soit $f(x) = \tan x$, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

1. À l'aide la relation $f' = 1 + f^2$ et de la formule de Leibniz, montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) \geq 0$.
3. Donner le DL₈(0) de f .

Solution :

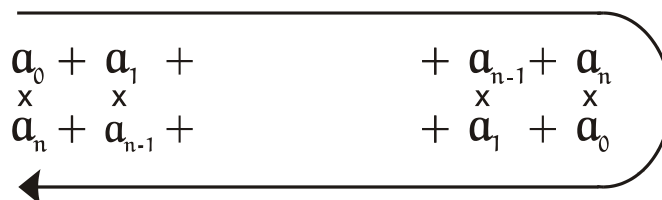
1. L'équation différentielle de la tangente est bien connue car si $f(x) = \tan(x)$ alors $f'(x) = 1 + f^2(x)$. On se place sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on dérive n fois cette égalité, par la formule de Leibniz. On peut car f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I . On obtient pour $n \geq 1$

$$f^{(n+1)}(x) = (f(x) \times f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = n! \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{f^{(n-k)}(x)}{(n-k)!}$$

Pour $x = 0$, avec $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, on obtient

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

L'algorithme de calcul des $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est appelé algorithme boustrophédon¹, le dessin suivant permet de comprendre sa dénomination :



$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_n a_0)$$

¹Boustrophédon signifie, «à la manière d'un sillon tracé par un boeuf». On utilise ce terme pour désigner une écriture dont les lignes vont sans interruption de gauche à droite et de droite à gauche. (PETIT ROBERT).

2. Cela revient à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$. Par une récurrence forte, c'est immédiat. En effet $a_0 = 0 \geq 0$ et si $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket a_k \geq 0$ alors $a_{n+1} \geq 0$ car $\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ est une somme de nombres positifs.
3. La fonction $\tan$ admet une $DL_8(0)$ (par Taylor, car elle est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0). Il est clair (imparité) que $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$. Puis $a_1 = 1$ ($f'(0) = 1$) et ainsi

$$a_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \times & \times & \times \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow = \frac{1}{3} (0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0) = \frac{1}{3}$$

$$a_5 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$a_7 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{15} & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \frac{2}{15} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow = \frac{1}{7} \times \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{9} \right) = \frac{17}{315}$$

$$\text{Conclusion } \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_{x \rightarrow 0}(x^8).$$

Exercice de khôlle 501

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = e^{bx}$. En appliquant la formule de Leibniz sur $(f \times g)^{(n)}$ retrouver la formule du binôme de Newton.

Solution : Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer Leibniz à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, ce qui s'écrit

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Mais pour $\alpha \in \mathbb{C}$, si φ_α est définie par $\varphi_\alpha(x) = e^{\alpha x}$ alors, pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\alpha^{(k)}(x) = \alpha^k e^{\alpha x}$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$ (compte tenu de $f(x)g(x) = e^{(a+b)x}$)

$$(fg)^{(n)}(x) = (a+b)^n e^{(a+b)x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k e^{ax} \times b^{n-k} e^{bx} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) e^{(a+b)x}$$

en divisant par $e^{(a+b)x}$ qui est non nul, on obtient la formule du binôme.

Exercice de khôlle 502

Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) e^x}{x^{n+1}}$. On donnera une relation entre P_{n+1} , P_n et P'_n .
- En appliquant la formule de Leibniz à $x \mapsto xf(x)$, donner une autre relation sur les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- En déduire que sur $]0, +\infty[$, P_n est solution de l'équation différentielle $y' + y = x^n$.

Solution : Avant tout f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, on peut dériver n fois.

1. Par récurrence, on montre $\mathcal{H}(n)$ = «il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^x}{x^{n+1}}$ ». C'est vrai si $n = 0$ en posant $P_0(x) = 1$. Puis si c'est vrai au rang n alors, pour $x > 0, f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-(n+1)}e^x$ d'où

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = P_n'(x)x^{-(n+1)}e^x - (n+1)P_n(x)x^{-(n+2)}e^x + P_n(x)x^{-(n+1)}e^x \\ &= (xP_n'(x) - (n+1)P_n(x) + xP_n(x))x^{-(n+2)}e^x \end{aligned}$$

On pose $P_{n+1}(X) = XP_n'(X) + (X - n - 1)P_n(X)$ qui est un polynôme (produit et somme de polynômes) et ainsi $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

2. On peut appliquer Leibniz car $u : x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$. On a $(uf)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} f^{(n-k)}$.

Puisque $u^{(k)} = 0$ si $k \geq 2$, cette somme se réduit à (pour $n \geq 1$, mais avec $n = 0$ c'est encore vrai car $\binom{0}{1} = 0$)

$$(uf)^{(n)} = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} u^{(k)} f^{(n-k)} = \binom{n}{0} u^{(0)} f^{(n-0)} + \binom{n}{1} u^{(1)} f^{(n-1)}$$

d'où, pour $x > 0$

$$(uf)^{(n)}(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$$

Mais puisque $uf = \exp$, on a $(uf)^{(n)}(x) = e^x$, ainsi $\forall x > 0, x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x) = e^x$, ce qui donne

$$\forall x > 0, x \frac{P_n(x)e^x}{x^{n+1}} + n \frac{P_{n-1}(x)e^x}{x^n} = e^x$$

en divisant par e^x (non nul) on obtient

$$\forall x > 0, P_n(x) + nP_{n-1}(x) = x^n$$

Cette égalité, entre polynômes, est vérifiée sur $]0, +\infty[$ qui est infinie donc elle est vraie partout (en tant que polynômes). On a donc, pour $n \geq 1$

$$P_n(X) + nP_{n-1}(X) = X^n$$

3. On combine les deux expressions, pour $x > 0$

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= xP_n'(x) + (x - n - 1)P_n(x) \\ P_{n+1}(x) &= x^{n+1} - (n+1)P_n(x) \end{aligned}$$

pour avoir

$$xP_n'(x) + (x - n - 1)P_n(x) - x^{n+1} + (n+1)P_n(x) = xP_n'(x) + xP_n(x) - x^{n+1} = 0$$

soit, en divisant par $x \neq 0$,

$$P_n'(x) + P_n(x) = x^n$$

Remarque : L'égalité $P_n'(x) + P_n(x) = x^n$ est alors vraie sur une partie infinie (à savoir $]0, +\infty[$) donc est vraie partout !

Exercice de khôlle 503

Soit f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^{n-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

On procédera par récurrence.

Solution : Avant tout, pour $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc dérivable n fois) sur I par produit et composée. Soit $\mathcal{P}(n) = \ll \forall x > 0, f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \gg$. Pour $n = 1$ on a $f_1(x) = x^{1-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\forall x > 0, f'_1(x) = -\frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^1 x^{-1-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Ceci prouve que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons, à $n \geq 1$ fixé, que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a

$$f_{n+1}(x) = x^n \exp\left(\frac{1}{x}\right) = x f_n(x)$$

Puisque $u : x \mapsto x$ et f_n sont dérivables $n+1$ fois, on peut appliquer la formule de Leibniz. On obtient

$$f_{n+1}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(k)} f_n^{(n-k)} = \sum_{k=0}^1 \binom{n+1}{k} u^{(k)} f_n^{(n+1-k)} \text{ car } k \geq 2 \Rightarrow u^{(k)} = 0$$

$$\text{d'où } f_{n+1}^{(n+1)}(x) = u(x) f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x) = x \left(f_n^{(n)}\right)'(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$$

D'après HR_n on a $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ d'où

$$\begin{aligned} \left(f_n^{(n)}\right)'(x) &= (-1)^n \times \left(-(n+1) x^{-n-2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) + x^{-n-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \exp\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= (-1)^n \times \left(-(n+1) x^{-n-2} - x^{-n-3} \right) \exp\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

mais alors

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= x \times \left((-1)^n \times \left(-(n+1) x^{-n-2} - x^{-n-3} \right) \exp\left(\frac{1}{x}\right) \right) + (n+1) (-1)^n x^{-n-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (-1)^n \left(\left(-(n+1) x^{-n-1} - x^{-n-2} \right) + (n+1) x^{-n-1} \right) \exp\left(\frac{1}{x}\right) = -(-1)^n x^{-n-2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (-1)^{n+1} x^{-n-2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et termine la récurrence.

15.6 TAF et T'Rolle

Exercice de khôlle 504

Existe-t-il f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq 2$.

Solution : Non car par le TAF appliqué à f sur $[0, 2]$, il existe $c \in]0, 2[$ tel que $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{5}{2} = f'(c)$. Absurde car $|f'(c)| \leq 2$ (et $\frac{5}{2} > 2$).

Exercice de khôlle 505

Soit f trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\textcircled{1} \quad \forall x \in [0, 1], f(x) = f(1-x) \text{ et } \textcircled{2} \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

Montrer que $f^{(3)}$ s'annule au moins une fois.

Indication : Que valent $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{3}{4}\right)$?

Solution : On dérive l'égalité $f(x) = f(1-x)$ (on peut car $x \mapsto f(1-x)$ est définie et dérivable sur $[0, 1]$) pour avoir $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f'(1-x)$. Ainsi

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -f'\left(\frac{1}{2}\right) \\ f'\left(\frac{1}{4}\right) &= -f'\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -f'\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

d'où $f'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$. Puis on applique Rolle à f' (qui est continue car dérivable) sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{4} < c_1 < \frac{1}{2} < c_2 < \frac{3}{4}$ (donc $c_1 \neq c_2$) tels que $f''(c_1) = f''(c_2) = 0$. Une nouvelle application de Rolle à f'' (on peut) donne l'existence de $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$ tel que $f^{(3)}(\alpha) = 0$.

Exercice de khôlle 506

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$, montrer que f a un point fixe dans $[0, 1]$.

Indication : poser $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x^2$.

Solution : On pose g comme indiqué. On a $g(0) = g(1) = 0$ et par le TFA, g est dérivable sur $[0, 1]$ donc continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On peut appliquer Rolle : il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$g'(c) = 2f(c) - 2c = 0$$

Ainsi $f(c) = c$ et f a un point fixe dans $]0, 1[$.

Exercice de khôlle 507

Majoration de f par le maximum de la dérivée seconde.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b) = 0$.

- Montrer que $\forall x \in [a, b], \exists c \in]a, b[, f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$.

Indication : Poser $g(t) = f(t) - \frac{(t-a)(t-b)}{2} K$ où K est tel que $g(x) = 0$.

- Montrer que $\exists M \geq 0, \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$.
- On enlève l'hypothèse $f(a) = f(b) = 0$.

(a) Montrer que $\forall x \in [a, b], \exists c \in]a, b[, f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$.

(b) On note A, B et X les points d'abscisse a, b et $x \in [a, b]$ de $\mathcal{C}_f$. Soit P le point d'abscisse x de la corde (AB) et $d(x) = XP$ la distance entre X et P . Donner un majorant de $d(x)$ pour $x \in [a, b]$.

Solution :

- Comme indiqué, on pose $g(t) = f(t) - \frac{(t-a)(t-b)}{2} K$ où K est tel que $g(x) = 0$. On vérifie que c'est possible :

$$g(x) = f(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{2} K = 0 \text{ d'où } K = \dots$$

Bon, si $x = a$ ou $x = b$, ce n'est pas possible. Mais dans ce cas

$$f(x) = 0 = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$

Pour tout $c \in]a, b[$!

On suppose donc $x \notin \{a, b\}$ et K est bien défini. On a alors

$$g(a) = g(x) = g(b)$$

Et puisque g est dérivable sur $[a, b]$, on applique Rolle sur $[a, x]$ puis sur $[x, b]$, il existe $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g'(d_1) = g'(d_2) = 0$. Et on recommence (on peut car g est $\mathcal{C}^2$), Rolle appliqué à g' sur $[d_1, d_2]$ permet d'affirmer qu'il existe $c \in]d_1, d_2[\subset]a, b[$ tel que

$$g''(c) = 0$$

Mais $g''(c) = f''(c) - K$ d'où $K = f''(c)$. Enfin

$$g(x) = 0 \iff f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$

Remarque ① : on peut généraliser si $f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$ en posant $g(t) = f(t) - \frac{(t-x_1)\dots(t-x_n)}{n!} K$ alors

$$f(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

Remarque ② : On a juste besoin de f dérivable deux fois sur $]a, b[$ et $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

2. Puisque f est $\mathcal{C}^2$, $M = \sup_{[a,b]} |f''| = \max_{[a,b]} |f''|$ existe et $\forall c \in [a, b]$, $|f''(c)| \leq M$ d'où le résultat, ne pas oublier que le signe de $(x-a)(x-b)$ est négatif entre les deux racines a et b .

Remarque : Ici le caractère $\mathcal{C}^2$ de f (donc la continuité de f'') est indispensable pour l'existence de M

3.

- (a) On peut enlever l'hypothèse $f(a) = f(b) = 0$, on pose alors $\varphi(t) = f(t) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(t-a) \right)$ (on enlève l'équation de la corde) qui vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Le résultat précédent donne l'existence de $c \in]a, b[$, tel que $\varphi(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} \varphi''(c)$, donc, avec $f'' = \varphi''$, tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$

Remarque : On retrouve que si $\varphi'' \geq 0$ alors $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$ sur $[a, b]$, i.e. «la courbe est sous sa corde».

- (b) On a $d(x) = \left| f(x) - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right|$ (ordonnée de P à laquelle on ôte celle de X). Si $M = \max_{[a,b]} |f''|$ alors

$$d(x) \leq \frac{|(x-a)(x-b)|}{2} M = \frac{(x-a)(b-x)}{2} M \text{ si } x \in [a, b]$$

Le sommet de la parabole $x \mapsto -\frac{(x-a)(x-b)}{2}$ est atteint au milieu des deux racines donc en $x = \frac{a+b}{2}$. Ainsi

$$d(x) \leq -\frac{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)}{2} M = \frac{M(b-a)^2}{8}$$

Exercice de khôlle 508

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f . Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{C}_f$ tels que la tangente en A passe par B . Montrer qu'il existe un point $C \in \mathcal{C}_f$ tel que la tangente en C passe par A .

Solution : On traduit les hypothèses. Soient a et b les abscisses de A et B respectivement. La tangente T_A en A à $\mathcal{C}_f$ a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Elle passe par b donc

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a)$$

On cherche alors C d'abscisse c tel que $f(a) = f(c) + f'(c)(a - c)$. On se doute qu'il faut appliquer Rolle, mais à quelle fonction ? Si on fait un dessin (le faire), on se dit que l'on souhaite que la corde (AC) soit tangente à $\mathcal{C}_f$ au point C , donc qu'en ce point, la pente de cette corde soit égale à la dérivée. Cela conduit à poser

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \neq a \text{ et } g(a) = f'(a)$$

Ainsi g est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et puisque f est dérivable en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ donc $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Bref g est bien continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a, b] \cup [b, a]$ et est dérivable $]a, b[\cup]b, a[$. De plus

$$g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) \text{ par hypothèse}$$

d'où $g(a) = g(b)$. Par Rolle, il existe $c \in]a, b[\cup]b, a[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais

$$g'(c) = \frac{f'(c)(c - a) - (f(c) - f(a))}{(c - a)^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} g'(c) &= 0 \iff f'(c)(c - a) - f(c) + f(a) = 0 \\ &\iff f(a) = f(c) + f'(c)(a - c) \\ &\iff A \text{ est sur la tangente en } C \text{ à } \mathcal{C}_f \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 509

Résoudre l'équation

$$5^x + 2^x = 4^x + 3^x$$

où $x \in \mathbb{R}_+^*$. (Penser TAF ...)

Solution : L'équation donnée est équivalente à

$$5^x - 4^x = 3^x - 2^x$$

On considère que x est fixé et on pose $f(t) = t^x$, et notre équation devient

$$f(5) - f(4) = f(3) - f(2)$$

Puisque f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[2, 3]$ et $[4, 5]$. Ceci prouve l'existence de $t_1 \in]4, 5[$ et de $t_2 \in]2, 3[$ tels que

$$(5 - 4) \times x t_1^{x-1} = (3 - 2) \times x t_2^{x-1} \implies t_1^{x-1} = t_2^{x-1}$$

cette dernière égalité n'est possible que si $x = 1$ car $t_1 \neq t_2$ (pour se convaincre, passer au $\ln$ par exemple). La seule solution est donc $x = 1$ (car on a éliminé $x = 0$ dans l'énoncé).

Exercice de khôlle 510

Soient f et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que $\forall x \in [a, b], g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Solution :

1. Si $g(a) = g(b)$ on peut appliquer Rolle sur $[a, b]$ à g . Ainsi il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.
2. On pose $\varphi(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$, ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b) \\ \varphi(b) &= f(b)(g(b) - g(a)) - g(b)(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b)\end{aligned}$$

Puisque f et g sont dérivables sur $[a, b]$, il en est de même de φ et on peut appliquer Rolle. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

d'où le résultat.

Exercice de khôlle 511

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f(x+1) = xf(x) \text{ et } f''(x) > 0.$$

1. (a) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n)$ en fonction de n et de $f(1)$.
(b) Démontrer l'existence d'un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
2. (a) Montrer que f' s'annule en un unique point.
(b) Montrer que f ne s'annule pas, et en déduire que f est de signe constant.
3. (a) Montrer que $f(2) > 0$, quelle est la limite de f en $+\infty$.
(b) Donner un équivalent de f en $x = 0^+$.
(c) Montrer que $\frac{1}{f(x)} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^n} \right)$.

Solution :

1. (a) On a $f(2) = f(1)$, $f(3) = 2f(2) = 2$, $f(4) = 3f(3) = 6$, $f(5) = 4f(4) = 24$ donc on se dit que $f(n) = (n-1)!f(1)$. Ou bien on fait une récurrence, ou bien on pose $u_n = \frac{f(n)}{(n-1)!}$ et ainsi $u_{n+1} = \frac{f(n+1)}{n!} = \frac{nf(n)}{n!} = \frac{f(n)}{(n-1)!} = u_n$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à $f(1)$. Conclusion $f(n) = (n-1)!u_n = (n-1)!f(1)$.
(b) Oh mais $f(1) = f(2)$ et f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ donc continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$ et Rolle s'applique.
2. (a) Par l'absurde s'il existe $\beta > 0$ tel que $\beta \neq \alpha$ et $f'(\beta) = 0$ alors en appliquant Rolle entre α et β (on peut car f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc f' est dérivable), on en déduit qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $f''(\gamma) = 0$. Contredit l'hypothèse $f'' > 0$.

Remarque : Une autre solution consiste à dire que $f'' > 0$ donc f' est strictement croissante donc réalise une bijection. En particulier 0 a donc un unique antécédant par f' .

- (b) S'il existe $c > 0$ tel que $f(c) = 0$ alors $f(c+1) = cf(c) = 0$ et $f(c+2) = (c+1)f(c+1) = 0$ donc f s'annule en $c, c+1$ et $c+2$. On peut alors appliquer Rolle et en déduire que f' s'annule sur $]c, c+1[$ et sur $]c+1, c+2[$ donc au moins deux fois. Absurde.

Puis f étant continue sur $]0, +\infty[$, si elle prend deux valeurs de signe opposée, par le TVI elle s'annule. Absurde. Conclusion, f garde un signe constant (celui de $f(1)$).

3. (a) Par l'absurde, si $f(2) < 0$ (car $f(2) \neq 0$) alors $f(1) < 0$ (bah oui $f(1) = f(2)$) et ainsi $f(n) = (n-1)!f(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. Mais puisque $f'' > 0$, on sait que f' est strictement croissante. De $f'(\alpha) = 0$, on déduit que $f' > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$, en particulier f est croissante sur $]\alpha, +\infty[$ donc

$$\forall n \geq \alpha, f(n) \geq f(\alpha)$$

absurde si $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

- (b) Pour $x > 0$, on a $f(x+1) = xf(x)$ d'où $f(x) = \frac{f(x+1)}{x}$. Par continuité de f en $x=1$, on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{f(1)}{x} \quad (\text{car } f(1) \neq 0)$$

- (c) Enfin pour $x \geq \alpha + n + 1$ on a

$$f(x) = (x-1)f(x-1) = (x-1)(x-2)f(x-2) = \dots = (x-1)(x-2)\dots(x-n-1)f(x-n-1)$$

Mais $x - (n+1) \geq f(\alpha)$ d'où $f(x-n-1) \geq f(\alpha)$ ce qui donne

$$f(x) \geq (x-1)(x-2)\dots(x-n-1)f(\alpha)$$

et ainsi

$$0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)f(\alpha)}$$

puis (avec $x^n \geq 0$)

$$0 \leq \frac{x^n}{f(x)} \leq \frac{x^n}{(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)f(\alpha)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{n+1}f(\alpha)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve que $\frac{1}{f(x)} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

Exercice de khôlle 512

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = 0$ et f' soit croissante.

- Montrer que $\forall x > 0$, on a $f(x) \leq xf'(x)$. (Penser TAF)
- Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, montrer que g est croissante sur $]0, +\infty[$.

Solution :

1. Soit $x > 0$, par le TAF que l'on applique entre 0 et x (on peut car $f \in \mathcal{C}^0([0, x])$ et est dérivable sur $]0, +\infty[$). Il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = xf'(c)$$

Puisque f' est croissante, on a $f'(c) \leq f'(x)$ d'où $xf'(c) \leq xf'(x)$ (car $x > 0$) et avec $f(0) = 0$ on a bien le résultat demandé.

2. La fonction g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ avec, pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0$. Ainsi g est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice de khôlle 513

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(0) = -1$. Montrer que :

- ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -1$
- ② $\exists x_1 \in]0, 1[, f(x_1) < 0$
- ③ $\exists x_2 \in]0, 1[, f(x_2) = 0$
- ④ $\exists x_3 \in]0, 1[, f'(x_3) = 0$

Question subsidiaire : donner un exemple de telle fonction et préciser les valeurs de x_1, x_2 et x_3 .

Solution : Pour ① : On a $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) = -1$ (suffit de bien lire l'énoncé !)

Pour ① : Puisque $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$, on a $\frac{f(x)}{x} < -\frac{1}{2}$ au voisinage de 0. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\eta, \eta[, \frac{f(x)}{x} < -\frac{1}{2}$$

Pour $x_1 = \frac{\eta}{2}$, on a $f(x_1) = x_1 \times \frac{f(x_1)}{x_1} < -\frac{x_1}{2} < 0$.

Remarque : On peut aussi faire un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\forall x \in]0, 1[, f(x) \geq 0$ alors

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{f(x)}{x} \geq 0$$

Par PAL lorsque x tend vers 0 avec $x > 0$, on en déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} \geq 0$, or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = -1$, absurde.

Pour ③ : On a $f(x_1) < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, par le TVI (car f est continue sur $[x_1, 1]$, puisque dérivable), il existe $x_2 \in]x_1, 1[\subset]0, 1[$ tel que $f(x_2) = 0$.

Pour ④ : On a $f(0) = f(x_2) = 0$, puisque f est continue sur $[0, x_2]$, dérivable sur $]0, x_2[$, par Rolle, il existe $x_3 \in]0, x_2[\subset]0, 1[$ tel que $f'(x_3) = 0$.

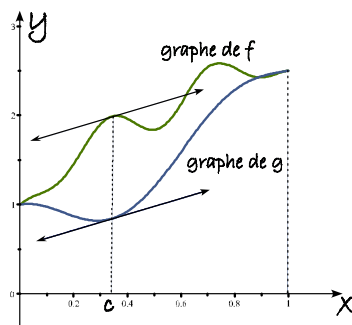
Question subsidiaire : On cherche f sous la forme d'un polynôme de degré au moins 2. Avec $f(0) = 0$, on sait que 0 est racine, donc on cherche f sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx$$

Avec $f(1) = a + b = 1$ et $f'(0) = b = -1$ on obtient $f(x) = 2x^2 - x$. On peut donc prendre $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_3 = \frac{1}{4}$!

Exercice de khôlle 514

Soient f et g définies sur $[0, 1]$ dont les graphes admettent, en tous points, une tangente et se rejoignent aux points d'abscisse 0 et 1. Montrer qu'il existe un point c de $[0, 1]$ où les tangentes respectives aux deux graphes sont parallèles.



Solution : On commence par traduire les hypothèses. Les graphes admettent, en tous points, une tangente, signifie que f et g sont dérivables sur $[0, 1]$ (donc y sont continues). Les graphes se coupent aux points d'abscisse 0 et 1 signifie que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$.

Ce que l'on cherche à prouver, c'est qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que la tangente en c aux deux graphes sont parallèles, i.e ont même coefficient directeur. Bref, on cherche $c \in [0, 1]$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ qui est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ avec $h(0) = h(1) = 0$. Il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $h'(c) = 0$ et c'est fini.

Exercice de khôlle 515

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^n (k+1) \varepsilon_k x^k$ où $\varepsilon_k \in \mathbb{R}$ et $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k = 0$. A l'aide du théorème de Rolle, montrer que f s'annule au moins une fois.

Solution : On pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ l'unique primitive de f nulle en 0. On a alors

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k x^{k+1}$$

d'où $F(1) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k = 0 = F(0)$. Puisque F est continue sur $[0, 1]$ (et même sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme), dérivable sur $]0, 1[$, d'après Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice de khôlle 516

On désire prouver que l'équation $\tan x = x$ a une infinité de solutions sur $]0, +\infty[$.

- Méthode ① : En étudiant $f(x) = \tan x - x$ sur $I_n = [n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ où $n \in \mathbb{N}$.
- Méthode ② : En appliquant Rolle à $g(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ sur $J_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

- La fonction f est continue sur I_n avec $f(n\pi) = -n\pi \leq 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x < \frac{\pi}{2} + n\pi}} f(x) = +\infty$. D'après le TVI, elle s'annule au moins une fois.

Pour justifier que $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x < \frac{\pi}{2} + n\pi}} f(x) = +\infty$ on pose $x = \frac{\pi}{2} + n\pi - h$ avec $h \rightarrow 0^+$. Par π -périodicité, on a

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{1}{\tan(h)} \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} +\infty.$$

On a donc une solution dans I_n , donc une infinité, car elles ont deux à deux distinctes (elles sont dans des intervalles disjoints).

2. La fonction g est continue sur J_n , dérivable sur J_n donc sur $\mathring{J}_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[$. On a $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sin(n\pi) = 0 = g\left(\frac{1}{n+1}\right)$. D'après Rolle, il existe $c_n \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[$ tel que $g'(c_n) = 0$. Mais si $x \in J_n$

$$g'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + x \times \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Ainsi $g'(c_n) = 0 \iff \sin\left(\frac{\pi}{c_n}\right) - \frac{\pi}{c_n} \cos\left(\frac{\pi}{c_n}\right) = 0$. Si $\cos\left(\frac{\pi}{c_n}\right) = 0$ alors $\sin\left(\frac{\pi}{c_n}\right) = 0$ ce qui est impossible, car $\sin^2\left(\frac{\pi}{c_n}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{c_n}\right) = 1$. On peut diviser par $\cos\left(\frac{\pi}{c_n}\right)$ et posant $x_n = \frac{\pi}{c_n}$, on a $\tan(x_n) - x_n = 0$. On a donc une infinité de solutions (les c_n sont deux à deux distincts, donc les x_n aussi).

Exercice de khôlle 517

Soit f continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il existe $c_n \in]0, 1[$ tel que $f'(c_n) = nc_n^{n-1}$.
- On suppose que f est strictement concave. Montrer que c_n est unique.

Solution :

- On cherche à appliquer Rolle à une fonction g et à obtenir $g'(c_n) = f'(c_n) - nc_n^{n-1} = 0$. Cela semble clair. On pose $g(x) = f(x) - x^n$ qui est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ car f et $x \mapsto x^n$ le sont. On a $g(0) = 0 - 0 = 0$ et $g(1) = 1 - 1 = 0$. On peut appliquer Rolle et c'est fini.
- Dans ce cas f' est strictement décroissante. La fonction définie g' est alors strictement décroissante en tant que somme de f' et de $x \mapsto -nx^{n-1}$ qui sont décroissantes. Mais alors g' est injective, il y a donc unicité de c_n .

Remarque : g' est bien injective car $x < y \implies g'(x) > g'(y)$.

Exercice de khôlle 518

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, dérivable 2 fois sur $]0, 1[$ et telle que

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \text{ et } f(1) = 1$$

- En utilisant g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - K_1 x^2$ où K_1 est tel que $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f''(\alpha)}{8}$.
- En utilisant h définie sur $[0, 1]$ par $h(x) = f(x) - K_2(x-1)^2$ avec K_2 bien choisi, montrer qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f''(\beta)}{8} - 1$.
- En déduire qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $|f^{(2)}(c)| \geq 4$.

Solution : Quel que soient les valeurs de K_1 et K_2 , les fonction g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et dérivables 2 fois sur $]0, 1[$ car f l'est.

1. Avant tout K_1 existe et vaut $4f\left(\frac{1}{2}\right)$. Puisque $g \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on peut appliquer Rolle. Il existe $c_1 \in]0, 1[$ tel que $g'(c_1) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - 2K_1x$ d'où $g'(0) = 0$. On applique alors Rolle à g' , qui est aussi dérivable sur $]0, 1[$ donc sur $]0, c_1[$. Il existe $\alpha \in]0, c_1[\subset]0, 1[$ tel que $g''(\alpha) = 0$. Mais $g''(x) = f''(x) - 2K_1$ d'où

$$f''(\alpha) - 2K_1 = f''(\alpha) - 8f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ donne } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f''(\alpha)}{8}$$

2. De la même manière, on choisit K_2 tel que $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, d'où $K_2 = 4\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right) = 4\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)$. On applique Rolle (on peut) sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car $h(1) = f(1) = 1$. Il existe $c_2 \in]0, 1[$ tel que $h'(c_2) = 0$. Mais $h'(x) = f'(x) - 2K_2(x - 1)$ d'où $h'(1) = 0$. On applique Rolle sur $[c_2, 1]$, il existe β tel que $h''(\beta) = 0$. Ceci donne

$$f''(\beta) - 2K_2 = 0 \text{ d'où } 1 - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{f''(\beta)}{8}$$

3. Puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, l'un des deux est plus grand (ou égal) à $\frac{1}{2}$ (par l'absurde s'ils sont tous les deux dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ la somme est dans $[0, 1[$ donc ne peut être égale à 1) ce qui donne

$$f''(\alpha) \geq 4 \text{ ou } f''(\beta) \leq -4$$

On choisit $c = \alpha$ dans le premier cas et $c = \beta$ dans le second.

Remarque : En réalité, il existe une formule de Taylor (pas au programme en PCSI) qui dit que : Si f est $\in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, dérivable 2 fois sur $\hat{I}$, pour $(a, b) \in I^2$, il existe $c \in \hat{I}$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2}f''(c)$$

Si on applique cette formule sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a directement l'existence de α et β tels que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{8}f''(\alpha) = \frac{1}{8}f''(\alpha) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= f(1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right)f'(1) + \frac{1}{8}f''(\beta) = 1 + \frac{1}{8}f''(\beta) \end{aligned}$$

d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}f''(\alpha)$ et $1 - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}f''(\beta)$.

Exercice de khôlle 519

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, dérivable 3 fois sur $]0, 1[$ et telle que

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = f''(0) = 0 \\ f(1) &= 1 \text{ et } f'(1) = f''(1) = 0 \end{aligned}$$

1. En utilisant g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - K_1x^3$ où K_1 est tel que $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(3)}(c)}{48}$.
2. En utilisant h définie sur $[0, 1]$ par $h(x) = f(x) - K_2(x - 1)^3$ avec K_2 bien choisi, montrer qu'il existe $d \in]0, 1[$ tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{f^{(3)}(d)}{48}$.
3. En déduire qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f^{(3)}(\alpha) \geq 24$.

Solution : Quel que soient les valeurs de K_1 et K_2 , les fonction g et h sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ et dérivables 3 fois sur $]0, 1[$ car f l'est.

1. Avant tout K_1 existe et vaut $8f\left(\frac{1}{2}\right)$. Puisque $g \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, $g(0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, on peut appliquer Rolle. Il existe $\beta_1 \in]0, 1[$ tel que $g'(\beta_1) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - 3K_1x^2$ d'où $g'(0) = 0$. On applique alors Rolle à g' , qui est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc sur $[0, \beta_1]$. Il existe $\beta_2 \in]0, 1[$ tel que $g''(\beta_2) = 0$. Mais $g''(x) = f''(x) - 6K_1x$ d'où $g''(0) = 0$. La fonction g'' est continue sur $[0, 1]$ donc sur $[0, \beta_2]$, dérivable sur $]0, \beta_2[$, avec Rolle, il existe $c \in]0, \beta_2[\subset]0, 1[$ tel que

$$g^{(3)}(c) = 0 \text{ ce qui donne } f^{(3)}(c) = 6K_1 = 48f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ soit } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(3)}(c)}{48}.$$

2. De la même manière, on choisit K_2 tel que $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, d'où $K_2 = 8\left(f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 8\left(1 - f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. On applique Rolle (on peut) sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car $h(1) = f(1) = 1$. Il existe $\gamma_1 \in]0, 1[$ tel que $h'(\gamma_1) = 0$. Mais $h'(x) = f'(x) - 3K_2(x-1)^2$ d'où $h'(1) = 0$. On applique Rolle sur $[\gamma_1, 1]$, il existe γ_2 tel que $h''(\gamma_2) = 0$ et puisque $h''(1) = 0$, un dernier petit Rolle assure l'existence de $d \in]0, 1[$ tel que

$$h^{(3)}(d) = 0 \text{ ce qui donne } f^{(3)}(d) = 6K_2 = 48\left(1 - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \text{ soit } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{f^{(3)}(d)}{48}$$

3. Parmi $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $1 - f\left(\frac{1}{2}\right)$, l'un des deux est plus grand que $\frac{1}{2}$ (cela revient à dire que ou bien $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$, ou bien $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ donc $1 - f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$). Et comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(3)}(c)}{48}$ et $1 - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(3)}(d)}{48}$, on choisit $\alpha = c$ ou $\alpha = d$ selon le cas.

Remarque : lire la remarque de l'exercice précédent pour obtenir une preuve immédiate.

Exercice de khôlle 520

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que :

$$\forall x > 0, \exists c > 0, f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

Solution : Sans aucun doute le TAF ! On pose $g(t) = f(t) - f(-t)$. Pour $x > 0$, g est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ car f l'est sur $\mathbb{R}$ et par composition $x \mapsto f(-x)$ aussi. Il existe donc $c \in]0, x[$ (donc $c > 0$) tel que

$$g(x) - g(0) = xg'(c)$$

sachant que $g(0) = 0$ et que $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = f'(t) + f'(-t)$, on a le résultat.

Exercice de khôlle 521

(★) Montrer que

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln n}{n^2}$$

Solution : Soit $f(x) = \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ (pour que $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) = f(n)$), pour $n \geq 1$, la fonction f est définie, continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$ avec

$$\forall x \in]n, n+1[, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} f(x)$$

Le TAF permet alors d'affirmer qu'il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que

$$\frac{1 + \ln(n)}{(n+1)^2} f(n) \leq \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1 - \ln c_n}{c_n^2} f(c_n)$$

Puisque $n \leq c_n \leq n+1 \sim n$ on a $c_n \sim n$ et ainsi $1 - \ln c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - \ln n$ (car $1 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\ln(n))$) enfin puisque $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (croissances comparées), on a $\frac{\ln c}{c} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par continuité de l'exponentielle, $f(c_n) = \exp\left(\frac{\ln c}{c_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $f(c_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. Au final on a donc

$$\frac{1 - \ln c_n}{c_n^2} f(c_n) \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice de khôlle 522

En utilisant le TAF, montrer que l'équation $2^x + 3^x = 5^x$ où $x > 0$ a une unique solution (dont la valeur est un mystère?).

Solution : Cette équation équivaut à $5^x - 3^x = 2^x$. Analyse : Soit x une solution (il y en a une qui vaut $x = 1$, le mystère est levé). On pose $f(t) = t^x$ qui est définie, continue sur $[3, 5]$ et dérivable sur $]3, 5[$. Il existe $c \in]3, 5[$ tel que

$$f(5) - f(3) = 5^x - 3^x = (5 - 3) f'(c) = 2xc^{x-1}$$

Puisque $5^x - 3^x = 2^x$, on en déduit que $2xc^{x-1} = 2^x$ soit (on a $c \neq 0$)

$$x = \left(\frac{2}{c}\right)^{x-1} \text{ d'où (mon ami Hélène) } \ln x = (x-1) \ln\left(\frac{2}{c}\right)$$

Ah mais, on sait (le saviez-vous?) que $x-1$ et $\ln(x)$ ont même signe. Si $x \neq 1$, on a donc $\frac{\ln x}{x-1} > 0$, absurde car $\ln\left(\frac{2}{c}\right) < 0$ puisque $c > 3$ (donc $\frac{2}{c} < 1$). La seule solution possible est donc $x = 1$ et comme c'est bien une solution, c'est la seule.

Exercice de khôlle 523

Soit f définie sur $]0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = x^2 + ax + b - \ln(x) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que f s'annule au plus 2 fois sur $\mathbb{R}$.

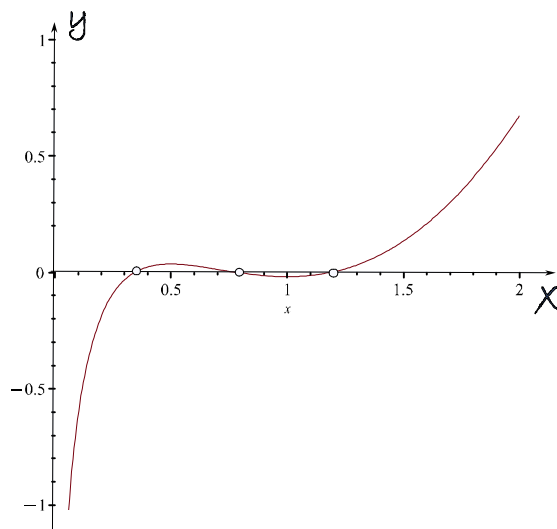
Solution : Par l'absurde si f s'annule 3 fois sur $\mathbb{R}$ en $x_1 < x_2 < x_3$. Puisque $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ et f est dérivable sur $]0, +\infty[$, on peut appliquer Rolle sur $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$. Il existe donc $c_1 \in]x_1, x_2[$ et $c_2 \in]x_2, x_3[$ tels que

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

Mais pour $x > 0$, $f'(x) = 2x + a - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + ax - 1}{x}$. On en déduit que c_1 et c_2 sont deux racines distinctes de $2x^2 + ax - 1$ (de l'intérêt d'avoir un intervalle ouvert dans la conclusion du théorème de Rolle). Ceci est impossible car $2x^2 + ax - 1 = 0$ a au plus deux racines réelles dont le produit vaut -1 . Une des racines est donc négative!

Remarque ① : Cela se généralise, si $f(x) = P(x) - \ln x$ où $\deg P = n$ de coefficient dominant positif alors f s'annule au plus n fois sur $]0, +\infty[$. Et par les mêmes idées, $f(x) = P(x) - \arctan x$ s'annule au plus $n+1$ fois.

Remarque ② : Si on considère $f(x) = x^2 + ax + b + \ln(x)$, le même type de raisonnement permet d'affirmer que f a au plus 3 racines. L'exemple de $f(x) = x^2 - 3x + \left(2 - \frac{1}{50}\right) + \ln(x)$, dont le graphe est ci dessous et d'étude élémentaire (la faire!)

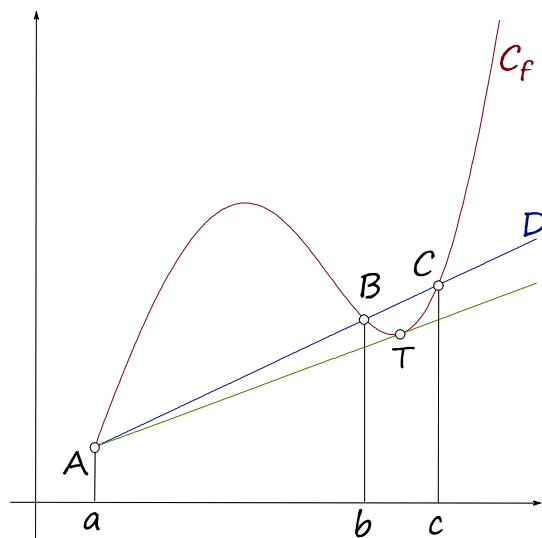


montre que l'on peut effectivement s'annuler 3 fois.

On généralise à $f(x) = P(x) + \ln x$ où $\deg P = n$ de coefficient dominant positif qui s'annule au plus $n + 1$ fois.

Exercice de khôlle 524

Soit f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$. On note A le point d'abscisse a du graphe $\mathcal{C}_f$ de f . On suppose qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ passant par A qui coupe $\mathcal{C}_f$ en deux autres points B et C d'abscisse $b < c$ respectivement. Montrer qu'il existe un point T de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente en T à $\mathcal{C}_f$ passe par A .



Solution : Si l'on pose $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ alors $g(b) = g(c)$. Cette égalité signifie simplement que l'on peut calculer la pente de $\mathcal{D}$ entre les points A et B , ou entre A et C , et que l'on obtient le même résultat ! Pour vous convaincre, si $\mathcal{D}$ a pour équation $y = f(a) + p(x - a)$, les hypothèses assurent l'existence de $b < c$ dans $]a, +\infty[$ tels que $f(b) = f(a) + p(b - a)$ et $f(c) = f(a) + p(c - a)$. Le calcul de p donne bien $g(b) = g(c)$. La fonction g est bien

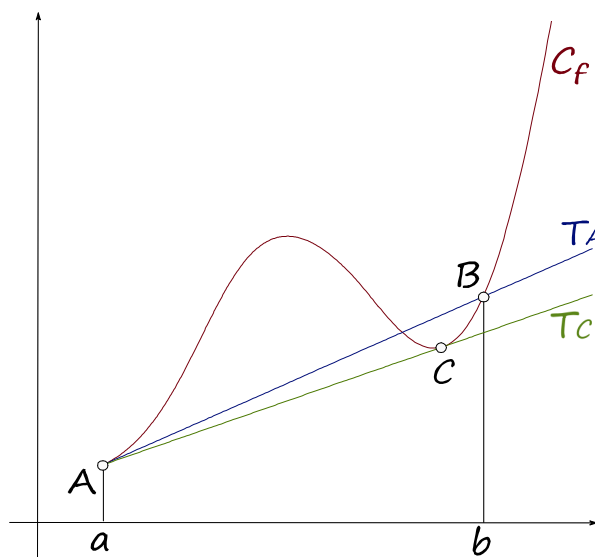
définie, continue sur $[b, c]$, dérivable sur $]b, c[$. On peut appliquer Rolle, il existe $t \in]b, c[$ tel que $g'(t) = 0$. Mais

$$g'(t) = 0 \iff \frac{f'(t)(t-a) - (f(t) - f(a))}{(t-a)^2} = 0 \iff f(a) = f(t) + f'(t)(a-t)$$

Puisqu'une équation de la tangente en T est $y = f(t) + f'(t)(x-a)$, la condition $f(a) = f(t) + f'(t)(a-t)$ traduit l'appartenance de A à ladite tangente.

Exercice de khôlle 525

Soit f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$. On note A le point d'abscisse a du graphe $\mathcal{C}_f$ de f . On suppose que la tangente, noté $\mathcal{T}_A$, en A coupe $\mathcal{C}_f$ en un autre point B . Montrer qu'il existe un point C où la tangente $\mathcal{T}_C$ à $\mathcal{C}_f$ passe par A .



Solution : Même genre d'exercice que le précédent. On pose $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $g(a) = f'(a)$. Puisque f est dérivable en a , on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ ce qui donne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

Ainsi g est bien définie, continue sur $[a, b]$. Par quotient, g est dérivable sur $]a, b[$. Enfin $g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$ puisque $B \in \mathcal{T}_A$. On peut appliquer Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais

$$g'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)(c-a) - (f(c) - f(a))}{(c-a)^2} = 0 \iff f(a) = f(c) + f'(c)(a-c)$$

La dernière condition traduit bien $A \in \mathcal{T}_C$ (une équation de $\mathcal{T}_C$ est $y = f(c) + f'(c)(x-c)$).

Exercice de khôlle 526

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = a + b + c$.

Solution : On pose $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$. On cherche donc à montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$f(\alpha) = F'(\alpha) = F(1)$$

Puisque $F(0) = 0$, en appliquant le TAF à F (on peut car F est polynomiale donc continue et dérivable sur $[0, 1]$), on obtient

$$\exists \alpha \in]0, 1[, F(1) - F(0) = F'(\alpha) \times (1 - 0) = f(\alpha)$$

15.7 Le théorème limite de la dérivée

Exercice de khôlle 527

Soit $f(x) = \frac{1 - \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ si $x \neq 0$, peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Le prolongement obtenu est-il $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Solution : En tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas, on peut affirmer que

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$. En $x = 0$ on a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x} = -\frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. On pose alors $f(0) = 0$, ainsi f est continue en 0. Si $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{ch}(x)(1 - \operatorname{ch} x)}{\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1 - \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}$$

d'où

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

D'après le théorème limite de la dérivée, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice de khôlle 528

Soit $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ si $x \in]-\pi, \pi[$ et $x \neq 0$, peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Le prolongement obtenu est-il $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$?

Solution : En tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, on peut affirmer que $f \in \mathcal{C}^1(]-\pi, \pi[\setminus \{0\})$. En $x = 0$ on a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. On pose alors $f(0) = 0$, ainsi f est continue en 0. Si $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x - \cos x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

D'après le théorème limite de la dérivée, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Remarque : En fait, avec $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, on a $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} = \cot(\frac{x}{2})$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice de khôlle 529

Soit f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

Solution : Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ car $x \mapsto \frac{1}{x(x-1)}$ l'est (c'est une fraction rationnelle) et exp également.

En 0 : On a $\frac{1}{x(x-1)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$, car $x-1 \sim -1$. Ainsi $X = \frac{1}{x(x-1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$. Puisque $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, on en déduit, par composition de limites, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. On pose donc $f(0) = 0$, f devient ainsi continue en 0 donc sur $[0, 1[$.

Pour $x \in]0, 1[$, on a $f'(x) = -\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$. Si on pose $X = \frac{1}{x(x-1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ alors

$$\frac{1}{x^2(x-1)^2} \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right) = X^2 e^X$$

Par les CC, on sait que $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$, ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2(x-1)^2} \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right) = 0$ et avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} -(2x-1) = 1$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

Par le théorème limite de la dérivée, f devient dérivable en 0 avec $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ d'où f est $\mathcal{C}^1$ en 0 puis sur $[0, 1[$.

En 1 : On procède de même en posant $x = 1 - h$ avec $\lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0^+$. On a $\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{(1-h)h} \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$. On pose alors $f(1) = 0$. Puis on a encore $\frac{1}{x^2(x-1)^2} \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right) = X^2 e^X$ avec $X = \frac{1}{x(x-1)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$ ce qui permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0$ et ainsi f devient $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ avec $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.

Remarque : On peut aussi remarquer que $f(1-x) = f(x)$ (le graphe de f est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$). Si on prolonge f en 0 pour obtenir une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$, alors, par composition $x \mapsto f(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$. Conclusion, f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

15.8 Convexité

Exercice de khôlle 530

Soient $a, b \geq 0$ tels que $a + b = 1$, montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, 1 + x^a y^b \leq (1+x)^a (1+y)^b$$

Solution : Le $a + b = 1$ permet d'écrire que $a = 1 - b$, on pense convexité. Comme la convexité c'est

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

On voudrait une somme à droite, on passe au $\ln$ (on peut, tous les termes sont plus grands que 1). On montre donc que

$$\ln(1 + x^a y^{1-a}) \leq a \ln(1+x) + (1-a) \ln(1+y)$$

Puis on écrit que

$$1 + x^a y^{1-a} = 1 + e^{a \ln x + (1-a) \ln y}$$

C'est bon ! On pose $f(t) = \ln(1 + e^t)$ qui est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} = \frac{1+e^t-1}{1+e^t} = 1 - \frac{1}{1+e^t} \text{ d'où } f''(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \geq 0.$$

f est donc convexe sur $\mathbb{R}$, ainsi pour $x > 0$ et $y > 0$

$$f(a \ln x + (1-a) \ln y) \leq af(\ln x) + (1-a)f(\ln y)$$

ce qui donne

$$\ln \left(1 + e^{a \ln x + (1-a) \ln y} \right) \leq a \ln \left(1 + e^{a \ln x} \right) + (1-a) \ln \left(1 + e^{(1-a) \ln y} \right)$$

soit

$$\ln(1 + x^a y^{1-a}) \leq a \ln(1 + x^a) + (1-a) \ln(1 + y^{1-a})$$

Et par croissance de exp

$$1 + x^a y^{1-a} \leq (1 + x)^a (1 + y)^{1-a}$$

Remarque : On peut vérifier que c'est encore vrai si $x = 0$ ou $y = 0$ (fastidieux car il y a les cas particuliers $0^0 \dots$).

Exercice de khôlle 531

1. Etudier la convexité de $f : t \mapsto 2^{x^t}$ où $x > 0$ est fixé.
2. Montrer que, $\forall x > 0$, $2^x + 2^{x^3} \geq 2^{x^2+1}$.

Solution :

1. Si $x > 0$, on a $f(t) = \exp(x^t \ln 2) = \exp(\ln(2) \times e^{t \ln(x)})$ qui est donc défini et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} f'(t) &= \ln(2) \ln(x) e^{t \ln(x)} \times f(t) \\ f''(t) &= \ln(2) \ln^2(x) e^{t \ln(x)} \times f(t) + \ln(2) \ln(x) e^{t \ln(x)} \times f'(t) \\ &= \ln(2) \ln^2(x) e^{t \ln(x)} \times f(t) + \ln^2(2) \ln^2(x) e^{2t \ln(x)} \times f(t) \\ &= \ln(2) \ln^2(x) e^{t \ln(x)} \times f(t) \times \left(1 + \ln(2) e^{2t \ln(x)} \right) \end{aligned}$$

qui est positif (on n'oublie pas que f l'est). Ainsi f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. L'inégalité demandée s'écrit $f(1) + f(3) \geq 2f(2)$ soit

$$f(2) \leq \frac{f(1) + f(3)}{2}$$

et comme 2 est juste, pile poil au milieu de 1 et 3, on peut l'écrire

$$f\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 1 + \frac{1}{2} \times 3\right) \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right) f(1) + \frac{1}{2} f(3)$$

ce qui est vrai par convexité de f sur $[1, 3]$ (la convexité c'est $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$).

Exercice de khôlle 532

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier la convexité de $f_n : x \mapsto x^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour $x \geq 0$, on a $x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$.

Solution :

1. La dérivée seconde (on a $f_n \in \mathcal{C}^2$ car polynomiale) vaut $n(n+1)x^{n-1} \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ (même si $n = 0$, f_0 est affine donc convexe). Ainsi f_n est convexe sur $[0, +\infty[$ (et f_0 est aussi concave!).

Sur $] -\infty, 0]$, cela dépend de la parité de $n - 1$.

Si $n - 1$ est pair (donc n impair), on a $n(n+1)x^{n-1} \geq 0$ sur $] -\infty, 0]$ et ainsi f_n est convexe sur $\mathbb{R}$.

Si $n - 1$ est impair on a $n(n+1)x^{n-1} \leq 0$ sur $] -\infty, 0]$ et ainsi f_n est concave sur $] -\infty, 0]$.

On confirme avec $n = 1$, car $f_1(x) = x^2$ convexe sur $\mathbb{R}$ et $f_2(x) = x^3$ qui est concave puis convexe.

2. Cela ressemble à une inégalité du type «courbe au dessus de sa tangente». La tangente en $x = 1$ à f_n a pour équation

$$y = f'_n(1)(x - 1) + f_n(1) = (n+1)(x - 1) + 1 = (n+1) - n$$

par convexité sur $[0, +\infty[$ de f_n on a

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = x^{n+1} \geq (n+1) - n$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Exercice de khôlle 533

Soit f continue, strictement décroissante et convexe sur I . Montrer que f^{-1} est convexe sur $f(I)$.

Solution : Les hypothèses sur f permettent d'affirmer que f est une bijection de I sur $f(I)$, ainsi f^{-1} existe. Soient $(y_1, y_2) \in f(I)^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, il s'agit de prouver que

$$f^{-1}((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) \leq (1 - \lambda)f^{-1}(y_1) + \lambda f^{-1}(y_2)$$

Si on pose $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ alors

$$(1 - \lambda)f^{-1}(y_1) + \lambda f^{-1}(y_2) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$$

par convexité de f , on a

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

On sait que f^{-1} a la même monotonie que f , donc est décroissante, ainsi

$$f^{-1}(f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)) \geq f^{-1}((1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2))$$

mais $f^{-1} \circ f = Id_I$, $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ d'où

$$(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 = (1 - \lambda)f^{-1}(y_1) + \lambda f^{-1}(y_2) \geq f^{-1}((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$$

et c'est fini.

Exercice de khôlle 534

Soit f convexe sur I et $x < y < z$ dans I , montrer que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$.

Solution : Un calcul simple donne

$$\Delta = f(x)(z - y) - f(y)(z - x) + f(z)(y - x)$$

Puisque $y \in]x, z[$, il existe donc $\lambda \in]0, 1[$ tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$ d'où

$$z - y = z - \lambda x - (1 - \lambda)z = \lambda(z - x)$$

$$y - x = \lambda x + (1 - \lambda)z - x = (1 - \lambda)(z - x)$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\Delta &= \lambda(z-x)f(x) - f(y)(z-x) + (1-\lambda)(z-x)f(z) \\ &= (z-x)(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(z) - f(y))\end{aligned}$$

Or par convexité de f

$$f(y) = f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$$

d'où le résultat.

Exercice de khôlle 535

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, convexe et telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\forall x \geq 0, \int_0^x f(t) dt \leq \frac{x^2}{2} f'(x)$$

Solution : On pose $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} f'(x) - \int_0^x f(t) dt$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec (TFA)

$$\varphi'(x) = \frac{x^2}{2} f''(x) + x f'(x) - f(x)$$

Si on pose $\psi(x) = x f'(x) - f(x)$, alors ψ est dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $\psi'(x) = x f''(x) + f'(x) - f'(x) = x f''(x) \geq 0$. Ainsi $\psi(x) \geq \psi(0) = 0$ et ceci prouve que $\varphi' \geq 0$. D'où $\forall x \geq 0, \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ et c'est fini.

Remarque : ① Si on s'intéresse au cas d'égalité, on cherche donc f de classe $\mathcal{C}^2$, convexe, telle que $f(0) = 0$ et vérifiant

$$\forall x \geq 0, \int_0^x f(t) dt \leq \frac{x^2}{2} f'(x)$$

La fonction φ est donc nulle d'où $\varphi' = 0$. Ceci impose $\forall x \geq 0, \frac{x^2}{2} f''(x) = 0$ et $x f'(x) - f(x) = 0$ (une somme de deux nombres positifs est nulle si les deux nombres le sont). La résolution de $x f'(x) - f(x) = 0$ (équation différentielle simple) donne $f(x) = Kx$ puis $f(0) = 0$ donne $f = 0$.

② Plus généralement, sans imposer la convexité, on peut chercher les fonctions pour lesquelles $\forall x \geq 0, \int_0^x f(t) dt = \frac{x^2}{2} f'(x)$. Par analyse, une telle fonction vérifie $\varphi' = 0$ donc est solution de

$$\frac{x^2}{2} y'' + x y' - y = 0$$

Si on pose $y(x) = x g(x)$ alors $h = g'$ est solution de

$$x^2 \left(\frac{x}{2} h'(x) + 2h(x) \right) = 0$$

On résout, sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $\frac{x}{2} h'(x) + 2h(x) = 0$ qui donne $h(x) = C \exp\left(-\int \frac{4}{x} dx\right) = \frac{C}{x^4} = g'(x)$ d'où

$$g(x) = \frac{C_1}{x^3} + C_2 \text{ et } f(x) = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x$$

Puisque f est définie en $x = 0$ on a $C_1 = 0$. Enfin (synthèse), on vérifie que si $f(x) = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ alors $\forall x \geq 0$, $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^2}{2} f'(x)$, ce qui est facile!

Exercice de khôlle 536

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\operatorname{ch}(x)}$.

1. Etudier la convexité de f .
2. En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \ln\left(\frac{\exp(\operatorname{ch} x) + \exp(\operatorname{ch} y)}{2}\right)$.
3. Montrer, de même que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2}\right)$.
4. Question subsidiaire : Quelle est la meilleure des deux inégalités ?

Solution : Banal ... f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de ch et $\exp$ qui le sont.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \operatorname{sh}(x) e^{\operatorname{ch}(x)}$ puis $f''(x) = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}^2(x)) e^{\operatorname{ch}(x)} \geq 0$ car $\exp$, ch et sh^2 sont positives sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a donc (prendre $\lambda = \frac{1}{2}$ dans l'inégalité qui définit la convexité, c'est le moment de relire le cours !)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Puisque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, on peut « passer » au $\ln$. Par croissance du $\ln$, on a donc

$$\ln\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \ln\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^{\operatorname{ch} x} + e^{\operatorname{ch} y}}{2}\right)$$

3. On s'inspire de ce qui précède. Par croissance de $\exp$, il suffit de prouver que $\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq \frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2}$.

Remarque : Bien lire ce qui précède. On peut être tenté de dire que par croissance de $\ln$, $\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2}\right)$ équivaut à $\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq \frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2}$. C'est faux si on ne précise pas que $\ln$ est strictement croissante. En revanche, si on prouve que $\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq \frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2}$, par croissance de $\exp$, on en déduit que $\exp\left(\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2}\right)$.

Donc pour résumer, il suffit de prouver que $g : x \mapsto \ln \operatorname{ch}(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Elle est bien définie sur $\mathbb{R}$ (car $\operatorname{ch} \geq 1$) et y est dérivable ($\ln$ et ch le sont). Avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch} x}, f''(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$$

Et c'est gagné !

4. Pour déterminer quelle est la meilleure inégalité il faut comparer

$$\ln\left(\frac{\exp(\operatorname{ch} x) + \exp(\operatorname{ch} y)}{2}\right) \text{ et } \exp\left(\frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2}\right)$$

ce qui, par stricte croissance du $\ln$, revient à comparer

$$\ln\left(\ln\left(\frac{\exp(\operatorname{ch} x) + \exp(\operatorname{ch} y)}{2}\right)\right) \text{ et } \frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2} = \frac{\ln(\ln(\exp(\operatorname{ch} x))) + \ln(\ln(\exp(\operatorname{ch} y)))}{2}$$

En posant $X = \exp(\operatorname{ch} x) \geq e$ et $Y = \exp(\operatorname{ch} y) \geq e$, on est amené à comparer

$$\ln\left(\ln\left(\frac{X+Y}{2}\right)\right) \text{ et } \frac{\ln \ln(X) + \ln \ln(Y)}{2}$$

donc à déterminer la convexité de $h : X \mapsto \ln(\ln X)$ sur $[e, +\infty[$. La fonction h est dérivable deux fois sur $[e, +\infty[$ avec

$$\forall X \geq e, h'(X) = \frac{1}{X \ln(X)} \text{ et } h''(X) = -\frac{\ln X + 1}{X^2 \ln X} < 0 \text{ car } \ln X \geq 1$$

Ainsi h est concave, d'où

$$\ln \left(\ln \left(\frac{X+Y}{2} \right) \right) \geq \frac{\ln \ln(X) + \ln \ln(Y)}{2}$$

ce qui prouve que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ln \left(\frac{\exp(\operatorname{ch} x) + \exp(\operatorname{ch} y)}{2} \right) \geq \exp \left(\frac{\ln(\operatorname{ch} x) + \ln(\operatorname{ch} y)}{2} \right)$. La seconde inégalité est la meilleure.

Exercice de khôlle 537

Soit f dérivable deux fois et convexe sur $]0, +\infty[$.

1. Justifier que $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

2. Montrer que pour $c \in]0, 4[$,

$$f \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \frac{cf \left(\frac{x+y}{c} \right) + (4-c)f \left(\frac{x+y}{4-c} \right)}{4}$$

Solution : La définition de f convexe sur $]0, +\infty[$ est

$$\forall (X, Y) \in]0, +\infty[^2, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda)f(X) + \lambda f(Y)$$

1. Avec $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

2. Avec $\lambda = \frac{c}{4} \in [0, 1]$ car $c \in]0, 4[$, $X = \frac{x+y}{c}$ et $Y = \frac{x+y}{4-c}$, on a

$$\lambda X + (1-\lambda)Y = \frac{c}{4} \frac{x+y}{c} + \frac{4-c}{4} \frac{x+y}{4-c} = \frac{x+y}{2}$$

On a le résultat.

Exercice de khôlle 538

Soit f dérivable deux fois et convexe sur $]0, +\infty[$, montrer que $g : x \mapsto xf \left(\frac{1}{x} \right)$ est également convexe.

Solution : Par composition et produit, g est dérivable deux fois avec, pour $x > 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= f \left(\frac{1}{x} \right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) \right) = f \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} f' \left(\frac{1}{x} \right) \\ g''(x) &= -\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) - \left(-\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) \right) - \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} f'' \left(\frac{1}{x} \right) \right) \text{ car} \end{aligned}$$

Ainsi $g''(x) \geq 0$ car $f''(x) \geq 0$ et $x^3 \geq 0$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi g est également convexe.

Exercice de khôlle 539

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ et f définie par

$$f(x) = \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(x)} \right)$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est prolongeable par continuité en $x = 0$.
2. Le prolongement obtenu est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que $\forall a \in]1, +\infty[, \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$,

$$\operatorname{sh} \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \operatorname{sh} \left(\frac{x+y}{2} \right) \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(x)}} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(ay)}{\operatorname{sh}(y)}}$$

Solution :

1. le signe de $\operatorname{sh} u$ est celui de u , ainsi $\operatorname{sh}(ax)$ et $\operatorname{sh}(x)$ ont même signe si $x \neq 0$ (car $a > 0$). Ceci permet d'affirmer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Puis $\operatorname{sh} u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donc $\operatorname{sh}(ax) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ax$ et $\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a$ donc $\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a$. En posant $f(0) = \ln a$ on prolonge f par continuité en $x = 0$.
2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (quotient, composée). Si $x \neq 0$, on a (rappel : $\ln \frac{u}{v} = \ln |u| - \ln |v|$ dans le cas général)

$$f(x) = \ln |\operatorname{sh}(ax)| - \ln |\operatorname{sh}(x)|$$

d'où

$$f'(x) = \frac{a \operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{sh}(ax)} - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{a \operatorname{ch}(ax) \operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(ax) \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(ax) \operatorname{sh}(x)}$$

Avec un DL, on a

$$\begin{aligned} a \operatorname{ch}(ax) \operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(ax) \operatorname{ch}(x) &= a \left(1 + \frac{a^2 x^2}{2} \right) \times x - \left(ax + \frac{a^3 x^3}{6} \right) (1) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= \frac{a^3 x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{a^3 x^3}{3} \end{aligned}$$

d'où

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{a^3 x^3}{3}}{ax \times x} = \frac{ax}{3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Le théorème limite de la dérivée s'applique (f continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$) et permet d'affirmer que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$.

3. Sur $]0, +\infty[$, f est dérivable deux fois et (ne pas oublier $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$)

$$\begin{aligned} f''(x) &= a^2 \frac{\operatorname{sh}^2(ax) - \operatorname{ch}^2(ax)}{\operatorname{sh}^2(ax)} - \frac{\operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} = -\frac{a^2}{\operatorname{sh}^2(ax)} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{sh}^2(ax) - a^2 \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{sh}^2(x) \operatorname{sh}^2(ax)} \\ &= (\operatorname{sh}(ax) - a \operatorname{sh}(x)) \times \frac{\operatorname{sh}(ax) + a \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}^2(x) \operatorname{sh}^2(ax)} \end{aligned}$$

Puisque a et x sont positifs (donc $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{sh}(ax)$ aussi), le signe de $f''(x)$ est celui de $\varphi(x) = \operatorname{sh}(ax) - a \operatorname{sh}(x)$ dont la dérivée (elle est bien dérivable) vaut $a \operatorname{ch}(ax) - a \operatorname{ch}(x) = a(\operatorname{ch}(ax) - \operatorname{ch}(x))$. Si $x \geq 0$, puisque $a > 1$ on a $ax \geq x$ et par croissance du ch , on a $\operatorname{ch}(ax) \geq \operatorname{ch}(x)$. Ceci prouve que $\varphi' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ donc que φ est croissante et ainsi $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$. Conclusion $f'' \geq 0$ sur $]0, +\infty[$ et f est bien convexe.

4. On en déduit (prendre $\lambda = \frac{1}{2}$ dans l'inégalité qui définit la convexité, c'est le moment de relire le cours!)

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

ce qui donne

$$\ln \left(\frac{\operatorname{sh} \left(a \frac{x+y}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{x+y}{2} \right)} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(x)} \right) + \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(ay)}{\operatorname{sh}(y)} \right) \right)$$

Avec $\frac{1}{2}(\ln(u) + \ln(v)) = \ln(\sqrt{u}\sqrt{v})$ si u et v sont positifs, on a

$$\ln \left(\frac{\operatorname{sh} \left(a \frac{x+y}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{x+y}{2} \right)} \right) \leq \ln \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(x)}} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(ay)}{\operatorname{sh}(y)}}$$

par croissance de $\exp$ puis multiplication par $\operatorname{sh} \left(\frac{x+y}{2} \right)$ qui est positif, on a le résultat.

Exercice de khôlle 540

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$ et en déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan t} \cos(t) dt \geq 1$.

Pouvez-vous donner une majoration de cette intégrale ?

Solution : La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde est elle-même donc positive) donc au-dessus de sa tangente en $x=0$. L'équation de cette tangente est $y=x+1$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

En particulier avec $x = \tan t$ où $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $e^{\tan t} \geq 1 + \tan t$. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $\cos t \geq 0$ d'où

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad e^{\tan t} \cos(t) \geq (1 + \tan(t)) \cos(t) = \cos(t) + \sin(t)$$

Puisque $0 \leq \frac{\pi}{4}$ (bornes dans le bon sens), par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan t} \cos(t) dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(t) + \sin(t)) dt = [\sin t - \cos t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

Une majoration est facile à obtenir, par exemple, puisque, pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $\tan t \leq 1$ et $\cos t \leq 1$, par croissance de $\exp$, de l'intégrale on a $I \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^1 \times 1 dt = \frac{\pi e}{4}$. Mais ce n'est pas l'idée de l'exercice qui parle de convexité. Pour $x \in [0, 1]$ (ensemble des valeurs de $\tan t$ lorsque $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$), on a $e^x \leq 1 + (e-1)x$. En effet, par convexité, la courbe est sous la corde qui a pour équation $y = 1 + (e-1)x$. On en déduit que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad e^{\tan t} \cos(t) \leq (1 + (e-1)\tan t) \cos t = \cos t - \sin t + e \sin t$$

d'où (croissance de l'intégrale)

$$I \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - \sin t + e \sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(t) + \sin(t)) dt + e \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) dt = 1 + \frac{e}{2} (2 - \sqrt{2})$$

Exercice de khôlle 541

Soit f définie sur $I =]-\ln(1+\sqrt{2}), +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh}(x))$.

1. Justifier que f est bien définie sur I .
2. Déterminer $\alpha > 0$ le plus grand possible pour lequel f est concave sur $[0, \alpha]$.
3. En déduire un encadrement de la fonction sh sur $[0, \alpha]$.

Solution :

1. La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}\left(-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) &= \frac{e^{-\ln(1+\sqrt{2})} - e^{\ln(1+\sqrt{2})}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-1} - 1 - \sqrt{2}\right) = -1\end{aligned}$$

Ainsi, par stricte croissance de sh, pour $x > -\ln(1+\sqrt{2}) \implies \operatorname{sh}(x) > -1$ ce qui prouve que f est bien définie sur I .

2. La fonction f est dérivable deux fois sur I en tant que composée de fonctions dérivables deux fois avec , pour $x \in I$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}(x)} \text{ et } f''(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)(1+\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{ch}^2(x)}{(1+\operatorname{sh}(x))^2} = \frac{\operatorname{sh}(x) - 1}{(1+\operatorname{sh}(x))^2} \text{ car } \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$$

On a vu que $\operatorname{sh}(-\ln(1+\sqrt{2})) = -1$, par imparité du sh, on a $\operatorname{sh}(\ln(1+\sqrt{2})) = -(-1) = 1$ et par stricte croissance du sh,

$$\operatorname{sh}(x) \geq 1 \iff x \geq \ln(1+\sqrt{2})$$

Ainsi pour $x \in [0, \alpha]$ où $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$, on a $f''(x) \leq 0$, la fonction f est concave sur $[0, \alpha]$.

3. En particulier sur $[0, \alpha]$, la courbe de f est au dessus de sa corde et sous sa tangente (en 0, en α ou en tout point de $[0, \alpha]$). L'équation de la corde est

$$y - f(0) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0}x$$

Avec $\operatorname{sh}(\alpha) = 1$, on a $f(0) = 0$, $f(\alpha) = \ln(2)$ d'où

$$\forall x \in [0, \alpha], \frac{\ln 2}{\ln(1+\sqrt{2})}x \leq \ln(1+\operatorname{sh}(x)) \text{ (courbe au dessus de sa corde)}$$

ce qui donne, par croissance de l'exponentielle

$$\forall x \in [0, \alpha], \exp\left(\frac{\ln 2}{\ln(1+\sqrt{2})}x\right) - 1 \leq \operatorname{sh} x$$

L'équation de la tangente en $x = 0$ est $y = f(0) + f'(0)x = x$ ainsi

$$\forall x \in [0, \alpha], f(x) \leq x \text{ (courbe en dessous de sa tangente à l'origine)}$$

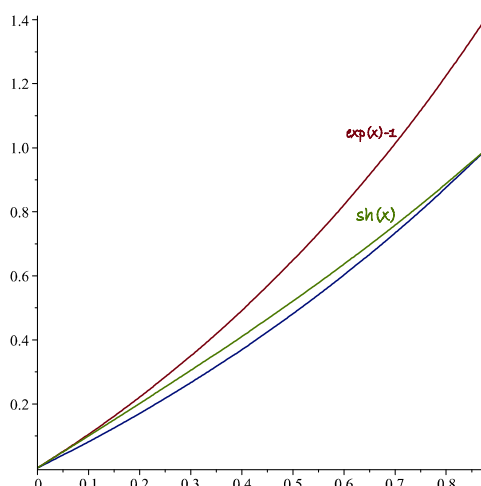
d'où par croissance de l'exponentielle

$$\forall x \in [0, \alpha], \operatorname{sh}(x) \leq e^x - 1$$

En combinant les deux, on a

$$\forall x \in [0, \alpha], \exp\left(\frac{\ln 2}{\ln(1+\sqrt{2})}x\right) - 1 \leq \operatorname{sh}(x) \leq e^x - 1$$

Le graphe ci dessous illustre cette double inégalité.



Remarque : On peut aussi écrire que le graphe de f est sous la tangente en $x = \alpha$. Cette dernière a pour équation $y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$. Avec $\text{sh}(\alpha) = 1$ on a $f(\alpha) = \ln 2$ puis $\text{ch}^2(\alpha) = 1 + \text{sh}^2(\alpha) = 2$ d'où $\text{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$ et $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on obtient

$$\forall x \in [0, \alpha], f(x) \leq \ln(2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \ln(1 + \sqrt{2}))$$

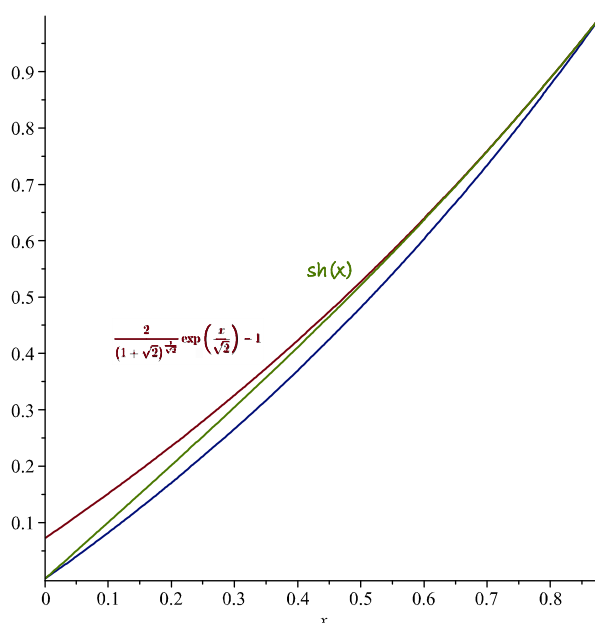
d'où

$$\text{sh}(x) + 1 \leq \exp\left(\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \ln(1 + \sqrt{2}))\right)$$

On simplifie avec $\exp\left(\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \ln(1 + \sqrt{2}))\right) = \frac{2}{(1 + \sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ pour obtenir

$$\forall x \in [0, \alpha], \exp\left(\frac{\ln 2}{\ln(1 + \sqrt{2})}x\right) - 1 \leq \text{sh}(x) \leq \frac{2}{(1 + \sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 1$$

ce qui est bien meilleur comme le montre le graphe ci dessous



Exercice de khôlle 542

Un peu de géométrie

1. Soit f concave sur I et α, β, γ trois réels positifs tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Pour $(a, b, c) \in I^3$, on admet que $\alpha a + \beta b + \gamma c \in I$. Montrer que

$$f(\alpha a + \beta b + \gamma c) \geq \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c)$$

2. Soient $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles aux sommets A, B et C d'un vrai triangle, montrer que

$$\sin(\hat{A}) + \sin(\hat{B}) + \sin(\hat{C}) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3. Montrer le résultat admis.

Solution :

1. C'est un cas particulier de l'inégalité de Jensen.

Si $\gamma = 1$, alors $\alpha + \beta = 0$, et puisque α et β sont positifs, cela implique $\alpha = \beta = 0$. Dans ce cas, on a bien

$$f(\alpha a + \beta b + \gamma c) = f(c) \geq \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c) = f(c)$$

Sinon, on pose $(1 - \lambda) = \alpha + \beta$ et $\lambda = \gamma$, $x = \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}$ et $y = c$. On a $x \in I$ car on peut écrire

$$x = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)a + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)b \text{ (de la forme } (1 - \lambda)a + \lambda b \text{ où } (a, b) \in I^2 \text{ et } \lambda \in [0, 1])$$

par concavité, on a

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)x + \lambda y) &\geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) = (\alpha + \beta)f(x) + \gamma f(c) \\ \text{et } f\left(\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}\right) &= f\left(\left(1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)a + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)b\right) \geq \left(1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)f(a) + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)f(b) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (\alpha + \beta)\left(\left(1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)f(a) + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)f(b)\right) + \gamma f(c) = \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c)$$

2. La fonction $\sin$ est concave sur $I = [0, \pi]$ et on sait que $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ sont dans $[0, \pi]$. Avec $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ on obtient

$$\sin\left(\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\sin(\hat{A}) + \frac{1}{3}\sin(\hat{B}) + \frac{1}{3}\sin(\hat{C})$$

Mais dans un triangle, la somme des angles vaut π donc $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ et $\sin\left(\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion

$$\sin(\hat{A}) + \sin(\hat{B}) + \sin(\hat{C}) \leq 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Quitte à renommer les protagonistes, on peut supposer que $a \leq b \leq c$. On a alors (par positivité de α, β et γ)

$$a = \alpha a + \beta a + \gamma a \leq \alpha a + \beta b + \gamma c \leq \alpha c + \beta c + \gamma c = c$$

donc $\alpha a + \beta b + \gamma c \in [a, c]$. Mais I est un intervalle, donc si a et c sont dans I , on a $[a, c] \subset I$.

Remarque : Si f est convexe, on a de même $f(\alpha a + \beta b + \gamma c) \leq \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c)$. Par exemple avec $f(x) = \tan^2(x)$ qui est convexe ($f''(x) = \frac{2 + 4\sin^2(x)}{\cos^4(x)}$) sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ on a (puisque $\frac{\hat{A}}{2}, \frac{\hat{B}}{2}$ et $\frac{\hat{C}}{2}$ sont dans $[0, \frac{\pi}{2}[$).

$$\tan^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)\right) = \tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}\left(\tan^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)\right)$$

ce qui donne

$$\tan^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) \geq 1$$

Exercice de khôlle 543

Soit $a > 0$ un réel et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in [-a, a]$, $e^x \leq \lambda x + \mu$. Déterminer les meilleurs minorants possibles de λ et μ .

Solution : Analyse : Si $\forall x \in [-a, a]$, $e^x \leq \lambda x + \mu$ alors avec $x = -a$ puis $x = a$

$$e^{-a} \leq -\lambda a + \mu \text{ et } e^a \leq \lambda a + \mu$$

En sommant les inégalités, on a $2 \operatorname{ch} a \leq 2\mu$ d'où $\operatorname{ch} a \leq \mu$. Mais alors

$$e^a \leq \lambda a + \mu \leq \lambda a + \operatorname{ch} a$$

d'où

$$\frac{e^a - \operatorname{ch} a}{a} = \frac{\operatorname{sh} a}{a} \leq \lambda$$

Synthèse : La fonction $\exp$ est convexe sur $[-a, a]$ donc sous sa corde. La corde qui lie les points $A(-a, e^{-a})$ et $B(a, e^a)$ a pour équation

$$y - e^{-a} = \frac{e^a - e^{-a}}{a - (-a)}(x - (-a))$$

soit

$$y = e^{-a} + \frac{2 \operatorname{sh} a}{2a}(x + a) = \frac{\operatorname{sh} a}{a}x + \operatorname{ch} a$$

Ainsi pour $x \in [-a, a]$, $e^x \leq \frac{\operatorname{sh} a}{a}x + \operatorname{ch} a$. Conclusion, pour $\lambda = \frac{\operatorname{sh} a}{a}$ et $\mu = \operatorname{ch} a$, on a bien

$$\forall x \in [-a, a], e^x \leq \lambda x + \mu.$$

La valeur minimale de λ est donc $\frac{\operatorname{sh} a}{a}$ et la valeur minimale de μ est $\operatorname{ch} a$.

Exercice de khôlle 544

1. Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \max(u(x), v(x)) &= \frac{u(x) + v(x) + |u(x) - v(x)|}{2} \\ \textcircled{2} \quad u(x) &= \max(u(x), 0) - \max(-u(x), 0) \end{aligned}$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que f peut s'écrire comme la différence de deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Pour ① : Si $u(x) \geq v(x)$ alors $\max(u(x), v(x)) = u(x)$ et $|u(x) - v(x)| = u(x) - v(x)$ d'où $\max(u(x), v(x)) = \frac{u(x) + v(x) + |u(x) - v(x)|}{2}$. De même si $u(x) < v(x)$ alors $\max(u(x), v(x)) = v(x)$ et $|u(x) - v(x)| = -(u(x) - v(x))$, d'où $\max(u(x), v(x)) = \frac{u(x) + v(x) + |u(x) - v(x)|}{2}$.
Pour ② : Si $u(x) \geq 0$ alors $\max(u(x), 0) = u(x)$ et $\max(-u(x), 0) = 0$ d'où $u(x) = \max(u(x), 0) - \max(-u(x), 0)$. Si $u(x) < 0$ alors $\max(u(x), 0) = 0$, $-u(x) > 0$ d'où $\max(-u(x), 0) = -u(x)$ et on a bien $u(x) = \max(u(x), 0) - \max(-u(x), 0)$.
2. Analyse : Il s'agit de trouver g et h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $g'' \geq 0$, $h'' \geq 0$ et $f = g - h$. Le plus simple est de poser

$$g'' = \max(f'', 0) \text{ et } h'' = \max(-f'', 0)$$

On prend alors des primitives de g'' et h'' telles que $f'(0) = g'(0) - h'(0)$, puis des primitives de g' et h' telles que $g(0) - h(0) = f(0)$ et c'est gagné.

Synthèse : On pose $\varphi(x) = \max(f''(x), 0)$ et $\psi(x) = \max(-f''(x), 0)$. La première question permet d'affirmer que φ et ψ sont bien continues sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f'(0) + \int_0^x \varphi(t) dt \text{ et } \psi_1(x) = \int_0^x \psi(t) dt \\ g(x) &= f(0) + \int_0^x \varphi_1(t) dt \text{ et } h(x) = \int_0^x \psi_1(t) dt \end{aligned}$$

D'après le TFA, les fonctions φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées égales à $\varphi'_1 = \varphi$ et $\psi'_1 = \psi$. Toujours d'après le TFA, on a g et h dérivables de dérivées égales à φ_1 et ψ_1 donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'' = \max(f'', 0) \geq 0 \text{ et } h'' = \max(-f'', 0) \geq 0$$

On a donc g et h convexes. De plus $f'' = g'' - h''$ sur $\mathbb{R}$, ainsi $f' - (g - h)'$ est constante égale à $f'(0) - (g'(0) - h'(0)) = f'(0) - (\varphi_1(0) - \varphi_2(0)) = 0$. On a donc $f' = (g - h)'$, pour finir $f(0) = g(0) - h(0)$ permet d'affirmer que $f = g - h$.

Remarque : Une fonction affine étant convexe (sa dérivée est nulle), on a, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = (g(x) + ax + b) - (h(x) + ax + b)$$

Ce qui prouve que g et h ne sont pas uniques.

Exercice de khôlle 545

L'inégalité d'entropie ou de Gibbs

1. Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur un intervalle I non trivial.

(a) Montrer que $\forall (a, x) \in I^2, \varphi(x) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)(x - a)$.

(b) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow I$ continue, montrer que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t)) dt$$

(Indication $a = \int_0^1 f(t) dt$ et $x = f(t)$)

2. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, strictement positive et telle que $\int_0^1 f(t) dt = 1$, montrer que

$$\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq 0$$

(La quantité $-\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt$ est l'entropie de Shannon).

3. Soient $f, g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, strictement positives, d'intégrale égale à 1, en justifiant l'inégalité

$$x \ln x \geq x - 1 \text{ pour } x > 0,$$

montrer que

$$\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq \int_0^1 f(t) \ln(g(t)) dt$$

Solution :

1. (a) L'inégalité traduit simplement que la courbe est au dessus de la tangente en a .

(b) On pose (c'est donné) $a = \int_0^1 f(t) dt$ et $x = f(t) \in I$ ceci $\forall t \in [0, 1]$, ainsi

$$\varphi(f(t)) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)(f(t) - a)$$

On intègre cette inégalité sur $[0, 1]$ pour avoir

$$\int_0^1 \varphi(f(t)) dt \geq \int_0^1 (\varphi(a) + \varphi'(a)(f(t) - a)) dt$$

Mais (ne pas oublier que a et $\varphi(a)$ sont des nombres qui ne dépendent pas de t)

$$\int_0^1 (\varphi(a) + \varphi'(a)(f(t) - a)) dt = \varphi(a) + \varphi'(a) \left(\int_0^1 f(t) dt - a \right) = \varphi(a) = \varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right)$$

ce qui donne le résultat demandé.

2. On pose $\varphi(x) = x \ln x$ qui est convexe sur $I =]0, +\infty[$ (car $\varphi''(x) = \frac{1}{x} > 0$) et on applique le résultat précédent qui donne

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt$$

Mais $\int_0^1 f(t) dt = 1$ par hypothèse donc $\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) = 0$.

3. L'inégalité $x \ln x \geq x - 1$ est l'inégalité $\varphi(x) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)(x - a)$ avec $a = 1$ (car $\varphi'(x) = 1 + \ln x$). On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt - \int_0^1 f(t) \ln(g(t)) dt &= \int_0^1 f(t) \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) \times g(t) dt \end{aligned}$$

Mais pour $t \in [0, 1]$, on a $\frac{f(t)}{g(t)} \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) \geq \frac{f(t)}{g(t)} - 1$ d'où, en intégrant,

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) \times g(t) dt \geq \int_0^1 \left(\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right) g(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt = 1 - 1 = 0$$

Conclusion

$$\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq \int_0^1 f(t) \ln(g(t)) dt$$

Exercice de khôlle 546

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ et on définit les fonctions g

et h par

$$g(x) = f(x) - M \frac{(x-a)(b-x)}{2} \text{ et } h(x) = f(x) + M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

- Justifier l'existence de M .
- Etudier la convexité de g et de h .
- En déduire que $\forall x \in [a, b]$, on a $|f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$.

Solution :

- Puisque f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, la fonction f'' est continue sur le segment $[a, b]$ donc est bornée. En réalité M est même un max.
- Puisque $p : x \mapsto \frac{(x-a)(b-x)}{2}$ et f sont dérivables deux fois sur $[a, b]$ (p est un polynôme), par combinaison linéaire, les deux fonctions g et h sont dérivables deux fois sur $[a, b]$ avec, $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{b-x}{2} - \frac{x-a}{2} = \left(\frac{a+b}{2} - x\right), p''(x) = -1 \\ g''(x) &= f''(x) + M \text{ et } h''(x) = f''(x) - M \end{aligned}$$

Mais, $\forall x \in [a, b]$, $-M \leq f''(x) \leq M$ d'où

$$g''(x) \geq 0 \text{ et } h''(x) \leq 0$$

Conclusion : g est convexe et h est concave sur $[a, b]$.

- De $f(a) = f(b) = 0$, on déduit que $g(a) = g(b) = 0$ et $h(a) = h(b) = 0$. Soit $A = (a, 0)$ et $B = (b, 0)$, alors (AB) est une corde pour g et pour h dont une équation est $y = 0$. Par convexité, $\mathcal{C}_g$ est sous cette corde et $\mathcal{C}_h$ est au dessus. On en déduit que

$$\forall x \in [a, b], g(x) \leq 0 \text{ et } h(x) \geq 0$$

ce qui donne

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2} \text{ et } f(x) \geq -M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

donc $-M \frac{(x-a)(b-x)}{2} \leq f(x) \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$, d'où

$$|f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

Petit rappel : Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-y \leq x \leq y$ alors $|x| \leq y$ (et $y \geq 0$ car $-y \leq y$ donc $0 \leq 2y$).

Remarque : Le même résultat est établi, avec le théorème de Rolle dans l'exercice : [Majoration de \$f\$ par le maximum de la dérivée seconde](#).

Exercice de khôlle 547

Soient f et g convexes sur $\mathbb{R}$ avec g croissante, on veut montrer que $h = g \circ f$ est également convexe.

1. Le prouver en supposant f et g dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$.
2. Le prouver sans aucune hypothèse de dérivabilité sur f et g .

Solution :

1. Par hypothèse, on a $f'' \geq 0$ et $g'' \geq 0$. Par composition h est dérivable deux fois avec

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, h'(x) &= g'(f(x)) \times f'(x) \\ h''(x) &= g''(f(x)) \times f'(x) \times f'(x) + g'(f(x)) \times f''(x) \\ &= g''(f(x)) \times (f'(x))^2 + g'(f(x)) \times f''(x) \end{aligned}$$

Puisque f est convexe, on a $f''(x) \geq 0$, de même la convexité de g donne $g''(f(x)) \geq 0$. Enfin, $(f'(x))^2 \geq 0$ et la croissance de g donne $g'(f(x)) \geq 0$. Conclusion $h''(x) \geq 0$ en tant que somme et produit de nombres positifs.

Remarque : On remarque que si g est concave et décroissante, alors h est concave.

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par convexité de f , on a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Par croissance de g , on en déduit que

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) = g(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq g((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) \quad (1)$$

Mais g étant convexe, $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$g((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda)g(X) + \lambda g(Y)$$

Avec $X = f(x)$ et $Y = f(y)$, on obtient

$$g((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) \leq (1-\lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y)) = (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y) \quad (2)$$

Par transitivité avec (1) et (2), on a bien

$$h(f((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq (1-\lambda)h(x) + \lambda h(y)$$

ce qui prouve la convexité de $h = g \circ f$.

Exercice de khôlle 548

1. Soit $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et convexe. Montrer qu'il existe $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et telle que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, F(y) - F(x) \geq (y - x) f(x) \quad (*)$$

2. Soient $F, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, F(y) - F(x) \geq (y - x) f(x) \quad (*)$$

Montrer que f est croissante et que F est convexe.

Solution :

1. Puisque F est dérivable et convexe, le graphe de F est au dessus de ses tangentes. La tangente au point d'abscisse x à C_F a pour équation $Y = F'(x)(X - x) + F(x)$. On en déduit, avec $f(x) = F'(x)$, que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, F(y) \geq (y - x) f(x) + F(x)$$

Enfin f est bien croissante puisque F est convexe.

2. Montrons que f est croissante. Si on échange les rôles de x et de y , on obtient

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, F(x) - F(y) \geq (x - y) f(y)$$

A cette inégalité on ajoute $(*) : \forall (x, y) \in [a, b]^2, F(y) - F(x) \geq (y - x) f(x)$. On en déduit que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, 0 \geq (y - x) (f(x) - f(y))$$

ce qui équivaut à $\forall (x, y) \in [a, b]^2, (y - x) (f(y) - f(x)) \geq 0$ et signifie que $y - x$ et $f(y) - f(x)$ sont de même signe. Ceci équivaut à la croissance de f .

Montrons que F est convexe. Soit $(x, y) \in [a, b]^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On pose $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. On applique $(*)$ à y et z et à x et z pour obtenir

$$F(x) \geq F(z) + (x - z) f(z) \quad (1)$$

$$F(y) \geq F(z) + (y - z) f(z) \quad (2)$$

On multiplie (1) par λ et (2) par $1 - \lambda$ qui sont bien positifs, puis on somme pour avoir

$$\lambda F(x) + (1 - \lambda) F(y) \geq \lambda F(z) + \lambda (x - z) f(z) + (1 - \lambda) F(z) + (1 - \lambda) (y - z) f(z)$$

Puisque

$$\lambda (x - z) + (1 - \lambda) (y - z) = \lambda x + (1 - \lambda)y - z = 0$$

on obtient

$$\lambda F(x) + (1 - \lambda) F(y) \geq F(z) = F(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

ce qui, par définition de la convexité, prouve que F est bien convexe.

Exercice de khôlle 549

Soit f une fonction convexe sur l'intervalle borné $]a, b[$ où $a < b$ sont deux réels.

- On suppose f dérivable sur $]a, b[$, montrer que f est minorée, est-elle nécessairement majorée ?
- Si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$, f est-elle minorée ? (On admet que si f est convexe sur $]a, b[$ alors f est continue sur $]a, b[$).

Solution :

1. Si f est dérivable sur $]a, b[$ alors « C_f est au dessus de ses tangentes». L'équation de la tangente en $c = \frac{a+b}{2}$ (ou en $c \in]a, b[$ quelconque) est $y = f'(c)(x - c) + f(c)$. On sait que $\forall x \in]a, b[, f(x) \geq g(x)$. Mais sur $[a, b]$, g admet un minimum m car elle est continue, donc $\forall x \in]a, b[, g(x) \geq m$. On en déduit que m minore f également.

Remarque : On a même $m = \min(g(a), g(b))$ (selon le signe de $f'(c)$).

En revanche, en considérant, par exemple $f(x) = \frac{1}{x-a}$ qui est convexe sur $]a, +\infty[$ (sa dérivée seconde est $f''(x) = \frac{2}{(x-a)^3}$) donc sur $]a, b[$ mais pas minorée, rien ne permet d'affirmer que f est nécessairement majorée!

2. Le résultat demeure. On utilise la position par rapport à une corde. Soit $c < d$ deux réels de $]a, b[$. On sait que sur $]a, c[$ et sur $[d, b[$ le graphe de f est au dessus de la corde (CD) où $C : (c, f(c))$ et $D : (d, f(d))$ donc est minorée! En effet, si $g(x) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c) + f(c)$ est l'équation de la corde (CD) alors g admet un minimum sur $[a, c]$ (car g continue sur un segment) et un minimum sur $[d, b]$ donc est minorée sur $[a, c] \cup [d, b]$. Puisque $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, c] \cup [d, b]$, f est également minorée sur $[a, c] \cup [d, b]$. Enfin, sur le segment $[c, d]$, f est continue donc minorée. Conclusion, f est minorée sur $]a, b[$.

Remarque : On peut également se passer de la continuité de f . En effet, soient $c \in]a, b[$. Par croissance de pentes des cordes issues d'un point, on a pour $x \in]a, c[$ et $\beta \in]c, b[$ fixé

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c}$$

d'où (avec $c - x \geq 0$)

$$f(c) - f(x) \leq (c - x) \frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c}$$

ce qui donne

$$f(c) - (c - x) \frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c} \leq f(x)$$

Sur $]a, c[$, $g(x) = f(c) - (c - x) \frac{f(\beta) - f(c)}{\beta - c}$ est minorée, donc f est minorée sur $]a, c[$. De même si $\alpha \in]a, c[$, on a pour $y \in]c, b[$

$$\frac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha} \leq \frac{f(y) - f(c)}{y - c}$$

ce qui donne $f(y) \geq f(c) + (y - c) \frac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha}$ pour $y \in]c, b[$ et montre que f est minorée sur $]c, b[$. Conclusion f est minorée sur $]a, b[$.

Exercice de khôlle 550

1. Soit f convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, montrer que $f \geq 0$.
2. Soit f convexe sur $\mathbb{R}$, on suppose que le graphe $\mathcal{C}_f$, de f admet une droite asymptote en $+\infty$, montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote.

Solution :

1. Par l'absurde, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, il existe $b > a$ tel que $f(a) < f(b)$ (sinon, on aurait $f(x) \leq f(a)$ pour $x \geq a$ et par PAL, $0 \leq f(a)$). Soit $A : (a, f(a))$ et $B : (b, f(b))$. On sait que le graphe de f est au dessus de la corde (AB) pour $x \geq b$, donc

$$\text{Pour } x \geq b, f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Puisque $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ (car $b > a$ et $f(b) > f(a)$), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) = +\infty$. Absurde !

2. Si l'asymptote a pour équation $y = mx + p$, on va appliquer le résultat précédent à $g(x) = f(x) - (mx + p)$. La fonction g est bien convexe (c'est évident si on suppose f dérivable deux fois). En effet, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - m(\lambda x + (1 - \lambda)y) - p \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - m(\lambda x + (1 - \lambda)y) - p \text{ car } f \text{ convexe} \end{aligned}$$

Mais avec $p = \lambda p + (1 - \lambda)p$ (pas con ! c'est belge !), on a

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - m(\lambda x + (1 - \lambda)y) - p &= \lambda(f(x) - mx - p) + (1 - \lambda)(f(y) - my - p) \\ &= \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \end{aligned}$$

Et bien sûr, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ car $\mathcal{D} : y = mx + p$ est asymptote. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$, ce qui signifie que la courbe est au dessus de son asymptote (partout et pas que au voisinage de $+\infty$).

Exercice de khôlle 551

Soit $f :]0, +\infty[$ convexe. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite, noté ℓ , dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Indication : considérer $t(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Solution : La fonction t est la pente «issue du point $A : (1, f(1))$ », i.e. la pente de la droite AM où $A : (1, f(1))$ et $M : (x, f(x))$. On sait, pour une fonction convexe, que cette fonction est croissante sur $]1, +\infty[$. Ainsi t a une limite, notée ℓ , dans $\overline{\mathbb{R}}$. Puis

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{x - 1}{x} + \frac{f(1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$$

CHAPITRE 16

ENSEMBLE, DÉNOMBREMENT, ARITHMÉTIQUE

16.1 Fonction indicatrice

Exercice de khôlle 552

Soient $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$, montrer que

$$(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$$

Solution : Rappel : $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ ainsi $\mathbb{1}_{X \setminus Y} = \mathbb{1}_X \mathbb{1}_{\overline{Y}}$ et $\mathbb{1}_{\overline{(X \setminus Y)}} = 1 - \mathbb{1}_{X \setminus Y} = 1 - \mathbb{1}_X \mathbb{1}_{\overline{Y}}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)} &= \mathbb{1}_{A \setminus B} \mathbb{1}_{\overline{A \setminus C}} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} (1 - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{C}}) \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} - \mathbb{1}_A^2 \mathbb{1}_{\overline{B}} \mathbb{1}_{\overline{C}} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} \mathbb{1}_{\overline{C}} \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} (1 - \mathbb{1}_{\overline{C}}) = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} \mathbb{1}_C \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{1}_{(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\overline{B}} \times \mathbb{1}_C = \mathbb{1}_{(A \setminus B)} \times \mathbb{1}_C = \mathbb{1}_{(A \setminus B) \cap C}$$

et

$$\mathbb{1}_{(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_{\overline{B}} = \mathbb{1}_{A \cap C} \times \mathbb{1}_{\overline{B}} = \mathbb{1}_{(A \cap C) \setminus B}$$

Exercice de khôlle 553

Soient $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ et $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

1. Que représente $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$?

2. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cup B \cup C} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_{A \cap B} - \mathbb{1}_{A \cap C} - \mathbb{1}_{B \cap C} + \mathbb{1}_{A \cap B \cap C}$ puis en déduire

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

3. Montrer que, dans l'intervalle $\llbracket 0 ; n \rrbracket$ il y a exactement $\left\lfloor \frac{n+p}{p} \right\rfloor$ multiples de p .

4. Dans $\llbracket 0 ; n \rrbracket$, combien d'entiers sont multiples de 2 ou 3 ou 5 ?

Solution :

1. Cours, c'est $|A|$ le cardinal de A .
2. Avec les fonctions indicatrices, c'est simple. Mais on peut le présenter de manière plus élégante en remarquant que $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 1 - x_2 - x_3 - x_1 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3$. Puisque $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A \cup B \cup C} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A \cup B \cup C}} = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \\ \text{où } x_1 &= \mathbf{1}_A, x_2 = \mathbf{1}_B \text{ et } x_3 = \mathbf{1}_C\end{aligned}$$

et c'est fini. On en déduit que

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{A \cup B \cup C}(x) \\ &= \sum_{x \in E} (\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) + \mathbf{1}_C(x) - \mathbf{1}_{A \cap B}(x) - \mathbf{1}_{A \cap C}(x) + \mathbf{1}_{A \cap B \cap C}(x)) \\ &= \sum_{x \in E} \mathbf{1}_A(x) + \sum_{x \in E} \mathbf{1}_B(x) + \sum_{x \in E} \mathbf{1}_C(x) - \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{A \cap B}(x) - \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{A \cap C}(x) + \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{A \cap B \cap C}(x) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

3. Il s'agit de dénombrer les entiers de la forme $k \times p$ de l'intervalle $\llbracket 0 ; n \rrbracket$. Mais soit $k \in \mathbb{N}$

$$0 \leq k \times p \leq n \iff 0 \leq k \leq \frac{n}{p}$$

Si $k \leq \frac{n}{p}$, alors par définition de la partie entière (le plus grand $\dots$), on a $k \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Réciproquement, si $k \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$

alors puisque $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \frac{n}{p}$, on a $k \leq \frac{n}{p}$. Donc

$$0 \leq k \times p \leq n \iff k \in \left[\left[0 ; \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right] \right]$$

Il y a donc $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+p}{p} \right\rfloor$ multiples de p dans l'intervalle $\llbracket 0 ; n \rrbracket$.

Par exemple dans $\llbracket 0 ; 17 \rrbracket$, il y a $\left\lfloor \frac{22}{5} \right\rfloor = 4$ multiples de 5, à savoir 0, 5, 10, 15.

4. Soit $A_p = \{k \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket \text{ et } k \text{ multiple de } p\}$, on a montré que $|A_p| = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1$ d'où

$$\begin{aligned}|A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+5}{5} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{n+6}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+10}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+15}{15} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{n+30}{30} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{15} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{n}{30} \right\rfloor + 1\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 554

Soit E un ensemble, pour $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ on définit $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que

$$\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$$

On utilisera le résultat de l'exercice type : $\mathbf{1}_{A \Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Solution : On détermine la fonction indicatrice de $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_C &= \mathbf{1}_{A \cap B} + \mathbf{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} \\ &= \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)\end{aligned}$$

car $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap B}) = \emptyset$ donc $\mathbb{1}_{A \cap B} \times \mathbb{1}_{\overline{A \cap B}} = \mathbb{1}_{(A \cap B) \cap (\overline{A \cap B})} = 0$. Pour simplifier, on pose $a = \mathbb{1}_A$ et $b = \mathbb{1}_B$, et on développe

$$ab + (1 - a)(1 - b) = 2ab - a - b + 1$$

d'où

$$\mathbb{1}_C = 1 - \mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_{\overline{A \Delta B}}$$

ce qui prouve que $C = \overline{A \Delta B}$ car ces deux ensembles ont même fonction indicatrice.

Exercice de khôlle 555

Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^2$, montrer que

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$$

Solution : On pose $a = \mathbb{1}_A$, $b = \mathbb{1}_B$ et $c = \mathbb{1}_C$ et on se souvient que $a^2 = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A \cap A} = \mathbb{1}_A = a$ et de même $b^2 = b$, $c^2 = c$.

On pose ensuite $U = (A \cap B) \cup (B \cap C)$, $V = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = U \cup (C \cap A)$, $X = (A \cup B) \cap (B \cup C)$, $Y = X \cap (C \cup A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_U &= \mathbb{1}_{A \cap B} + \mathbb{1}_{B \cap C} - \mathbb{1}_{A \cap B} \times \mathbb{1}_{B \cap C} \\ &= ab + bc - ab \times bc = ab + bc - abc \\ \mathbb{1}_V &= \mathbb{1}_U + \mathbb{1}_{C \cap A} - \mathbb{1}_U \times \mathbb{1}_{C \cap A} \\ &= ab + bc - abc + ac - (ab + bc - abc)ac \\ &= ab + bc - abc + ac - abc - abc + abc \\ &= ab + ac + bc - 2abc \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_X &= \mathbb{1}_{A \cup B} \times \mathbb{1}_{B \cup C} = (a + b - ab)(b + c - bc) \\ &= ab + ac - abc + b + bc - bc - ab - abc + abc \\ &= ac + b - abc \\ \mathbb{1}_Y &= \mathbb{1}_X \times \mathbb{1}_{C \cup A} = (ac + b - abc)(a + c - ac) \\ &= ac + ac - ac + ab + bc - abc - abc - abc + abc \\ &= ab + ac + bc - 2abc \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{1}_V = \mathbb{1}_Y$ donc $V = Y$.

16.2 Dénombrement basique

Exercice de khôlle 556

Le code d'un cadenas est composé de quatre chiffres allant de 0 à 9.

- Combien de codes différents sont possibles ?
- Combien de codes sont composés de quatre chiffres distincts ?
- Combien de codes sont composés d'au moins deux chiffres identiques ?
- Combien de codes sont composés avec exactement trois chiffres distincts ?
- Combien de codes sont composés avec exactement deux chiffres distincts ?

Solution : Faire un code, c'est remplir quatre cases ou emplacement par un chiffre.

1. Un code est une 4-liste de $E = \llbracket 0 ; 9 \rrbracket$, il y a donc $|E|^4 = 10^4 = 10\,000$ codes.
2. Cette fois-ci c'est une 4-liste d'éléments deux à deux distincts, il y en a $A_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes.
3. Facile, c'est le nombre de codes moins ceux ayant quatre chiffres distincts, soit $10\,000 - 5040 = 4960$.
4. Exactement trois chiffres distincts c'est qu'il y a un chiffre en double. On choisit ce chiffre en double, soit 10 choix. Puis les deux emplacements de ce chiffre, soit $\binom{4}{2}$ choix. Puis pour le premier emplacement libre on a 9 choix (on ne reprend pas le chiffre en double) et enfin 8 choix pour le dernier emplacement. Au total $10 \times \binom{4}{2} \times 9 \times 8 = 4320$.
5. Avec exactement deux chiffres distincts, c'est un peu plus compliqué. En effet, il y a les codes ayant deux chiffres en double comme 1, 1, 2, 2 et ceux pour lesquels il y a deux chiffres dont l'un est en triple comme 1, 1, 1, 2. Pour le premier type : on choisit les deux chiffres distincts, soit $\binom{10}{2}$ choix. Pour le plus petit des deux, on choisit les deux emplacements, soit $\binom{4}{2}$ choix, et on met le plus grand dans les deux autres emplacements. On a donc $\binom{10}{2} \times \binom{4}{2}$ codes du premier type. Pour le second type, on choisit le chiffre qui est unique et celui en triple, soit 10×9 choix, puis l'emplacement du chiffre unique (4 choix). On a donc $10 \times 9 \times 4$ codes du second type. Au total, on a donc $\binom{10}{2} \times \binom{4}{2} + 10 \times 9 \times 4 = 630$ codes.

Exercice de khôlle 557

De combien de manières peut-on disposer huit tours sur l'échiquier de façon qu'en aucun endroit elles ne se menacent l'une et l'autre ? Rappel : Un échiquier est carré et a 64 cases. Les tours prennent selon les horizontales et les verticales.

Solution : Sur la première ligne (en commençant par le haut), on a 8 positions pour la tour. Ayant placé cette tour, sur la seconde ligne, il ne reste plus que 7 positions. En effet, la deuxième tour ne doit pas se trouver sur la même colonne que la première, sous peine de se retrouver en «prise». Pour la troisième tour, on a 6 positions $\dots$ Au total, $8! = 40\,320$ manières. On peut formaliser ainsi le problème. La tour t_i est placée sur la ligne i et la colonne c_i . La liste $(c_1, \dots, c_8)$ est une 8 liste d'éléments 2 à 2 distincts de $\llbracket 1 ; 8 \rrbracket$, on a donc $\frac{8!}{(8-8)!} = A_8^8 = 8!$ manières.

Exercice de khôlle 558

Combien y-a-t-il de carrés, à côtés parallèles aux quadrillage, dans un quadrillage de $n \times n$ cases ?

Indication : Chaque carré peut être repéré par son sommet le plus à gauche et le plus en haut.

Solution : Pour les carrés de côté 1, on a n^2 positions possibles. Pour les carrés de côté 2, on a $(n-1)^2$ positions possibles (on ne peut pas placer le sommet à la dernière ligne ni à la dernière colonne). Pour les carrés de côté k , on a $(n-k+1)^2$ positions possibles $\dots$

Au total on a $\sum_{k=1}^n (n-k+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ carrés.

Exercice de khôlle 559

Soit $n \geq 4$, on se donne n droites distinctes du plan, telles que deux distinctes ne soient pas parallèles et trois distinctes soient non concourantes.

- Combien y-a-t-il de points d'intersection en tout ?
- Combien de nouvelles droites ces points d'intersection forment-ils ? Vérifier avec $n = 4$.

Solution : On note $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ les n droites et pour $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, $M_{i,j} = \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j$.

- On peut même oser noter $\{i, j\}$ à la place de $M_{i,j}$. Il y a donc autant de points d'intersections que de partie à 2 éléments de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$, soit $\binom{n}{2}$ points d'intersections (cela revient à choisir deux droites parmi les n).
- Pour former une nouvelle droite, on choisit un point $M_{i,j} = \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j$ parmi les $\binom{n}{2}$ points d'intersection, puis un second point différent de $M_{i,j}$ parmi les $\binom{n}{2}$ points d'intersection mais en enlevant les points qui sont sur $\mathcal{D}_i$ ou sur $\mathcal{D}_j$ (sinon on n'a pas une nouvelle droite). On a donc pour le choix du second point

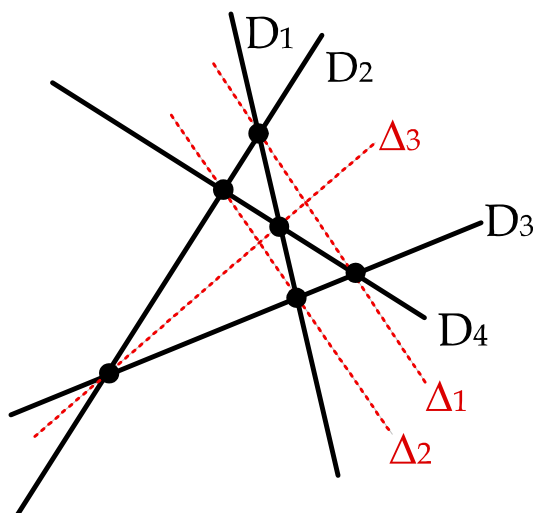
$$\binom{n}{2} - \underbrace{1}_{\text{On ne reprend pas } M_{i,j}} - 2 \underbrace{(n-2)}_{\text{les } \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_k \text{ avec } k \neq i \text{ et } k \neq j}$$

soit au total (on divise par 2, car on récupère deux fois toutes ces droites, on a mis un ordre dans le choix des points)

$$\frac{1}{2} \binom{n}{2} \times \left(\binom{n}{2} - 1 - 2(n-2) \right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

Vu le résultat, on peut procéder autrement. Une nouvelle droite est définie par l'intersection de deux couples de droites. On choisit donc 4 droites parmi n , soit $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ choix. Chaque quadruplet de droite (D_1, D_2, D_3, D_4) donne trois nouvelles droites

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= ((D_1 \cap D_2), (D_3 \cap D_4)) \\ \Delta_2 &= ((D_1 \cap D_3), (D_2 \cap D_4)) \\ \text{et } \Delta_3 &= ((D_1 \cap D_4), (D_3 \cap D_2)) \end{aligned}$$



D'où au total $3 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ nouvelles droites.

Exercice de khôlle 560

Sur un échiquier $n \times n$ où $n \geq 1$, combien peut-on placer $p \geq 1$ tours sans qu'aucune ne soit en prise par une autre ?

Solution : Méthode ① : Les tours doivent déjà être sur des lignes différentes. Donc si $p > n$, ce n'est pas possible.

Si $p \leq n$, on choisit donc les lignes où l'on place les tours, ce qui donne $\binom{n}{p}$ choix.

Puis pour la première ligne choisie (celle la plus en « haut »), on a n choix pour la colonne où place la première tour, puis pour la seconde ligne choisie, il reste $n - 1$ choix pour la colonne $\dots$ d'où $n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ choix (cela revient à choisir une p liste d'éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$, cette liste donne les indices de colonnes!).

Au total, on a donc

$$\binom{n}{p} \times \frac{n!}{(n-p)!} = p! \binom{n}{p}^2 \text{ possibilités}$$

Méthode ② : On attribue un numéro à chaque tour de 1 à p . On note $u(n, p)$ le nombre de manière de placer les p tours numérotées sans qu'aucune ne soit en prise. On place la première tour, il n'y a aucune contrainte, ce qui donne n^2 choix. Puisque les autres tours ne doivent pas être en prise, cela revient à enlever la ligne et la colonne où l'on vient de placer la tour. Ainsi

$$u(n, p) = n^2 \times u(n-1, p-1)$$

On sait que si $p > n$ alors $u(n, p) = 0$, on suppose donc $p \leq n$.

$$\begin{aligned} u(n, p) &= n^2 \times u(n-1, p-1) = n^2 \times (n-1)^2 \times u(n-2, p-2) \\ &= n^2 \times \dots \times (n-p+1)^2 \times u(n-p+1, 1) = n^2 \times \dots \times (n-p+1)^2 \\ &= \left(\frac{n!}{(n-p)!} \right)^2 = p!^2 \binom{n}{p}^2 \end{aligned}$$

Car $u(n-p+1, 1) = (n-p+1)^2$, on place une tour sur un échiquier (on peut aussi poser $u(n-p, 0) = 1$!). Enfin, on divise par $p!$ qui est le nombre de manière de permuter les p tours, et ainsi de ne plus tenir compte de la numérotation des tours !

Pour se convaincre, il suffit d'imaginer un échiquier sur lequel on a placé une tour blanche et une noire. On peut placer d'abord la blanche, puis la noire ou la noire puis la blanche et obtenir la même configuration

Exercice de khôlle 561

Soit $n \geq 1$, combien y a-t-il de couples (x, y) :

1. Dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ pour lesquels $x + y = n$?
2. Dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ pour lesquels $x = y$?
3. Dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ pour lesquels $x < y$?
4. Dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ pour lesquels $x \leq y$?
5. Dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; 2n \rrbracket$ pour lesquels $x < y$?
6. Dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ pour lesquels $|x - y| \leq 1$?

Solution :

1. Cela revient à choisir x (et ainsi $y = n - x$). Mais puisque $y \geq 1$, on a $x \leq n - 1$. On a donc autant de couple que de $x \in \llbracket 1 ; n - 1 \rrbracket$, donc $n - 1$.

Remarque : Si on considère le carré $\llbracket 1 ; n \rrbracket^2$, cela revient à compter le nombre de termes sur la diagonale qui

relie le couple $(n-1, 1)$ au couple $(1, n-1)$. Dans le tableau suivant, on a indiqué la valeur de la somme $x+y$.

$x \backslash y$	1	2	$\dots$	$n-1$	n
1	2	3		n	$n+1$
2	3				
$\vdots$					
$n-1$	n				
n	$n+1$				

2. Facile, il y a n couples car il y a n choix pour x , et ayant choisi x , y est déterminé. Il s'agit aussi du nombre de cases sur la diagonale du carré $\llbracket 1; n \rrbracket^2$.

3. Méthode ① : On choisit deux entiers dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, on note x le plus petit, y le plus grand ! On a donc $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ couples.

Méthode ② : On choisit $y \geq 2$ (car si $y = 1$, que vaut x ?), puis x dans $\llbracket 1; y-1 \rrbracket$ ce qui donne $y-1$ choix. Au total, on a donc $\sum_{y=2}^n (y-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ choix.

Méthode ③ : Il y a n^2 couples possibles dans $\llbracket 1; n \rrbracket^2$. Parmi ces couples il y a ceux tels que $x = y$, ceux tels que $x < y$ et ceux tels que $x > y$. Notons $A = \{(x, y) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, x = y\}$, $B = \{(x, y) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, x < y\}$ et $C = \{(x, y) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, x > y\}$. Par symétrie des rôles $|B| = |C|$. On a montré que $|A| = n$. Puisque $|A| + |B| + |C| = n^2$ on obtient

$$|B| = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

4. C'est la somme des deux résultats précédents, donc cela vaut $\frac{n(n+1)}{2}$ (car $x \leq y$ c'est $x < y$ ou (exclusif) $x = y$).

5. C'est plus compliqué. Parmi les couples de $\llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; 2n \rrbracket$ tels que $x < y$, il y a ceux :

① tels que $y \leq n$. Leur nombre est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$ (cela revient à la question 3).

② tels que $y > n$, mais dans ce cas x est quelconque (car dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ donc $x \leq n < y$). Pour chaque valeur $y > n$, on a n couples (x, y) tels que $x \leq y$, on a donc n^2 couples tels que $x \leq n < y$.

Par disjonction des cas, la réponse est $\frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$.

6. Cela revient à dénombrer les couples tels $x-y \in \{-1, 0, 1\}$. Les couples tels que $x-y = 0$, on les a déjà dénombré, il y en a n .

Par symétrie des rôles, il y en autant de couples tels que $x-y = -1$ que de couples tels que $x-y = 1$.

Pour avoir un couple tel que $x-y = -1$, on choisit x et on prend $y = x+1$, puisque $y \leq n$, cela impose $x \leq n-1$. Il y a donc $n-1$ couples $(x, y) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ pour lesquels $x-y = -1$.

La réponse est donc $n + 2(n-1) = 3n-2$.

Exercice de khôlle 562

On tire une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien y-a-t-il de mains contenant :

1. En tout ?
2. 5 carreaux ?
3. 5 carreaux ou 5 piques ?
4. Aucun carreau ?
5. 5 cartes de la même couleur ?
6. 2 carreaux et 2 piques exactement ?
7. 2 rois et 3 piques exactement ?

Solution : Il y a 8 cartes de chaque couleur.

1. Une main est une partie à 5 éléments d'un ensemble en contenant 32. Il y a $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains possibles.
2. Cela revient à choisir les 5 cartes parmi les 8 carreaux, il y a $\binom{8}{5} = 56$ mains possibles.
3. Par disjonction des cas, cela donne $2 \times 56 = 112$ mains possibles (il y en a autant de mains contenant 5 carreaux que de mains contenant 5 piques).
4. Cela revient à choisir les 5 cartes parmi les $32 - 8 = 24$ qui ne sont pas des carreaux. Il y a donc $\binom{24}{5} = 42\,504$ mains possibles.
5. On choisit la couleur, soit 4 choix, puis 5 cartes dans la couleur, soit $\binom{8}{5}$ choix. Donc au total $4 \times 56 = 224$ mains possibles.
6. On choisit 2 carreaux parmi 8, puis 2 piques parmi 8 et enfin une carte parmi les $32 - 2 \times 8 = 16$ restantes. Au total $\binom{8}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{16}{1} = 12\,544$ mains possibles.
7. On choisit 2 rois parmi les 4, puis 3 piques parmi Ah zut, et si un des rois est un pique ?
On a deux cas disjoints :
Cas ① : Aucun roi n'est le roi de pique : On choisit 2 rois parmi les 3 rois (on ne prend pas le roi de pique), puis 3 piques parmi les 7 piques (on ne prend toujours pas le roi de pique). Soit $\binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 105$ mains de ce type.
Cas ② : Un des rois est le roi de pique. On le prend (un choix), puis on prend un roi parmi les 3 restants, puis 2 piques parmi 7 (il en reste 7, on a pris le roi de pique), et on complète par une carte parmi $32 - 8 - 3 = 21$ (on enlève les piques et les autres rois). On a donc $\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{1} = 1323$ mains de ce type.
Au total, on a $1323 + 105 = 1428$ mains contenant 2 rois et 3 piques exactement.

Exercice de khôlle 563

On dispose de trois couleurs rouge, vert et bleu (RVB), avec lesquelles on souhaite colorier chacune de 9 cases d'un carré

3×3 . Déénombrer le nombre de coloriages :

1. possibles.
2. avec toutes les lignes unicolores.
3. avec au moins une case rouge.
4. n'utilisant qu'une ou deux couleurs.
5. avec exactement 3 cases rouges
6. avec au moins 8 cases rouges.

Solution : Pour donner une réponse mathématiquement précise, on peut toujours considéré que les cases sont numérotées de 1 à 9 (comme bon vous semble!). Un coloriage est alors une 9 liste de l'ensemble $C = \{R, V, B\}$.

1. Pour chaque case on a 3 choix, d'où 3^9 coloriages., cela revient bien à dénombrer les 9-listes de C qui est de cardinal 3.
2. Pour chaque ligne, on a 3 choix de couleurs. On a donc 3^3 possibilités.
3. Une question avec un « au moins »! On prend le complémentaire, on dénombre les coloriages sans cases rouges, il y en a 2^9 (deux choix de couleur par cas). La réponse à la question est donc $3^9 - 2^9$.
4. On a deux types de coloriages. Ceux qui n'utilisent qu'une seule couleur, au nombre de 3 et ceux qui utilisent deux couleurs exactement. Pour ces derniers, on choisit les deux couleurs parmi trois, puis on colorie avec ces deux couleurs (ce qui donne $2^9 - 2$ choix, puisque l'on ne veut pas de coloriage unicolor). Au total cela donne $3 + \binom{3}{2} \times (2^9 - 2) = 1533$ possibilités.
(Merci à mon collègue Olivier Mejane qui m'a fait remarquer une petite erreur!).
5. On choisit les 3 cases rouges parmi les 9, soit $\binom{9}{3} = 84$ choix. Puis on colorie les $9 - 3 = 6$ cases restantes avec le vert et le bleu, soit 2^6 choix. Au total 84×2^6 possibilités.
6. Il y a un seul coloriage avec 9 cases rouges auquel on ajoute le nombre de coloriages avec exactement 8 cases rouges qui vaut $\binom{9}{8} \times 2 = 18$. Au total, 19 possibilités.

Exercice de khôlle 564

Une urne $\mathcal{U}$ contient $n \geq 3$ boules de couleur blanche ou noire. On appelle tirage, la succession des couleurs obtenues lorsque l'on vide l'urne en piochant une à une les n boules.

1. On suppose que l'urne ne contient qu'une boule blanche.
 - (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
 - (b) Combien y a-t-il de tirage pour lesquels une boule blanche sort au premier tirage? Et au dernier?
2. On suppose désormais que l'urne a deux boules blanches.
 - (a) Répondre aux questions 1.a et 1.b dans ce cas.
 - (b) Combien y a-t-il de tirage pour lesquels une boule blanche sort au premier tirage ou au dernier?
 - (c) On suppose que n est pair. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels, après avoir tiré la première boule blanche, il reste au moins la moitié des boules dans l'urne?

Solution : Un tirage est un mot composé de n lettres sur l'alphabet $\{N, B\}$. Par exemple, $NNBNNB$ est un tirage pour lequel $n = 6$ et l'urne contient deux boules blanches. On peut vérifier nos calculs avec $n = 4$ par exemple.

1. Dans cette question tous les tirages sont des anagrammes du mot $N \cdots NB$.
 - (a) Il y a n tirages possibles (choix de la place du B).
Pour $n = 4$, les tirages sont bien $BNNN$, $NBNN$, $NNBN$ et $NNNB$.
 - (b) Un seul tirage donne la boule blanche en premier, idem en dernier.
2. Cette fois, un tirage est une anagramme du mot $N \cdots NBB$.
 - (a) On choisit les deux emplacements pour les B , ce qui donne $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tirages possibles.
Si on «lit» un tirage dans l'autre sens (le tirage $BNNBN$ devient $NBNNB$), on établit une bijection entre les tirages pour lesquels sort une boule blanche en premier et ceux pour lesquels, une boule blanche est tirée en dernier. Le nombre de tirages dans ces deux cas est le même. Pour obtenir un tirage où une boule blanche sort en premier une boule blanche, on tire la boule blanche, puis on choisit le rang auquel la

seconde boule blanche sort, ce qui donne $\binom{n-1}{1} = n-1$ choix (la seconde boule blanche ne peut sortir qu'aux rangs $2, 3, \dots, n$). On a donc $n-1$ tirages pour lesquels la boule blanche sort en premier et autant pour lesquels une blanche sort au dernier.

Pour $n=4$, les tirages sont $BBNN$, $BNBN$, $BNNB$, $NBBN$, $NBNB$ et $NNBB$ soit $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ tirages.

Il y en a bien $4-1=3$ qui commencent par B et 3 qui se terminent par B .

- (b) Attention piège ! Si on note P l'ensemble des tirages pour lesquels une blanche sort en premier et D ceux pour lesquels une blanche sort en dernier alors $|P \cup D| = |P| + |D| - |P \cap D|$. Mais $P \cap D$ est réduit à un élément, à savoir $BN \dots NB$. Donc le nombre de tirages pour lesquels une boule blanche sort au premier ou au dernier tirage vaut $(n-1) + (n-1) - 1 = 2n-3$.

Pour $n=4$, on en a bien 5 !

- (c) Cela revient à dénombrer le nombre d'anagrammes de $N \dots NBB$ pour lesquels on a placé les deux B parmi les $\frac{n}{2}$ premières lettres. Il y a donc $\binom{\frac{n}{2}}{2}$ tirages possibles.

Pour $n=4$, on a bien $\binom{2}{2} = 1$ tirage. Bon, je suis d'accord, il faudrait prendre $n=6$ pour que cette vérification soit un peu plus crédible

Exercice de khôlle 565

Un code de carte bancaire est un numéro à 4 chiffres. Combien existe-t-il de codes :

1. au total ?
2. dont les quatre numéros sont distincts ?
3. dont les chiffres sont par ordre strictement croissant ?
4. dont un, au moins, des chiffres est le 5 ?
5. où le chiffre 5 apparaît une seule fois.
6. ayant trois chiffres identiques ?

Solution : Un code est donc une 4-liste de l'ensemble $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1. Il y a $10^4 = 10\,000$ codes différents (10 choix pour chaque chiffre). Ce n'est pas surprenant, un code est un entier entre 0 et 9999 écrit sur 4 chiffres comme ci dessous !



2. Cela revient à déterminer le nombre de 4-listes d'éléments deux à deux distincts de E . On sait que ce nombre vaut $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ (10 choix pour le premier chiffre, puis 9 choix ...).
3. Pour obtenir un tel code, on choisit 4 chiffres parmi les 10 que l'on classe par ordre croissant. Il y a donc $\binom{10}{4} = \frac{A_{10}^4}{4!}$ codes de ce type. Le résultat est donc $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8}{4 \times 2} \times \left(\frac{9}{3} \times 7\right) \times 10 = 210$.

Remarque : On peut aussi écrire que ce nombre vaut

$$\sum_{1 \leq i < j < k < \ell \leq 10} 1 = \sum_{\ell=4}^{10} \sum_{k=3}^{\ell-1} \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{i=1}^{j-1} 1$$

mais le calcul est alors «compliqué», sauf si l'on peut utiliser Python !

4. Il est plus simple de dénombrer les codes n'utilisant pas le chiffre 5. Cela revient à dénombrer les 4-listes de $E \setminus \{5\}$, il y en a donc 9^4 . Le nombre de codes utilisant au moins une fois le chiffre 5 est alors égal à $10^4 - 9^4 \underset{OB}{=} (10^2 - 9^2) \times (10^2 + 9^2) = (10-9) \times (10+9) \times (100+81) = 19 \times 181 = (20-1) \times 181 = 3620 - 181 = 3439$.

5. On choisit l'emplacement du 5, soit $\binom{4}{1}$ choix possibles. Puis pour chaque chiffre restant on a 9 choix possibles. Au total, on a $4 \times 9^3 = 2916$ (ouf, il y en a moins!).
6. On choisit le chiffre qui apparaît trois fois, ce qui donne 10 choix. Puis le chiffre qui est unique, soit 9 choix (on ne reprend pas le même chiffre pour éviter les codes «monochiffres»). Puis l'emplacement du chiffre unique, soit $\binom{4}{1} = 4$ choix. Au total, on a donc $10 \times 9 \times 4 = 360$ codes ayant trois chiffres identiques.

Exercice de khôlle 566

Soit E un ensemble à $n \geq 2$ éléments et $a \in E$ un élément donné. Pour $p \geq 2$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des p -listes de E .

On note $\mathcal{A}$ les éléments de E où l'élément a apparaît au moins une fois et $\mathcal{U}$ celle où a apparaît une unique fois.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}$?
2. Du cardinal de $\mathcal{A}$ ou de $\mathcal{U}$, lequel est le plus grand.
3. Calculer les cardinaux de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{U}$ et en déduire une inégalité.
4. Démontrer directement cette inégalité.

Solution :

1. C'est du cours $|\mathcal{P}| = n^p$.
2. On a $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ donc $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{A}|$.
3. Pour déterminer $|\mathcal{A}|$, on calcule le cardinal de $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$ qui est plus simple. En effet $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$ est l'ensemble des p -listes de $E \setminus \{a\}$ dont le cardinal vaut $(n-1)^p$. Puisque $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}| = |\mathcal{P}| - |\mathcal{A}|$ on a

$$|\mathcal{A}| = n^p - (n-1)^p$$

Pour le cardinal de $\mathcal{U}$, cela revient à choisir où l'on place l'élément a , soit p choix, puis à constituer une $p-1$ -listes de $E \setminus \{a\}$ dont le cardinal vaut $(n-1)^{p-1}$. Ainsi

$$|\mathcal{U}| = p(n-1)^{p-1}$$

On en déduit que

$$p(n-1)^{p-1} \leq n^p - (n-1)^p$$

Remarque : On peut vérifier qu'elle est encore vraie si $p = 1$, car elle devient $(n-1)^0 \leq n - (n-1) = 1$ ce qui est toujours vrai.

4. On peut la reformuler ainsi : $n^p \geq (n-1)^p + p(n-1)^{p-1}$ ce qui est vrai car

$$\begin{aligned} n^p &= ((n-1) + 1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (n-1)^k = \sum_{k=0}^1 \binom{p}{k} (n-1)^k + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} (n-1)^k \\ &= (n-1)^p + p(n-1)^{p-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^p \binom{p}{k} (n-1)^k}_{\geq 0} \geq (n-1)^p + p(n-1)^{p-1} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 567

1. Combien existe-t-il de bijection de $E = \llbracket 1; 12 \rrbracket$ dans lui-même telles que :
 ① L'image d'un entier pair est pair et ② L'image d'un multiple de 3 est un multiple de 3.
2. Même question si on supprime la bijectivité.

Solution :

- Soit f une telle application. Puisque l'image d'un entier pair est un entier pair, f induit une bijection de $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ sur lui-même. En effet, l'application $\tilde{f} : \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \mapsto \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ définie par $\tilde{f}(n) = f(n)$ est injective car f l'est donc bijective car $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ est un ensemble fini. Mais alors si n est impair $f(n)$ est impair, donc f induit aussi une bijection de $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ sur lui-même. Les multiples de 3 inclus dans E sont 3, 6, 9 et 12. Les images de 6 et 12 sont donc également des entiers de E , pairs et multiples de 3 donc valent 6 ou 12. De même les images de 3 et 9 valent 3 ou 9. Si $f(6) = 6$ alors $f(12) = 12$ et si $f(6) = 12$ alors $f(12) = 6$. De même $f(3) = 3 \implies f(9) = 9$ et $f(3) = 9 \implies f(9) = 3$. On a donc deux choix pour la valeur de $f(6)$ (qui impose celle de $f(12)$) et 2 choix pour celle de $f(3)$. Soit 4 choix. Puis f induit alors une bijection de $\{2, 4, 8, 10\}$ sur lui-même et de $\{1, 5, 7, 11\}$ sur lui-même. On a donc $24 = 4!$ possibilités pour la restriction de f à $\{2, 4, 8, 10\}$ et autant pour la restriction à $\{1, 5, 7, 11\}$ (on peut aussi dire que l'on a $f(2) \in \{2, 4, 8, 10\}$, d'où 4 choix, puis $f(4) \in \{2, 4, 8, 10\} \setminus \{f(2)\}$, d'où 3 choix $\dots$). Au total, il y a donc $4 \times 24^2 = 2304$ solutions.
- C'est plus simple. Pour $f(6)$ on a 2 choix (parmi 6 et 12) pour $f(12)$ aussi 2 choix. Puis pour $f(2), f(4), f(8)$ et $f(10)$ on a 6 choix (ils sont dans $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$). Pour $f(3)$ et $f(9)$, ce sont des multiples de 3 donc sont dans $\{3, 6, 9, 12\}$, soit 4 choix pour chacun d'eux. Enfin pour $f(1), f(5), f(7)$ et $f(11)$ on a 12 choix car il n'y a pas de contraintes. Au total on a donc

$$\underbrace{2^2}_{f(\{6,12\}) \subset \{6,12\}} \times \underbrace{6^4}_{f(\{2,4,8,10\}) \subset \{2,4,6,8,10,12\}} \times \underbrace{4^2}_{f(\{3,9\}) \subset \{3,6,9,12\}} \times \underbrace{12^4}_{f(\{1,5,7,11\}) \subset E}$$

soit 1 719 926 784 solutions.

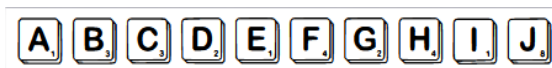
Exercice de khôlle 568

On choisit au hasard un entier parmi les diviseurs de $N = 10^{99}$, quelle est la probabilité qu'il soit un multiple de 10^{88} ?

Solution : On a $10^{99} = 2^{99} \times 5^{99}$, les diviseurs de N sont donc les entiers de la forme $2^a \times 5^b$ où $(a, b) \in \llbracket 0 ; 99 \rrbracket^2$. Il y a donc 100^2 diviseurs de 10^{99} . Soit $D = 2^a \times 5^b$ un des diviseurs, alors D est multiple de 10^{88} si et seulement si $a \geq 88$ et $b \geq 89$ donc si et seulement si $(a, b) \in \llbracket 88 ; 99 \rrbracket^2$. On a donc $(98 - 88 + 1)^2 = 12^2$ diviseurs de 10^{99} et, en même temps, multiple de 10^{89} . La probabilité cherchée vaut donc $\frac{12^2}{100^2} = \frac{4^2 \times 9}{4^2 \times 5^4} = \frac{9}{5^4} = \frac{9}{625}$.

Exercice de khôlle 569

On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de A à J.



- Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres ?
- Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A, C apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
- Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A, C apparaissent dans cet ordre ?
- Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B précède A, D précède C ?

Solution :

- Un mot est une permutation (une anagramme) du mot $ABCDEFGHIJ$, il y a donc $10! = 3628800$ mots possibles (mais aucun n'a de sens en français). On peut aussi dire que l'on a 10 choix pour la première lettre, puis 9 pour la deuxième, 8 pour la troisième $\dots$

2. On choisit où placer le B , ce qui donne 8 choix possibles (on ne peut pas mettre le B en dernière ou avant-dernière place). Puis on pose le « sous-mot » BAC . Il reste alors 7 lettres et 7 emplacements. Soit 7! choix (on a 7 choix pour le premier emplacement libre en partant de la gauche, puis 6...). Au total, on a donc $8 \times 7! = 8! = 40\,320$ mots solutions. Ce n'est pas surprenant, cela revient à voir le « sous-mot » BAC comme une lettre unique qui remplace la lettre B .
3. On choisit 3 emplacements parmi les 10 où l'on place B, A et C dans cet ordre, ce qui donne $\binom{10}{3}$ choix. Puis on place les 7 autres lettres, soit 7! choix. Au total, on a $\binom{10}{3} \times 7! = 120 \times 7! = 604\,800$ mots solutions à cette question.
4. Même idée, on choisit où placer B et A que l'on dispose dans cet ordre, soit $\binom{10}{2} = 45$ choix. Puis, les emplacements de D et C (posés dans cet ordre), soit $\binom{8}{2} = 28$ choix (on exclut les positions déjà occupées par B et A). Et on place les 6 autres lettres. Au total, on a donc $\binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times 6! = 907\,200$.

Exercice de khôlle 570

Dans un jeu de 52 cartes, combien de mains sont constituées exactement de 2 dames et 2 ♡ ?

Solution : Parmi ces mains, il y a ① celles qui contiennent la dame de cœur et ② celles qui ne la contiennent pas.
 Pour le cas ① : On prend la dame de ♡ (1 choix), puis un autre ♡ (soit 12 choix), une autre dame (3 choix) et enfin, deux autres cartes ($52 - 13 - 3 = 36$ choix car on ne veut ni un ♡, ni une dame). Donc $1 \times 12 \times 3 \times \binom{36}{2} = 22\,680$ mains où il y a deux ♡, deux dames dont la dame de ♡.
 Pour le cas ② : On choisit 2 dames parmi les 3 (car on ne veut pas la dame de ♡), puis deux cœurs parmi 12 (on ne veut toujours pas la dame de ♡) puis une carte parmi les 36 qui ne sont ni un ♡, ni une dame. Donc $\binom{3}{2} \times \binom{12}{2} \times 36 = 7128$ choix.
 Au total, on a $22\,680 + 7128 = 29\,808$ mains constituées exactement de 2 dames et 2 ♡ ?

16.3 Dénombrement technique

Exercice de khôlle 571

On note $E_n = \llbracket 1 ; n \rrbracket$, déterminer le nombre de surjections de :

1. E_n dans E_{n+1} .
2. E_n dans E_n .
3. E_{n+1} dans E_n .

Solution :

1. Il n'y en a pas et c'est du cours. Si E et F sont de cardinal fini, s'il existe une surjection de E dans F alors $|E| \geq |F|$!
2. Encore du cours, si E et F sont de cardinal fini égaux, $|E| = |F|$, et si $f : E \longrightarrow F$ alors f est surjective si et seulement si f est bijective. Donc il y a autant de surjections que de bijections, et comme il y a $n! = |E_n|!$ bijections, il a $n!$ surjections.

3. Soit f une surjection, alors un élément exactement de E_n a deux antécédents et les autres un seul. Reste à prouver ce résultat intuitif. On a $|E_{n+1}| = \sum_{k=1}^n |f^{-1}(k)|$, en effet, en prenant tous les antécédents des éléments de l'espace d'arrivée, on obtient tous les éléments de l'espace de départ, et ceci que f soit une surjection ou non ! Puisque f est une surjection, tous les éléments de E_n ont au moins un antécédent donc $|f^{-1}(k)| \geq 1$. Si deux éléments i et j de E_n ont plus d'un antécédent (donc au moins 2) alors

$$n+1 = |E_{n+1}| = \sum_{k=1}^n |f^{-1}(k)| = |f^{-1}(i)| + |f^{-1}(j)| + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^n |f^{-1}(k)| \geq 2+2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^n 1 = 2+2+n-2 = n+2$$

Absurde ! Et si tous les éléments ont un seul antécédent, on a $\sum_{k=1}^n |f^{-1}(k)| = \sum_{k=1}^n 1 = n < |E_{n+1}|$.

Donc pour une surjection de E_{n+1} dans E_n , un élément de E_n a deux antécédents. Il y a autant de surjections pour lesquelles cet élément vaut 1, que pour lesquelles il vaut une autre valeur $i \in E_{n+1}$.

Dénombrons alors les surjections de E_{n+1} dans E_n pour lesquels 1 est atteint deux fois. Cela revient à choisir les deux antécédents i et j parmi E_n , soit $\binom{n+1}{2}$ choix, puis à faire une bijection entre $E_{n+1} \setminus \{i, j\}$ et $E_n \setminus \{1\}$,

soit $(n-1)!$ choix. On a donc $\binom{n+1}{2} \times (n-1)! = \frac{(n+1)!}{2}$ surjection pour de E_{n+1} dans E_n telles que 1 a deux antécédents et donc le nombre de surjection de E_{n+1} dans E_n vaut

$$\frac{n(n+1)!}{2}$$

On vérifie avec $n=1$, il n'y a qu'une surjection f de E_2 dans E_1 qui est définie par $f(1) = f(2) = 1$. Avec $n=2$, les surjections de E_3 dans E_2 sont données par

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & 1 & 1 & 2 \end{array}, \begin{array}{ccc} \downarrow & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & 1 & 2 & 1 \end{array}, \begin{array}{ccc} \downarrow & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & 2 & 2 & 1 \end{array}, \begin{array}{ccc} \downarrow & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & 2 & 1 & 2 \end{array}, \begin{array}{ccc} \downarrow & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

Exercice de khôlle 572

Soient $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $f: \llbracket 1; m \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$.

- Si $g: \llbracket 1; n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1; m \rrbracket$ est telle que $g \circ f = Id_{\llbracket 1; m \rrbracket}$, montrer que f est injective.
- Déterminer le nombre N de $g: \llbracket 1; n \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1; m \rrbracket$ telle que $g \circ f = Id_{\llbracket 1; m \rrbracket}$.

Solution :

- Soient $(x_1, x_2) \in \llbracket 1; m \rrbracket$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, mais si $g \circ f = Id_{\llbracket 1; m \rrbracket}$ on en déduit que $x_1 = x_2$. Conclusion, f est bien injective.
- Si f est non injective, on a $N = 0$. En particulier si $n < m$, on a $N = 0$. Si $m \leq n$ et si f est injective, pour $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, on pose $x_i = f(i)$, ainsi $f(\llbracket 1; m \rrbracket) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Pour construire g on pose $g(x_i) = i$ pour $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$. Et pour $x \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$, on choisit, pour $g(x)$, un élément quelconque de $\llbracket 1; m \rrbracket$. En d'autres termes, N est le nombre d'applications de $E = \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ dans $F = \llbracket 1; m \rrbracket$, il est donc égal à

$$|F|^{|E|} = m^{n-m}$$

Exercice de khôlle 573

(★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_1 = \sum_{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, X \neq \emptyset} (-1)^{|X|+1} \min(X)$ et $S_2 = \sum_{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, X \neq \emptyset} (-1)^{|X|+1} \max(X)$.

Solution : Pour S_1 , soit $\mathcal{A} = \{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, X \neq \emptyset\}$ et $\mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{A}, \min A = i\}$ alors $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ est une partition de $\mathcal{A}$. On a donc

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{X \in \mathcal{A}_i} (-1)^{|X|+1} \min(X)$$

Cela revient, dans la somme, à faire des paquets selon la valeur de $\min X$. Ainsi

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{X \in \mathcal{A}_i} (-1)^{|X|+1} \times i = \sum_{i=1}^n i \sum_{X \in \mathcal{A}_i} (-1)^{|X|+1}$$

On va donc calculer $\sigma_i = \sum_{X \in \mathcal{A}_i} (-1)^{|X|+1}$ en sommant selon le cardinal de X ! Si $X \in \mathcal{A}_i$ alors $X \neq \emptyset$ et $\min X = i$.

On peut alors écrire que

$$X = \{i\} \cup Y \text{ où } Y \subset \llbracket i+1; n \rrbracket \text{ et peut être vide !}$$

Ainsi $|X| = 1 + |Y|$ et $|Y| \in \llbracket 0; n-i \rrbracket$. On a donc

$$\sigma_i = \sum_{Y \subset \llbracket i+1; n \rrbracket} (-1)^{|Y|+2} = \sum_{k=0}^{n-i} \sum_{Y \subset \llbracket i+1; n \rrbracket, |Y|=k} (-1)^{|Y|} = \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^{|k|} \sum_{Y \subset \llbracket i+1; n \rrbracket, |Y|=k} 1$$

et $\sum_{Y \subset \llbracket i+1; n \rrbracket, |Y|=k} 1$ est le nombre de parties de $\llbracket i+1; n \rrbracket$ dont le cardinal vaut k , i.e. est égal à $\binom{n-i}{k}$. Bref

$$\sigma_i = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^{|k|} = (1-1)^{n-i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$$

et on en déduit que

$$S_1 = n$$

Pour S_2 , on peut faire le même genre de chose, ce qui marche très bien. On a $S_1 = \sum_{i=1}^n i \sum_{X \in \mathcal{A}, \max A = i} (-1)^{|X|+1}$, on pose alors

$$s_i = \sum_{X \in \mathcal{A}, \max A = i} (-1)^{|X|+1}$$

En écrivant que $X = \{i\} \cup Y$ où $Y \subset \llbracket 1; i-1 \rrbracket$ on a $|Y| \leq i-1$ d'où

$$s_i = \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{Y \subset \llbracket 1; i-1 \rrbracket, |Y|=k} (-1)^{|Y|} = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{i-1}{k} = (1-1)^{i-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ 1 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

d'où

$$S_2 = 1$$

Remarque : Une autre manière de procéder consiste à poser $X^S = \{n+1-i, i \in X\}$, ainsi $f : X \mapsto X^S$ est une bijection (car $(X^S)^S = X$) donc

$$S_2 = \sum_{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, X \neq \emptyset} (-1)^{|X^S|+1} \max(X^S)$$

(cela revient à réordonner la somme). Mais $|X^S| = |X|$ et $\max(X^S) = n+1 - \min(X)$ donc

$$S_2 = \sum_{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, X \neq \emptyset} (-1)^{|X|+1} (n+1 - \min X)$$

soit

$$S_1 + S_2 = \sum_{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, X \neq \emptyset} (-1)^{|X|+1} (n+1) = -(n+1) \sum_{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, X \neq \emptyset} (-1)^{|X|}$$

Puis

$$\sum_{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, X \neq \emptyset} (-1)^{|X|} = \sum_{k=1}^n \sum_{X \subset \llbracket 1; n \rrbracket, |X|=k} (-1)^{|X|} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n - 1 = -1$$

d'où

$$S_2 = (n+1) - S_1 = 1 \text{ ouf!}$$

Exercice de khôlle 574

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :

1. $A \subset B$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A \cap B$ est réduit à un élément (en supposant $n \geq 1$).

Solution :

1. On va partitionner les couples (A, B) en fonction du cardinal de B . Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on compte les couples solutions tels que B soit de cardinal k , puis on somme les possibilités pour k de 0 à n . De manière plus formelle, si $\mathcal{A} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B\}$ on note, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{A}_k = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, |B| = k \text{ et } A \subset B\}$. On a alors (quasi évident)

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{A}_k \text{ (i.e. } \mathcal{A} = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{A}_k \text{ et } i \neq j \implies \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset)$$

d'où $|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^n |\mathcal{A}_k|$. Reste à calculer $|\mathcal{A}_k|$. Pour choisir un couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $A \subset B$ et $|B| = k$, on

choisit B de cardinal k , il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles. Puis à B fixé, on choisit $A \subset B$, i.e. $A \in \mathcal{P}(B)$, il y a alors $2^{|B|} = 2^k$ choix. Ainsi

$$|\mathcal{A}_k| = \binom{n}{k} 2^k$$

et

$$|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

On peut vérifier avec $n = 1$ ou 2 ($n = 0$ est évident).

Pour $n = 1$, si $E = \{a\}$, alors

$$\mathcal{A} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a\}), (\{a\}, \{a\})\} \text{ de cardinal égal à } 3$$

Pour $n = 2$, si $E = \{a, b\}$ alors les éléments de $\mathcal{A}$ sont

$$\begin{aligned} &(\emptyset, \emptyset) \\ &(\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}) \\ &(\emptyset, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, b\}) \end{aligned}$$

de cardinal 9 (remarquer que les lignes sont à «cardinal de B » constant).

2. On procède un peu de la même manière. On pose $\mathcal{B} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cap B = \emptyset\}$ on note, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{B}_k = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, |B| = k \text{ et } A \cap B = \emptyset\}$. On a alors $\mathcal{B} = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{B}_k$ d'où $|\mathcal{B}| = \sum_{k=0}^n |\mathcal{B}_k|$.

Pour calculer $|\mathcal{B}_k|$, on choisit $B \subset E$ de cardinal k , soit $\binom{n}{k}$ choix, puis on choisit $A \subset \overline{B} = E \setminus B$. Puisque $\overline{B}$ est de cardinal $(n - k)$, on a 2^{n-k} choix. Au total, on a

$$|\mathcal{B}| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n \text{ (même binôme)}$$

Ici encore on peut le vérifier avec $n = 2$ par exemple (laissé au lecteur).

3. On partitionne en fonction de l'unique élément de l'intersection. Si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, il y a autant de couples (A, B) tels que $A \cap B = \{x_1\}$ que de couples tels que $A \cap B = \{x_k\}$ où $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Il reste à calculer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \{x_1\}$.

De manière formelle, si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ on pose $\mathcal{C} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, |A \cap B| = 1\}$ on note, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{C}_k = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cap B = \{x_k\}\}$. On a alors $\mathcal{C} = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{C}_k$ d'où $|\mathcal{C}| = \sum_{k=0}^n |\mathcal{C}_k|$ et par symétrie des

rôles, tous les $\mathcal{C}_k$ ont même cardinal d'où $|\mathcal{C}| = n |\mathcal{C}_1|$. Mais pour construire un couple (A, B) tel que $A \cap B = \{x_1\}$, cela revient à choisir A_1 et B_1 , parties de $E \setminus \{x_1\}$ telles que $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ et à poser $A = A_1 \cup \{x_1\}$ et $B = B_1 \cup \{x_1\}$. Ainsi $|\mathcal{C}_1| = 3^{n-1}$ (problème précédent) et $|\mathcal{C}| = n 3^{n-1}$ (ce qui est encore vrai si $n = 0$ en fait).

De manière plus formelle, on a construit une bijection entre $\mathcal{B}^{x_1} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E \setminus \{x_1\})^2, A \cap B = \emptyset\}$ et $\mathcal{C}_1$ en posant

$$(A_1, B_1) \longmapsto (A_1 \cup \{x_1\}, B_1 \cup \{x_1\})$$

Exercice de khôlle 575

Charlotte descend les marches d'un escalier une ou deux à la fois. Si cet escalier à n marches, on note T_n le nombre de manières différentes de descendre cet escalier.

- Déterminer T_1, T_2, T_3 et T_4 .
- Exprimer T_n à l'aide d'une somme (ou bien passer à la question 3 et y revenir!)
- Soit $n \geq 3$, à l'aide d'un dénombrement, trouver une relation entre T_n, T_{n-1} et T_{n-2} puis en déduire T_n en fonction de n .

Solution :

- Une seule marche, une seule manière donc $T_1 = 1$. Pour deux marches, ou bien on les descend en une fois, ou en deux fois soit $T_2 = 2$. Pour T_3 , on va commencer à formaliser cela. Ou bien on le fait en trois fois, soit $[1, 1, 1]$ (on descend une marche, puis une marche et enfin une marche). Ou bien en deux fois $[1, 2]$ ou $[2, 1]$ (on descend une marche puis deux ou l'inverse!).

Pour T_4 , on a comme options

$$[1, 1, 1, 1] \text{ ou } [1, 2, 1] \text{ ou } [1, 1, 2] \\ [2, 1, 1] \text{ ou } [2, 2]$$

ainsi $T_4 = 5$.

- Question compliquée. On partitionne les différentes manières de descendre en fonction du nombre de fois où l'on a descendu 2 marches. Si on a descendu k fois deux marches alors on a descendu $n - 2k$ fois une marche. Si on «code» comme précédemment, on a une liste de $n - 2k + k = n - k$ éléments de $\{1, 2\}$ dont k sont des deux.

On choisit donc quand on descend 2 marches, soit $\binom{n-k}{k}$ choix possibles. Enfin, on doit avoir $0 \leq n - 2k$ d'où

Bref

$$T_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n-k}{k}$$

Remarque : ① En fait si $k > \frac{n}{2}$ alors $k > n - k$ et ainsi $\binom{n-k}{k} = 0$. On peut donc écrire que

$$T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$$

② Pour $n = 6$ par exemple, on a

$$T_6 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

ce qui revient à sommer en diagonale

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	15	10	6	1

- Bref

$T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ avec $T_1 = 1$ et $T_2 = 2$ (donc on pose $T_0 = 1$ et même $T_{-1} = 0$)

C'est presque du Fibonacci!! Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ et } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

alors (classique, c'est un des TD)

$$F_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left(\left(1 + \sqrt{5}\right)^n - \left(1 - \sqrt{5}\right)^n \right)$$

et on a alors

$$T_n = F_{n+1}$$

Remarque : ① On peut aussi simplement résoudre la récurrence qui est linéaire d'ordre 2.

② on en déduit que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} \right)$$

Exercice de khôlle 576

Soit $n \in \mathbb{N}$, on se propose de dénombrer le nombre de solutions de l'équation $x + y + z = n$ où $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ par deux méthodes. On note S l'ensemble des triplets (x, y, z) solutions.

- Pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note S_p l'ensemble des triplets de S de la forme (x, y, p) (donc pour lesquels $z = p$).
 - Justifier que les $(S_p)_{0 \leq p \leq n}$ forment une partition de S .
 - Pour $q \in \mathbb{N}$ dénombrer le nombre de solutions de l'équation $x + y = q$ où $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
 - En déduire $|S|$ le cardinal de S .
- On représente une solution selon le principe évoqué par les exemples suivant :
 - $(2, 4, 3)$ est une solution de $x + y + z = 9$ que l'on représente sous la forme $|| + |||| + |||$ (on a 2 bâtons puis un +, puis 4 bâtons, un + et enfin 3 bâtons).
 - $(0, 5, 4)$ est aussi solution de $x + y + z = 9$ que l'on représente sous la forme $+||| + ||||$.
 - La représentation $++||$ correspond à la solution de $(0, 0, 3)$ de $x + y + z = 3$.
A l'aide de ce codage, retrouver le cardinal de S .
- Généraliser, pour $k \in \mathbb{N}^*$, au nombre de solutions de $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ où $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$.

Solution :

- Si $(p, q) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$ sont tels que $p \neq q$ alors $S_p \cap S_q = \emptyset$, car un triplet de $S_p \cap S_q$ a pour troisième composante p et q absurde. Puis $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $S_p \subset S$ d'où $\bigcup_{p=0}^n S_p \subset S$, enfin si $(x, y, z) \in S$ alors $z = n - x - y \leq n$ donc $z \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et ainsi $(x, y, z) \in S_z$. Ceci prouve que $S \subset \bigcup_{p=0}^n S_p$. On a donc une partition, ce que l'on écrit (parfois) $S = \bigsqcup_{p=0}^n S_p$.
 - Les solutions sont $(0, q), (1, q-1), (2, q-2), \dots, (q, 0)$, il y a $q+1$ solutions.
 - On a (partition) $|S| = \sum_{p=0}^n |S_p|$, mais on a autant de solutions de $x + y + p = n$ que de solutions de $x + y = n - p$, ainsi

$$|S_p| = n - p + 1$$
 et

$$|S| = \sum_{p=0}^n (n - p + 1) = \sum_{p=0}^n (n + 1) - \sum_{p=0}^n p = (n + 1)^2 - \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$
- On établit une bijection entre les éléments de S et les anagrammes du mot fondamental $|| \dots + +$ où il y a n bâtons. Le mot fondamental correspond à la solution $n + 0 + 0 = n$. Cela revient donc à un dénombrement d'anagrammes ! Le mot fondamental a $n + 2$ lettres dont deux «+». Il a donc $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ anagrammes.
- La méthode 2 se généralise immédiatement, et on obtient $\binom{n+k-1}{k-1}$ (car il y a $k-1$ signes +).

Exercice de khôlle 577

(★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications f de $E = \llbracket 1; n \rrbracket$ dans lui-même telle que $f \circ f = f$, i.e.

$$\mathcal{P} = \{f \in E^E, f \circ f = f\}$$

Déterminer le cardinal de $\mathcal{P}$ (un élément de $\mathcal{P}$ est dit idempotent).

Solution : C'est un exercice classique et tombé à l'oral de Centrale en 2015, donc plus dur.

Analyse : L'idée est simple, si $f \in \mathcal{P}$ (qui n'est pas vide car $\text{Id}_E \in \mathcal{P}$) alors pour $y \in \text{Im}(f)$ on a $f(y) = y$. En effet, si $y \in \text{Im } f$ alors $\exists x \in E, y = f(x)$ d'où $f(y) = f \circ f(x) = f(x) = y$.

Synthèse : Pour construire un élément f de $\mathcal{P}$, on choisit une partie non vide de E qui sera $\text{Im } f$. Sur $\text{Im } f$, l'application f se comporte donc comme l'identité. Sur $E \setminus \text{Im } f$, l'application f se comporte comme une application de $E \setminus \text{Im } f$ sur $\text{Im } f$ et c'est fini. Pour mettre en forme cela, on va d'abord fixer le cardinal de $\text{Im } f$ que l'on note k .

Pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ (on a $k \neq 0$), on choisit donc $\text{Im } f \subset E$ de cardinal k , ce qui donne $\binom{n}{k}$ choix possibles. On choisit ensuite $g \in \text{Im } f^{E \setminus \text{Im } f}$ une application quelconque de $E \setminus \text{Im } f$ dans $\text{Im } f$. On a k^{n-k} choix possibles. On construit alors f ainsi :

$$\text{si } x \in \text{Im } f, \text{ alors } f(x) = x \text{ sinon } f(x) = g(x)$$

On a bien $f \in \mathcal{P}$ car pour $x \in E$, on a toujours $f(x) \in \text{Im } f$ donc $f(f(x)) = f(x)$. On a donc, au total, $\binom{n}{k} \times k^{n-k}$ applications de $\mathcal{P}$ dont l'image est de cardinal k . On est rassuré de voir que pour $k = n$, cela donne une seule application qui est Id_E .

L'analyse montre alors que l'on dénombre ainsi les applications de $\mathcal{P}$ dont l'image est de cardinal k .

Pour finir, par disjonction des cas

$$|\mathcal{P}| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}$$

Remarques ① : La locution « disjonction des cas » signifie que si l'on note $\mathcal{P}_k = \{f \in \mathcal{P}, |\text{Im } f| = k\}$ l'ensemble des applications de $\mathcal{P}$ dont l'image est de cardinal k , alors $(\mathcal{P}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une partition de $\mathcal{P}$.

② : Puisque $\mathcal{P} \subset \sigma_n$ on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k} \leq n^n$$

Exercice de khôlle 578

Soit $E = \llbracket 1 ; n \rrbracket$, et $m \in E$, on se propose de dénombrer, de deux manières, le nombre de couples (A, B) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que

$$A \subset B \subset E \text{ et } |A| = m$$

On note N le nombre cherché.

1. En choisissant d'abord A puis B le contenant, donner une expression de N .
2. Cette fois-ci, on va d'abord choisir B puis A inclus dans B .
 - (a) Pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, déterminer le nombre de couples pour lesquels $|B| = k$.
 - (b) Donner une autre expression de N sous forme d'une somme et en déduire une égalité « non triviale ».
3. Vérifier l'égalité obtenue avec $n = 3$ et $m = 2$.
4. Retrouver l'égalité par un calcul direct sur les coefficients binomiaux.

Solution :

1. On choisit A , ce qui donne $\binom{n}{m}$ choix possibles. Puis on construit B en « ajoutant » à A une partie C de $E \setminus A$ (on pose $B = A \cup C$). On a 2^{n-m} choix pour la partie C . On a donc $N = 2^{n-m} \binom{n}{m}$.
2. (a) Si $|B| = k < m$, il n'existe pas de couple (A, B) tels que $A \subset B \subset E$ et $|A| = m$. Pour $k \geq m$, on choisit B ayant k éléments, ce qui donne $\binom{n}{k}$ choix possibles, puis $A \subset B$ ayant m éléments, soit $\binom{k}{m}$ choix. On a donc $\binom{n}{k} \times \binom{k}{m}$ couples (A, B) tels que

$$A \subset B \subset E, |B| = k \text{ et } |A| = m$$

(b) Par disjonction des cas, on a $N = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m}$. Avec la convention $\binom{k}{m} = 0$ si $m > k$, on peut aussi écrire que

$$N = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

Remarque : Si on veut le justifier proprement, on note $\mathcal{S} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \subset E \text{ et } |A| = m\}$ et $\mathcal{S}_k = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \subset E, |B| = k \text{ et } |A| = m\}$ alors $(\mathcal{S}_k)_{m \leq k \leq n}$ est une partition de $\mathcal{S}$.

3. Pour $m = 2$ et $n = 3$ on vérifie que

$$\sum_{k=2}^3 \binom{3}{k} \binom{k}{2} = \binom{3}{2} \binom{2}{2} + \binom{3}{3} \binom{3}{2} = 6 = 2^{3-2} \binom{3}{2}$$

4. On écrit que si $k \geq m$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{n!}{m!(n-k)!(k-m)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \times \frac{(n-m)!}{(n-k)!(k-m)!} = \binom{n}{m} \times \binom{n-m}{k-m} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^n \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m} \times \sum_{k=m}^n \binom{n-m}{k-m} \stackrel{i=k-m}{=} \binom{n}{m} \times \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} \\ &= \binom{n}{m} \times \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n-m}{i} 1^i 1^{n-m-i} = \binom{n}{m} \times 2^{n-m} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 579

Soit E de cardinal $n \geq 1$, déterminer le nombre de couple $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $|A \cap B| = 1$.

Solution : Puisque $|A \cap B| = 1$, l'ensemble $A \cap B$ est réduit à un élément $a \in E$.

Analyse du problème. Si (A, B) est solution alors $A = A' \cup \{a\}$ et $B = B' \cup \{a\}$ où $(A', B') \in \mathcal{P}(E \setminus \{a\})^2$ et $A' \cap B' = \emptyset$. En d'autres termes, on a $A = A' \cup \{a\}$, $B = B' \cup \{a\}$, $a \notin A'$, $a \notin B'$ et $A' \cap B' = \emptyset$. Pour dénombrer les solutions, on commence par choisir a tel que $\{a\} = A \cap B$. Cela donne $n = |E|$ choix possibles. Puis on choisit un couple $(A', B') \in \mathcal{P}(E \setminus \{a\})^2$ tel que $A' \cap B' = \emptyset$.

On est donc ramené à un autre problème : si E' est de cardinal fini p , combien existe-t-il de couple $(A', B') \in \mathcal{P}(E')^2$ et tels que $A' \cap B' = \emptyset$? Pour cela, on va déterminer les couples $(A', B') \in \mathcal{P}(E')^2$ tels que $|B'| = k$ et $A' \cap B' = \emptyset$.

Pour construire un tel couple, on choisit $B' \subset E'$ de cardinal k , soit $\binom{p}{k}$ choix, puis on choisit $A' \subset \overline{B'} = E' \setminus B'$.

Puisque $\overline{B'}$ est de cardinal $(p - k)$, on a 2^{p-k} choix. Au total, on a $\binom{p}{k} 2^{p-k}$ couples $(A', B') \in \mathcal{P}(E')^2$ tels que

$|B'| = k$ et $A' \cap B' = \emptyset$. En sommant de $k = 0$ à p , on a $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 2^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 2^{p-k} 1^k = (2 + 1)^p = 3^p$ couples

$(A', B') \in \mathcal{P}(E')^2$ tels que $A' \cap B' = \emptyset$.

Remarque : Si on veut écrire cela proprement, on pose $\mathcal{B} = \{(A', B') \in \mathcal{P}(E')^2, A' \cap B' = \emptyset\}$ et, pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$,

$\mathcal{B}_k = \{(A', B') \in \mathcal{P}(E')^2, |B'| = k \text{ et } A' \cap B' = \emptyset\}$. On a alors $\mathcal{B} = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{B}_k$ (partition) d'où $|\mathcal{B}| = \sum_{k=0}^n |\mathcal{B}_k|$. On a

$$|\mathcal{B}_k| = \binom{p}{k} 2^{p-k} \text{ puis } |\mathcal{B}| = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 2^{p-k} = 3^p.$$

Pour finir avec le problème posé, on a donc 3^{n-1} couples $(A', B') \in \mathcal{P}(E \setminus \{a\})^2$ tels que $A' \cap B' = \emptyset$ et ainsi

$$n3^{n-1} \text{ couples } (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \text{ tels que } |A \cap B| = 1.$$

Remarque : ① Formule encore valable si $n = 0$.

② Si vous avez suivi, pour $m \in \mathbb{N}$, le nombre de couples (A, B) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que $|A \cap B|$ est $\binom{n}{m} 3^{n-m}$.

③ On peut se poser la question du nombre de parties $\{A, B\} \subset \mathcal{P}(E)$ telles que $|A \cap B| = 1$ (donc $A \neq B$). Cela revient à éliminer les doublons (A, B) et (B, A) avec $A \neq B$ dans le calcul précédent. Pour cela, on cherche le nombre de couples (A, A) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que $|A \cap A| = 1$. Il y en a $n = |E|$ (car $A \cap A = A$). Il y a donc $n3^{n-1} - n$ couples (A, B) de $\mathcal{P}(E)^2$ tels que $|A \cap B| = 1$ et $A \neq B$. Les couples (A, B) et (B, A) donnent la même partie $\{A, B\}$, donc il y a $n \frac{3^{n-1} - 1}{2}$ parties $\{A, B\} \subset \mathcal{P}(E)$ telles que $|A \cap B| = 1$.

Exercice de khôlle 580

Soit $E = \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $\sigma(E)$ l'ensemble des permutations de E et pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, σ_k l'ensemble des permutations de E ayant exactement k points fixes et S_k le cardinal de σ_k .

1. Soit $f \in \sigma(E)$, justifier que si $a \in E$ n'est pas un point fixe de E alors $f(a)$ non plus.
2. Déterminer S_n, S_{n-1}, S_{n-2} et S_{n-3} .
3. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n S_k$.
4. Si $n = 4$ que vaut S_0 ? Un élément de σ_0 est dit un dérangement de E .

Solution : Rappel, on a $n!$ permutations de E qui est de cardinal n .

1. Par l'absurde, si a n'est pas un point fixe et si $f(a)$ en est un alors

$$f(f(a)) = f(a)$$

Par injectivité de f , on en déduit que $f(a) = a$ donc que a est un point fixe de f .

Rappel : f injective si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y$.

2. Pour S_n : Si $f \in \sigma_n$, alors $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(k) = k$, donc $f = Id_E$. Ainsi $S_1 = 1$.

Pour S_{n-1} : Si $f \in \sigma_{n-1}$, il faut peu de temps pour comprendre que si $n - 1$ éléments de E sont fixes, alors ils le sont tous. De manière plus formelle, supposons qu'il existe $a \in E$ qui ne soit pas un point fixe. D'après la première question $f(a)$ non plus et $f(a) \neq a$ (sinon a est un point fixe). Donc f a au plus $n - 2$ points fixes. Conclusion $S_{n-1} = 0$.

Pour S_{n-2} : Si f a $n - 2$ points fixes, il existe deux éléments a et b de E qui ne sont pas des points fixes. D'après la première question $f(a)$ n'est pas un point fixe et comme il ne vaut pas a , c'est qu'il vaut b . Par symétrie de rôles, on a $f(b) = a$. Conclusion f est définie par $f(a) = b, f(b) = a$ et $\forall x \in E \setminus \{a, b\}, f(x) = x$. Il y a autant d'élément de σ_{n-2} que de choix de partie à deux éléments $\{a, b\}$ de E . Ainsi $S_{n-2} = \binom{n}{2}$.

Pour S_{n-3} : Si $f \in \sigma_{n-3}$, soient a, b et c les trois éléments de E qui ne sont pas des points fixes de E . Alors $f(a) \in \{b, c\}$ (car $f(a)$ n'est pas un point fixe de f et $f(a) \neq a$). De même $f(b) \in \{a, c\}$ et $f(c) \in \{a, b\}$. Si $f(a) = b$ alors $f(b) \neq a$ (sinon cela impose $f(c) = c$) donc $f(b) = c$ et $f(c) = a$. De même, si $f(a) = c$ alors $f(c) = b$ et $f(b) = a$. On a donc $\binom{n}{3}$ choix pour la partie $\{a, b, c\}$ de non-points fixes, puis 2 possibilités pour construire f . Conclusion $S_{n-3} = 2 \binom{n}{3}$.

3. On a $i \neq j \implies \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ (une permutation ne peut avoir i et $j \neq i$ points fixes en même temps) et $\sigma(E) = \bigcup_{k=0}^n \sigma_k$. Les $(\sigma_k)_{0 \leq k \leq n}$ forment donc une partition de $\sigma(E)$ donc

$$n! = |\sigma(E)| = \sum_{k=0}^n |\sigma_k| = \sum_{k=0}^n S_k$$

Exemple : Avec $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} 3! &= S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = S_3 + S_{3-1} + S_{3-2} + S_{3-3} \\ &= 1 + 0 + \binom{3}{2} + 2\binom{3}{3} \end{aligned}$$

4. Pour $n = 4$ on a donc

$$\begin{aligned} 4! &= S_4 + S_{4-1} + S_{4-2} + S_{4-3} + S_0 = 1 + 0 + \binom{4}{2} + 2\binom{4}{3} + S_0 \\ &= 1 + 0 + 6 + 2 \times 4 = 15 + S_0 \end{aligned}$$

Ainsi $S_0 = 4! - 15 = 9$. On peut les lister avec la convention suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ représente la permutation définie par $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$ et $f(4) = 4$ (qui n'est pas un dérangement mais un élément de S_2). Les permutations à 4 éléments sont listées dans le tableau suivant (il y en a $4! = 24$) et les dérangements sont encadrés, pour chaque permutation, les points fixes sont sur fond orange.

Permutations de quatre éléments

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2
2	1	3	4
2	1	4	3
2	3	1	4
2	3	4	1
2	4	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4
3	1	4	2
3	2	1	4
3	2	4	1
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	1	3	2
4	2	1	3
4	2	3	1
4	3	1	2
4	3	2	1

Source : <http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvm/Compter/Factsous.htm>

Exercice de khôlle 581

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dénombrer le nombre de matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ (i.e. à coefficients dans $\{-1, 1\}$) telles que le produit des termes d'une ligne ou d'une colonne donne toujours -1 .

Solution : Pour $n = 1$ c'est simple, il n'y en a qu'une. Supposons $n \geq 2$, si on essaye de construire une telle matrice pour, disons $n = 4$, on commence par remplir la première ligne. Les trois premiers coefficients peuvent être pris au hasard, le dernier est fixé pour que le produit, sur la première ligne, des coefficients soit égal à -1 . On procède de même sur les lignes 2 et 3, la dernière ligne se complète alors pour que le produit des coefficients sur les colonnes d'indice 1, 2 et 3 soit égal à -1 . Reste alors un coefficient, celui «en bas à droite», qui, après plusieurs essais semble être fixé par les choix précédents... Reste à formaliser cela.

De manière naïve pour construire $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ qui soit solution, on choisit les $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ dans $\{-1, 1\}$ (soit $2^{(n-1)^2}$ choix) puis on pose

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket, a_{i,n} = - \prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j}$$

De manière à avoir $\prod_{j=1}^n a_{i,j} = \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j} \right) \times a_{i,n} = - \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j} \right)^2 = - \prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j}^2 = -1$ car $a_{i,k} \in \{-1, 1\}$. Ceci remplit les $n-1$ premières lignes. Puis on pose

$$\forall j \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket, a_{n,j} = - \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,j}$$

On a donc défini tous les termes de la matrice à l'exception de $a_{n,n}$. Pour finir, si on calcule le produit des termes sur la dernière ligne et sur la dernière colonne (produit dont on exclut $a_{n,n}$ qu'il reste à définir), on obtient

$$\begin{aligned} \text{Pour la dernière colonne, } \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,n} &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(- \prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j} \right) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j} \\ \text{et pour la dernière ligne, } \prod_{j=1}^{n-1} a_{n,j} &= \prod_{j=1}^{n-1} \left(- \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,j} \right) = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,j} \end{aligned}$$

ces deux produits sont bien égaux, il suffit de poser $a_{n,n}$ égal à l'opposé, à savoir

$$a_{n,n} = (-1)^n \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,j}$$

Et on a ainsi entièrement défini A . Conclusion, le nombre cherché vaut $2^{(n-1)^2}$.

Remarque : Si on veut «formaliser» cela. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ telles que le produit des termes d'une ligne ou d'une colonne donne toujours -1 . On vient de montrer que l'on a une bijection entre $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{M}_{n-1}(\{-1, 1\})$ en considérant $f : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\{-1, 1\})$ définie par $f(A) = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n-1}$ (en d'autres termes f «oublie» la dernière colonne et la dernière ligne). En effet, le raisonnement précédent montre que si l'on a $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\{-1, 1\})$ alors il existe une unique matrice $A \in \mathcal{A}_n$ telle que $f(A) = B$. Les deux ensembles $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{M}_{n-1}(\{-1, 1\})$ ont donc même cardinal égal à $2^{(n-1)^2}$.

16.4 Encore et toujours le binôme

Exercice de khôlle 582

Soit $0 \leq i \leq k \leq n$ trois entiers.

1. Montrer que $\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}$ par deux méthodes dont l'une combinatoire.
2. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} 3^{n-i} 2^{k-i}$.

Solution :

1. Méthode ① : On a $\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!}$ et $\binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}$ c'est la même expression.

Méthode ② : On veut constituer une équipe de k joueurs choisis parmi n dont i seront titulaires. On peut d'abord choisir l'équipe, soit $\binom{n}{k}$ choix, puis les titulaires parmi les k sélectionnés, soit $\binom{k}{i}$ choix. Au total, on a donc $\binom{n}{k} \binom{k}{i}$ choix.

Mais on peut commencer par choisir les titulaires parmi les n candidats, soit $\binom{n}{i}$ puis compléter l'équipe en choisissant les $k-i$ autres joueurs parmi les $n-i$ candidats qui restent, soit $\binom{n-i}{k-i}$ choix. Au total, on a donc $\binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}$ choix.

Les deux résultats sont alors égaux, i.e. $\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}$.

2. Puis

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} 3^{n-i} 2^{k-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} \binom{k}{i} 3^{n-i} 2^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} 3^{n-i} 2^{k-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 3^{n-i} \times \left(\sum_{k=i}^n \binom{n-i}{k-i} 2^{k-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 3^{n-i} \times \left(\sum_{\ell=0}^{n-i} \binom{n-i}{\ell} 2^{\ell} \right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 3^{n-i} \times (1+2)^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 9^{n-i} = 10^n \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 583

Soit E un ensemble à $n \geq 1$. Montrer qu'il existe autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties en ayant un nombre impair.

Solution : Il suffit de les ... dénombrer ! Pour les parties ayant un nombre pair d'éléments, une telle partie peut avoir

0 ou 2 ou $\dots$ $2k$ éléments avec $2k \leq n$. Le nombre de parties ayant un nombre pair d'éléments est donc $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$.

Si on veut rédiger cela proprement, on note $P_k = \{A \subset E, |A| = k\}$ l'ensemble des parties de E ayant k éléments et $P = \{A \subset E, |A| \text{ pair}\}$ l'ensemble des parties de E ayant un nombre pair d'éléments. On montre alors (c'est évident)

que $(P_{2k})_{0 \leq 2k \leq n}$ est une partition de P (ce que l'on note $P = \bigsqcup_{0 \leq 2k \leq n} P_{2k}$). Ainsi $|P| = \sum_{0 \leq 2k \leq n} |P_{2k}| = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$.

De la même manière le nombre de parties de E ayant un nombre impair d'éléments vaut $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

Il s'agit donc de prouver que $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$, ou ce qui est équivalent

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 0$$

Mais

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} = (1-1)^n = 0 \text{ car } n \geq 1$$

16.5 En fin de khôlle, pour le plaisir (mais pas si dur)

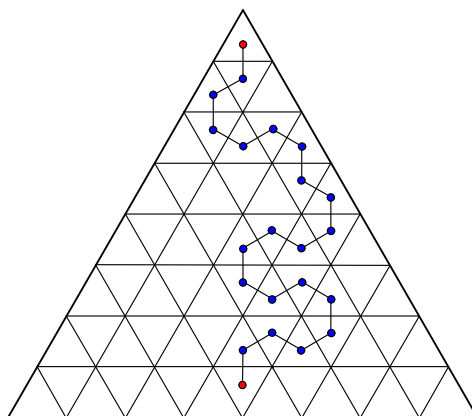
Exercice de khôlle 584

Soit un triangle équilatéral dont le côté est de longueur $n \geq 3$, divisé en triangles unitaires tel qu'illustré ci-dessous. Soit

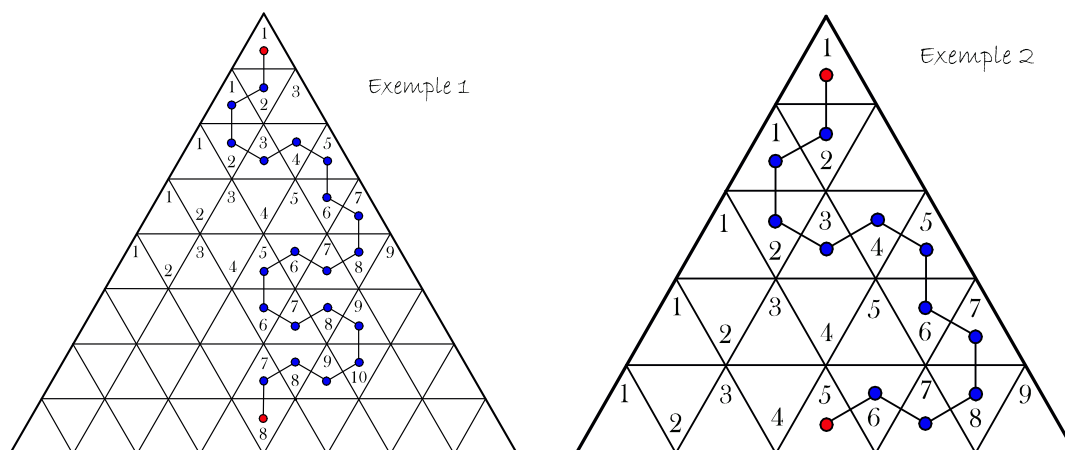
$f(n)$ le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusqu'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que (la figure illustre un tel déplacement pour $n = 8$) :

- ① On passe d'un triangle à l'autre en traversant une arête commune.
- ② On ne se déplace jamais vers le haut.
- ③ On ne repasse jamais par le même triangle. Ce qui impose qu'un déplacement à droite (resp. gauche) est suivi d'un déplacement à droite (resp. gauche) ou vers le bas.

Calculer $f(n)$ en fonction de n .



Solution : Comment peut-on coder un déplacement ? On numérote les triangles de chaque ligne.



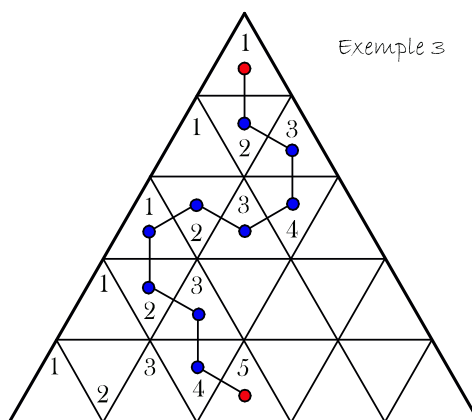
Le chemin de l'exemple 1 se code alors simplement sous la forme

$$1_{(2)} 1_{(2,3,4)} 5_{(6)} 7_{(8,7,6)} 5_{(6,7,8)} 9_{(10,9,8)} 7_{(8)}$$

Celui de l'exemple 2 (qui est un « sous-chemin » du premier) se code

$$1_{(2)} 1_{(2,3,4)} 5_{(6)} 7_{(8,7,6)} \textcircled{5}$$

On peut simplifier le codage, en effet, le départ et l'arrivée sont connus (le premier déplacement également, il passe par le triangle du milieu de la seconde ligne, mais on va garder cette information. Sur chaque ligne seuls, les « passages vers le bas » en majuscule sont utiles (et correspondent à des nombres impairs). On code donc simplement le chemin en indiquant les numéros des triangles pour lesquels le déplacement qui suit est vers le bas. Le chemin de l'exemple 1 se code alors $(1, 1, 5, 7, 5, 9, 7)$. Pour $n = 5$, le code $(1, 3, 1, 3)$ donne le chemin de l'exemple 3.



Pour $n \geq 3$, on établit donc une bijection entre les chemins et les listes de $\{1\} \times \{1, 3\} \times \{1, 3, 5\} \times \dots \times \{1, 3, \dots, 2n-1\}$. On a donc

$$f(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) = (n-1)!$$

On peut aussi dire que pour le premier déplacement vers le bas, on a un seul choix pour le triangle de départ, c'est celui portant le numéro 1. Pour le deuxième, on a deux choix, 1 ou 3, pour le troisième, on a 3 choix ...

Exercice de khôlle 585

Pour une fraction irréductible $r = \frac{p}{q}$ de $\mathbb{Q}_+^*$ (donc $(p, q) \in \mathbb{N}^2$), on pose $f(r) = p \times q$. Déterminer le nombre de fractions de $[0, 1]$ pour lesquelles $f(r) = 12!$ (factorielle de 12) ?

Solution : On a $12! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11$. Une fraction $r \in [0, 1]$ pour laquelle $f(r) = 12!$ s'écrit donc

$$r = \frac{2^{n_1} \times 3^{n_2} \times 5^{n_3} \times 7^{n_4} \times 11^{n_5}}{2^{10-n_1} \times 3^{10-n_2} \times 5^{10-n_3} \times 7^{10-n_4} \times 11^{10-n_5}}$$

où $n_1 \in \{0, 10\}$, $n_2 \in \{0, 5\}$, $n_3 \in \{0, 2\}$, $n_4 \in \{0, 1\}$ et $n_5 \in \{0, 1\}$. En effet les facteurs premiers de $12!$ doivent se répartir au numérateur ou au dénominateur de la fraction avec la même puissance (sinon r n'est pas irréductible).

On a donc 2^5 fractions de $\mathbb{Q}_+^*$ pour lesquelles $f(r) = 12!$ (on a 2 choix pour chaque n_i). Ces fractions se regroupent par deux, en effet $f(r) = f\left(\frac{1}{r}\right)$, la moitié d'entre elles sont dans $[0, 1]$, l'autre dans $[1, +\infty[$ (car $r \neq 1$ donc $r \neq \frac{1}{r}$).

Au total, on a donc $2^4 = 16$ fractions de $[0, 1]$ pour lesquelles $f(r) = 12!$? On peut même les lister (exercice Python), puisqu'elles valent

$$\frac{1}{479001600}, \frac{11}{43545600}, \frac{7}{68428800}, \frac{77}{6220800}, \frac{25}{19160064}, \frac{275}{1741824}, \frac{175}{2737152}, \frac{1925}{248832}, \frac{243}{1971200}, \frac{2673}{179200}, \frac{1701}{281600}, \frac{18711}{25600}, \frac{6075}{78848}, \frac{1024}{467775}, \frac{11264}{42525}, \frac{7168}{66825}$$

Exercice de khôlle 586

Soit E un ensemble ayant $n \geq 2$ éléments et $(A_1, \dots, A_m)$ m parties de E telles que

$$\forall (x, y) \in E, x \neq y, \exists (i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2 \text{ tel que } x \in A_i, x \notin A_j, y \notin A_i \text{ et } y \in A_j$$

On définit alors $f : E \longrightarrow \{0, 1\}^m$ par

$$f(x) = (\mathbb{1}_{A_1}(x), \dots, \mathbb{1}_{A_m}(x))$$

1. Montrer que f est injective.
2. En déduire que $n \leq 2^m$.
3. En considérant $f(E)$, améliorer la majoration en $n \leq 2^m - 2$.

Solution : Exercice très simple si l'on connaît son cours!

1. Soient x et y dans E avec $x \neq y$ alors $\exists (i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2$ tel que $\mathbb{1}_{A_i}(x) = \mathbb{1}_{A_j}(y) = 1$ et $\mathbb{1}_{A_i}(y) = \mathbb{1}_{A_j}(x) = 0$. Ainsi les composantes i et j de $f(x)$ et $f(y)$ sont différentes. Ceci prouve l'injectivité de f .
2. On en déduit que $|E| \leq n \leq |\{0, 1\}^m| = 2^m$ (c'est le cours, si $f : E \longrightarrow F$ est injective avec E et F finis, alors $|E| \leq |F|$).
3. L'idée est que certains éléments (2 en particulier) ne sont pas dans $f(E)$. En effet, $f(x) \neq (0, \dots, 0)$ et $f(x) \neq (1, \dots, 1)$ puisque si on prend $x \neq y$, il existe $(i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2$ tel que $f(x)$ ait un «1» en $i^{\text{ième}}$ position et un «0» en $j^{\text{ième}}$ place. En d'autres termes, $f(x)$ contient toujours au moins un «1» et un «0».

17.1 Calcul de coefficients

Exercice de khôlle 587

Soit $P_n(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n .

Solution :

$$P_0(X) = (1+X).$$

$$P_1(X) = (1+X)(1+X^2) = X^3 + X^2 + X + 1.$$

$$P_2(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4) = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

Par récurrence, on a $P_n(X) = 1 + X + \dots + X^{2^{n+1}-1}$, en effet

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= P_n(X)(1+X^{2^{n+1}}) = P_n(X) + X^{2^{n+1}}P_n(X) \\ &= 1 + X + \dots + X^{2^{n+1}-1} + X^{2^{n+1}}(1 + X + \dots + X^{2^{n+1}-1}) \\ &= 1 + X + \dots + X^{2^{n+1}-1} + X^{2^{n+1}} + X^{2^{n+1}+1} + \dots + X^{2^{n+1}+2^{n+1}-1} = 1 + X + \dots + X^{2^{n+2}-1} \end{aligned}$$

car $2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$. Bien sûr tout cela peut s'écrire avec des sommes de manière plus «propre». On montre par récurrence que

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k$$

C'est vrai au rang $n=0$ car $\sum_{k=0}^{2^1-1} X^k = 1 + X$, puis si c'est vrai au rang n alors

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= P_n(X)(1+X^{2^{n+1}}) = P_n(X) + X^{2^{n+1}}P_n(X) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + X^{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^{2^{n+1}+k} \end{aligned}$$

dans la seconde somme on pose $i = 2^{n+1} + k$ pour avoir

$$\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^{2^{n+1}+k} = \sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+1}+2^{n+1}-1} X^{2^i} = \sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} X^{2^i}$$

et ainsi

$$P_{n+1}(X) = \sum_{i=0}^{2^{i+1}-1} X^k + \sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} X^{2^i} = \sum_{i=0}^{2^{n+2}-1} X^{2^i}$$

Exercice de khôlle 588

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $P_a = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} X^k$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer le coefficient de X^n dans le polynôme $P_a \times P_b$. Qu'en pensez-vous ?

Solution : On sait que si $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, $Q = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ alors $P \times Q = \sum_{n \geq 0} c_n X^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Ainsi avec $a_k = \frac{a^k}{k!}$ et $b_k = \frac{b^k}{k!}$, le coefficient de X^n dans $P_a \times P_b$ vaut

$$\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \times \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \times \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}$$

Attention : Cela ne signifie pas que $P_a \times P_b \neq P_{a+b}$! On a juste calculé le coefficient de X^n . Ce n'est pas surprenant, en effet on a

$$e^{ax} = P_a(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Le coefficient de x^n dans le $DL_n(0)$ de $e^{ax} \times e^{bx}$ est alors le coefficient de X^n dans le polynôme $P_a \times P_b$. Mais

$$e^{ax} \times e^{bx} = e^{(a+b)x} = \sum_{k=0}^n \frac{(a+b)^k}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

dont le coefficient en x^n est bien $\frac{(a+b)^n}{n!}$.

Exercice de khôlle 589

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, on pose

$$S = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} \text{ et } P = \sum_{i=k}^n (X+1)^i$$

1. Exprimer S en fonction de $P^{(k)}(0)$.
2. En déduire la valeur de S .

Solution :

1. Par linéarité de la dérivation

$$P^{(k)} = \sum_{i=k}^n \left((X+1)^i \right)^{(k)}$$

Mais

$$\begin{aligned} \left((X+1)^i\right)^{(k)} &= i(i-1)\cdots(i-k+1)(X+1)^{i-k} = \frac{i!}{(i-k)!}(X+1)^{i-k} \\ &= k! \binom{i}{k} (X+1)^{i-k} \end{aligned}$$

ainsi

$$P^{(k)} = \sum_{i=k}^n k! \binom{i}{k} (X+1)^{i-k} = k! \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} (X+1)^{i-k}$$

et on a donc

$$S = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

Remarque : Le coefficient de X^k dans $(X+1)^i$ vaut $\binom{i}{k}$, ainsi S est égal au coefficient de X^k dans P . D'après Taylor, ce coefficient vaut $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

$$P = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(0)}{j!} X^j$$

2. On a

$$P = (X+1)^k + \cdots + (X+1)^n = (X+1)^k \times \left(1 + (X+1) + \cdots + (X+1)^{n-k}\right)$$

On est tenté d'écrire que

$$P = (X+1)^k \times \frac{(X+1)^{n-k+1} - 1}{(X+1) - 1}$$

mais cela fait intervenir une fraction rationnelle, ce qui n'est pas heureux. En revanche, ce qui est vrai c'est que

$$XP(X) = (X+1)^k \times \left((X+1)^{n-k+1} - 1\right) = (X+1)^{n+1} - (X+1)^k$$

et le coefficient de X^{k+1} dans $XP(X)$ est alors égal à S . Or ce coefficient vaut (binôme encore et toujours)

$$\binom{n+1}{k+1}$$

conclusion

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Exercice de khôlle 590

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$.

1. Calculer les coefficients de P_n^2 et en déduire que

$$P_n^2 = (n+1)X^n + \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)(X^p + X^{2n-p})$$

$$\text{puis que } P_n^2 = \sum_{p=0}^n p(X^p + X^{2n-p}) + P_{2n}(X) - (2n+1)X^n$$

2. En calculant $P_n^2\left(\frac{1}{2}\right)$, montrer que

$$\sum_{p=0}^n p \left(\frac{2^n}{2^p} + \frac{2^p}{2^n} \right) = 2^{n+1} + \frac{1}{2^{n-1}} + n - 4$$

Solution : Rappel : Si $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$ alors $P \times Q = \sum c_p X^p$ où $c_p = \sum_{k=0}^p a_k b_{p-k}$.

1. On utilise le rappel sachant que $a_k = b_k = 1$ si $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ et $a_k = b_k = 0$ si $k > n$. Pour $p \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ on a

$$c_p = \sum_{k=0}^p a_k a_{p-k} = \sum_{k=0}^p 1 = p+1 \text{ car } 0 \leq k \leq p \leq n \text{ et } 0 \leq p-k \leq p \leq n$$

Si $p > n$ alors (sachant que $p-k \leq n \iff k \geq p-n$)

$$\begin{aligned} c_p &= \sum_{k=0}^p a_k a_{p-k} = c_p = \sum_{k=0}^{p-n-1} \underbrace{a_k a_{p-k}}_{=0} + \sum_{k=p-n}^n a_k a_{p-k} + \sum_{k=n+1}^p \underbrace{a_k a_{p-k}}_{=0} \\ &= \sum_{k=p-n}^n 1 = n - (p-n) + 1 = 2n+1-p \end{aligned}$$

Enfin, puisque $\deg P_n^2 = 2n$, on a $c_p = 0$ si $p > 2n$. Conclusion

$$\begin{aligned} P_n^2(X) &= \sum_{p=0}^n (p+1) X^p + \sum_{p=n+1}^{2n} (2n+1-p) X^p \\ &= \sum_{p=0}^n (p+1) X^p + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) X^{2n-i} \text{ en posant } i+1 = 2n+1-p \\ &= \left(\sum_{p=0}^{n-1} (p+1) (X^p + X^{2n-p}) \right) + (n+1) X^n \end{aligned}$$

Remarque : On peut «deviner» cette égalité en observant ce que vaut P_n^2 pour des petites valeurs de n , puis la démontrer par récurrence.

Enfin

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) (X^p + X^{2n-p}) &= \sum_{p=0}^{n-1} p (X^p + X^{2n-p}) + \sum_{p=0}^{n-1} (X^p + X^{2n-p}) \\ &= \sum_{p=0}^n p (X^p + X^{2n-p}) - 2nX^n + (1 + \dots + X^{n-1} + X^{2n} + \dots + X^{n+1}) \\ &= \sum_{p=0}^n p (X^p + X^{2n-p}) + P_{2n}(X) - (2n+1) X^n \end{aligned}$$

d'où l'on obtient

$$P_n^2(X) = \sum_{p=0}^n p (X^p + X^{2n-p}) + P_{2n}(X) - nX^n$$

2. On a

$$P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

d'où

$$\sum_{p=0}^n p \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2n-p}} \right) + P_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{n}{2^n} = \left(2 - \frac{1}{2^n} \right)^2$$

soit

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n p \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2n-p}} \right) &= \left(2 - \frac{1}{2^n} \right)^2 - \left(2 - \frac{1}{2^{2n}} \right) + \frac{n}{2^n} \\ &= 4 - \frac{4}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} - 2 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{n}{2^n} \\ &= 2 + \frac{2}{2^{2n}} + \frac{n-4}{2^n} \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2n-p}} = \frac{1}{2^p} + \frac{2^p}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^n}{2^p} + \frac{2^p}{2^n} \right)$$

ainsi

$$\sum_{p=0}^n p \left(\frac{2^n}{2^p} + \frac{2^p}{2^n} \right) = 2^{n+1} + \frac{1}{2^{n-1}} + n - 4$$

17.2 Divisibilité et division euclidienne

Exercice de khôlle 591

Soit $A = X^2 - aX + 1$ et $B = X^4 - X + b$ et $\mathcal{S} = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2, A \text{ divise } B\}$. Calculer

$$S = \sum_{(a,b) \in \mathcal{S}} ab$$

Solution : On effectue la division euclidienne de B par A pour avoir

$$X^4 - X + b = (X^2 + aX + a^2 - 1)(X^2 - aX + 1) + (a^3 - 2a - 1)X + (1 + b - a^2)$$

ainsi

$$X^2 - aX + 1 \mid X^4 - X + a \iff \begin{cases} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ 1 + b - a^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^3 = 2a + 1 \\ b = a^2 - 1 \end{cases}$$

Ainsi si $(a, b) \in \mathcal{S}$, on a $ab = a^3 - a = a + 1$ d'où

$$S = \sum_{a \in \mathbb{C}, a^3=2a+1} (a + 1) = 3 + \sigma_1$$

où σ_1 est la somme des racines de $X^3 - 2X - 1$ qui est donc égale à 0.

Pour le prouver ou bien on résout $x^3 - 2x - 1 = 0$ dont -1 est racine évidente. Ou bien, on sait que la somme des racines est l'opposé du coefficient de X^2 sur celui de X^3 .

Exercice de khôlle 592

Soit $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et $P_n(X) = (\sin(t)X + \cos(t))^n$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X^2 + 1)$.

Solution : On écrit la division euclidienne :

$$P_n(X) = (X^2 + 1)Q(X) + R(X) \text{ où } \deg R < 2$$

Il existe donc a et b réels tels que

$$P(X) = (X^2 + 1)Q(X) + aX + b$$

Avec $X = i$ on a

$$ai + b = e^{int}$$

Mais puisque $(a, b) \in \mathbb{R}$, cela signifie que $b = \operatorname{Re}(e^{int}) = \cos(nt)$ et $a = \operatorname{Im}(e^{int}) = \sin(nt)$. On peut aussi utiliser $X = -i$ qui donne $-ai + b = e^{-int}$ que l'on combine avec $ai + b = e^{int}$. On en déduit que le reste est $R(X) = \sin(nt)X + \cos(nt)$.

Exercice de khôlle 593

Montrer que $B = X^3 - (1 + \sqrt{2})X^2 + (1 + \sqrt{2})X - 1$ divise $A = X^{32} - 1$.

Solution : On remarque que 1 est racine de B . Puis

$$\begin{aligned} X^3 - (1 + \sqrt{2})X^2 + (1 + \sqrt{2})X - 1 &= (X^3 - 1) - (1 + \sqrt{2})(X^2 - X) \\ &= (X - 1)(X^2 + X + 1) - (1 + \sqrt{2})(X - 1)X \\ &= (X - 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

Les racines de $X^2 - \sqrt{2}X + 1 = 0$ sont $(\Delta = -2) \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (ah oui car $2\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2}$ et $|e^{i\frac{\pi}{4}}|^2 = 1$). Les racines de B sont donc $1, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On vérifie que 1 et $e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont racines de $A = X^{32} - 1$, ce qui est vrai car

$$1^{32} = 1 \text{ et } (e^{i\frac{\pi}{4}})^{32} = e^{8i\pi} = 1$$

Puisque $A \in \mathbb{R}[X]$ les racines complexes sont deux à deux conjuguées donc $e^{i\frac{\pi}{4}}$ racine de A permet d'affirmer que $\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ aussi. On a donc 3 racines distinctes (c'est important) de A d'où

$$(X - 1)(X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = B \text{ divise } A$$

Exercice de khôlle 594

Soit $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division euclidienne de $A = (X + \sqrt{3})^n$ par $B = X^2 + 1$?

Solution : Si $n \leq 2$, le reste est A . Soit $n \geq 2$, la division euclidienne s'écrit

$$A = B \times Q + R \text{ où } \deg R < 2$$

Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $R = aX + b$. Avec $X = i$ on obtient

$$A(i) = (i + \sqrt{3})^n = ai + b$$

Puisque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on en déduit que $a = \operatorname{Im}((i + \sqrt{3})^n)$ et $b = \operatorname{Re}((i + \sqrt{3})^n)$. Puis $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $(i + \sqrt{3})^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}}$. Conclusion $b = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ et $a = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$. On a donc

$$R = 2^n \left(X \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right)$$

On peut vérifier que c'est encore vrai si $n = 0$ ou $n = 1$.

Exercice de khôlle 595

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, quel est le reste de la division euclidienne de $P = X(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1)$ par $X^2 - n^2$?

Solution : On écrit la division de manière théorique. On a

$$P = (X^2 - n^2)Q + R \text{ où } \deg R < 2$$

On peut donc écrire $R = aX + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ainsi

$$P = (X^2 - n^2)Q + aX + b$$

Avec $X = n$ et $X = -n$ on obtient le système

$$\begin{cases} an + b = P(n) \\ -an + b = P(-n) \end{cases}$$

d'où

$$b = \frac{1}{2}(P(n) + P(-n)) \text{ et } a = \frac{1}{2n}(P(n) - P(-n))$$

Puis

$$P(n) = n(n+1)\cdots(2n-1) = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{2} \frac{(2n)!}{n!}$$

$$P(-n) = (-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1) = (-1)^n n \times (n-1)\cdots(1) = (-1)^n n!$$

d'où

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{(2n-1)!}{(n-1)!} + (-1)^n n! \right) \text{ et } a = \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n-1)!}{(n-1)!} - (-1)^n n! \right)$$

Exercice de khôlle 596

Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = X^{12} + X^{10} + X^8$ par $B = X^3 + X^2 + X + 1$.

Solution : Méthode ① : On pose la division euclidienne (je laisse le lecteur le faire) pour avoir

$$A = (X^9 - X^8 + X^7 - X^6 + 2X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 2) \times B + X^2 + 2$$

C'est un gros calcul, inutile car on ne demande que le reste !

Méthode ② : On écrit que $A = BQ + R$ où $\deg R < 3$ donc R s'écrit $R = aX^2 + bX + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Puis on cherche les racines de B . On a, pour $x \neq 1$, $B(x) = \frac{1-x^4}{1-x} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x} = (1+x)(1+x^2)$ (OB²), les racines de B sont donc -1 , i et $-i$. On a alors

$$A(-1) = 1 + 1 + 1 = 3R(-1) = a - b + c$$

$$A(i) = i^{12} + i^{10} + i^8 = 1 = -a + bi + c \text{ (on a } i^{10} + i^8 = i^8(i^2 + 1) = 0 \text{ et } i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1)$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} a - b + c = 3 \\ -a + bi + c = 1 \end{cases}$$

Or a, b et c sont réels donc $\operatorname{Re}(-a + bi + c) = c - a = 1$ et $\operatorname{Im}(-a + bi + c) = b = 0$ d'où le système (plus simple)

$$\begin{cases} a - b + c = 3 \\ -a + c = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ qui donne } a = 1 \text{ et } c = 2 \text{ donc } R = X^2 + 2.$$

Exercice de khôlle 597

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} - X^n + 1$ et $Q = X^3 - X^2 + X - 1$.

Déterminer une CNS sur n pour que Q divise P et, lorsque Q ne divise pas P , quel est le reste de la division euclidienne de P par Q ?

Solution : On a $Q = (X^3 + X) - (X^2 + 1) = (X - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X - i)(X + i)$. La division euclidienne de P_n par Q s'écrit

$$P_n = Q \times A + R \text{ où } \deg R < 3$$

Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $R = aX^2 + bX + c$ (les coefficients sont réels car P_n et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$). Ainsi

$$P_n(X) = Q(X) \times A(X) + aX^2 + bX + c$$

On évalue en $1, i, -i$ pour avoir

$$\begin{cases} P_n(1) = 0 = a + b + c \\ P_n(i) = (-i)^n - i^{2n} - i^n + 1 = -a + bi + c \\ P_n(-i) = i^n - (-i)^{2n} - (-i)^n + 1 = -a - bi - c \end{cases}$$

(On n'est pas surpris de voir que $P_n(-i) = \overline{P_n(i)}$ car P_n est à coefficients réels). Avec $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$ on obtient

$$\begin{cases} P_n(1) = 0 = a + b + c \\ P_n(i) = i^n((-1)^n - 1) + 1 - (-1)^n = ((-1)^n - 1)(i^n - 1) = -a + bi + c \end{cases}$$

La troisième équation est vérifiée dès que la seconde l'est, ceci en conjuguant.

Cas ① : n est pair, on $(-1)^n - 1 = 0$ d'où

$$\begin{cases} P_n(1) = 0 \\ P_n(i) = 0 \\ P_n(-i) = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $1, i$ et $-i$ sont racines de P_n donc que $(X - 1)(X - i)(X + i)$ divise P_n .

Cas ② : n est impair, on a $(-1)^n - 1 = -2$ d'où,

$$\begin{cases} P_n(1) = 0 = a + b + c \\ P_n(i) = -2i^n + 2 = -a + bi + c \end{cases}$$

Puisque n est impair $i^n \in i\mathbb{R}$ et par unicité des parties réelles et imaginaires

$$-2i^n + 2 = -a + bi + c \iff 2 = -a + c \text{ et } bi = -2i^n$$

d'où $b = -2i^{n-1}$ et $\begin{cases} 0 = a - 2i^{n-1} + c \\ 2 = -a + c \end{cases}$ ce qui donne $c = 1 + i^{n-1}$ et $a = -1 + i^{n-1}$.

Conclusion : Q divise si et seulement si n est pair, sinon le reste de la division euclidienne de P_n par Q est

$$R = (-1 + i^{n-1})X^2 - 2i^{n-1}X + (1 + i^{n-1})$$

Remarque : ① On peut vérifier pour $n = 1$, dans ce cas

$$\begin{aligned} P_1 &= (X^2 - X + 1) - X^2 - X + 1 = -2X + 2 = 0 \times Q + (-2X + 2) \\ \text{et } -2X + 2 &= (-1 + i^{1-1})X^2 - 2i^{1-1}X + (1 + i^{1-1}) \end{aligned}$$

② Si on pose $n = 2p + 1$ on a $i^{2p} = (-1)^p$ d'où

$$R = (-1 + (-1)^p)X^2 - 2(-1)^pX + (1 + (-1)^p)$$

Si p est pair, alors $(-1)^p = 1$ et $R = 2 - 2X$, si p est impair alors $R = -2X^2 + 2X$. Bref

$$\begin{aligned} R &= 0 \text{ si } n = 4k \text{ ou } n = 4k + 2 \text{ (et dans ce cas } Q \text{ divise } P) \\ R &= 2 - 2X \text{ si } n = 4k + 1 \text{ et } R = 2X - 2X^2 \text{ si } n = 4k + 3 \end{aligned}$$

17.3 Equations dont l'inconnue est un polynôme

Exercice de khôlle 598

Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Solution : $P = 0$ est solution évidente. Si $P \neq 0$, soit $n = \deg P \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}\deg P(2X) &= n \\ \deg P'(X)P''(X) &= (n-1) + (n-2) = 2n-3\end{aligned}$$

Par égalité des degrés, on a $n = 2n-3$ d'où $n = 3$. Ensuite, on a deux méthodes.

Méthode ① : On écrit

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \text{ avec } a \neq 0$$

$$\begin{aligned}P(2X) &= 8aX^3 + 4bX^2 + 2cX + d \\ P'(X) \times P''(X) &= (3aX^2 + 2bX + c) \times (6aX + 2b) \\ &= 18a^2X^3 + 18abX^2 + (6ac + 4b^2)X + 2bc\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} 8a = 18a^2 \\ 18ab = 4b \\ 6ac + 4b^2 = 2c \\ 2bc = d \end{array} \right\} \xleftrightarrow{a \neq 0} \left\{ \begin{array}{l} 18a = 8 \text{ donc } a = \frac{4}{9} \\ b(18a - 4) = 4b = 0 \text{ donc } b = 0 \\ 6ac + 4b^2 = 2c \text{ donc } c(6a - 2) = \frac{2c}{3} = 0 \text{ donc } c = 0 \\ 2bc = d \text{ donc } d = 0 \end{array} \right.$$

Au final

$$P = \frac{4}{9}X^3 \text{ ou } P = 0$$

Méthode ② : On commence par montrer que si $P \neq 0$ alors $\deg P = 3$. Puis, avec $X = 0$ on a $P(0) = P'(0)P''(0)$. On dérive l'égalité $(E_1) \quad P(2X) = P'(X)P''(X)$ pour avoir

$$(E_2) \quad 2P'(2X) = P''(X)^2 + P'(X)P^{(3)}(X)$$

ce qui, pour $X = 0$ donne $2P'(0) = P''(0)^2 + P'(0)P^{(3)}(0)$. On dérive (E_2) pour avoir

$$\begin{aligned}(E_3) \quad 4P''(2X) &= 2P''(X)P^{(3)}(X) + P''(X)P^3(X) + P'(X)\underbrace{P^4(X)}_{=0} \\ &= 3P''(X)P^{(3)}(X)\end{aligned}$$

d'où avec $X = 0$, $4P''(0) = 3P''(0)P^{(3)}(0)$. On dérive (E_3) (on est pas rendu à dériver ainsi encore et encore ...) pour avoir

$$8P^{(3)}(2X) = 3P^{(3)}(X)^2$$

Avec $X = 0$, on obtient alors $8P^{(3)}(0) - 3P^{(3)}(0)^2 = 0$ d'où

$$P^{(3)}(0) = 0 \text{ ou } P^{(3)}(0) = \frac{8}{3}$$

Mais, $\frac{P^{(3)}(0)}{3!}$ est le coefficient dominant de P donc n'est pas nul, ainsi $P^{(3)}(0) = \frac{8}{3}$

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} P(0) = P'(0)P''(0) \\ 2P'(0) = P''(0)^2 + P'(0)P^{(3)}(0) \\ 4P''(0) = 3P''(0)P^{(3)}(0) \end{array} \right. \text{ et } P^{(3)}(0) = \frac{8}{3}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} P(0) = P'(0)P''(0) \\ 2P'(0) = P''(0)^2 + \frac{8}{3}P'(0) \\ 4P''(0) = 8P''(0) \end{cases}$$

d'où (en remontant dans $(\mathcal{S})$), $P''(0) = 0$ puis $P'(0) = 0$ puis $P(0) = 0$ et ainsi (Taylor)

$$P = \frac{P^{(3)}(0)}{3!}X^3 = \frac{\frac{8}{3}}{6}X^3 = \frac{4}{9}X^3$$

Exercice de khôlle 599

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 - X)P'' = 6P$.

Solution : On applique la méthode classique. $P = 0$ est solution, sinon, soit $n = \deg P$, on écrit $P = a_n X^n + Q$ où $\deg Q < n$ alors

$$\begin{aligned} (X^2 - X)P'' - 6P &= (X^2 - X)(n(n-1)a_n X^{n-2} + Q'') - 6(a_n X^n + Q) \\ &= (n(n-1) - 6)a_n X^{n+1} + X^2 Q'' - X P'' - 6Q = 0 \end{aligned}$$

or

$$\deg(X^2 Q'' - X P'' - 6Q) \leq \max(\deg(X^2 Q''), \deg(X P''), \deg(Q)) < n + 1$$

Le coefficient de X^{n+1} dans $(X^2 - X)P'' - 6P$ doit être nul d'où $(n(n-1) - 6)a_n = 0$. Or $a_n \neq 0$ d'où $n(n-1) = 6$ soit $n = 3$ ou $n = -2$ (exclus). Conclusion $\deg P = 3$. On peut appliquer deux méthodes, Taylor ou coefficients indéterminés. On ne fait que la seconde. On pose $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, alors

$$(X^2 - X)P'' = (X^2 - X)(6aX + 2b) = 6aX^3 + (2b - 6a)X^2 - 2bX$$

d'où

$$(X^2 - X)P'' - 6P = -2(3a + 2b)X^2 - 2(b + 3c)X - 6d$$

On en déduit que

$$(X^2 - X)P'' = 6P \iff \begin{cases} -2(3a + 2b) = 0 \\ -2(b + 3c) = 0 \\ -6d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\frac{3}{2}a \\ c = \frac{1}{2}a \\ d = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont donc de la forme $P = 0$ ou $P = a(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X)$ où $a \in \mathbb{R}^*$, soit

$$P = a\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X\right) \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

Exercice de khôlle 600

Résoudre $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ où l'inconnue est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

Solution : Il est clair que $P = 0$ est solution. Si $P \neq 0$, soit $n = \deg P$, on écrit $P = a_n X^n + Q$ où $a_n \neq 0$ et $\deg Q < n$. Ainsi

$$\begin{aligned} P(X^2) &= a_n X^{2n} + Q(X^2) \text{ avec } \deg(Q(X^2)) < 2n \\ (X^2 + 1)P(X) &= (X^2 + 1)(a_n X^n + Q) = a_n X^{n+2} + a_n X^n + (X^2 + 1)Q \end{aligned}$$

Puisque $\deg(a_n X^n + (X^2 + 1)Q) \leq \max(\deg(a_n X^n), \deg((X^2 + 1)Q)) < n + 1$, le degré de $(X^2 + 1)P(X)$ est $n + 2$ et celui de $P(X^2)$ vaut $2n$.

Si ces deux polynômes sont égaux, on en déduit que $2n = n + 2$ soit $n = 2$.

Méthode ① : On pose alors $P = aX^2 + bX + c$, un calcul simple donne

$$P(X^2) - (X^2 + 1)P(X) = -bX^3 + (-a + b - c)X^2 - bX$$

Ainsi

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) \iff \begin{cases} -b = 0 \\ -a + b - c = 0 \\ -b = 0 \end{cases} \iff b = 0 \text{ et } a = -c$$

Conclusion : les solutions sont les polynômes $P = a(X^2 - 1)$ où $a \in \mathbb{R}$ (on avait exclus $a = 0$, mais pour $P \neq 0$, le cas $a = 0$ permet de récupérer $P = 0$).

Remarque : On vérifie facilement que $P(X^2) = (X^2)^2 - 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 1) = (X^2 + 1)P(X)$, ouf !

Exercice de khôlle 601

Résoudre $P \circ P = P$ où l'inconnue est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

Solution : Il est clair que $P = 0$ est solution. Si $P \neq 0$ on sait que $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2$. Si $P \circ P = P$ alors $\deg(P)^2 = \deg(P)$ d'où $\deg P \in \{0, 1\}$.

Si $\deg P = 0$ alors P est une constante $a \in \mathbb{R}^*$ et $P \circ P = a$, ainsi P est solution (le cas $a = 0$ permet de récupérer $P = 0$).

Si $\deg P = 1$, on pose $P = aX + b$ où $a \neq 0$, ainsi

$$P \circ P = a(aX + b) + b = a^2X + ab + b$$

d'où

$$P \circ P = P \iff \begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \iff a = 1 \text{ et } b = 0 \text{ (car } a = 0 \text{ est exclus)}$$

Ainsi $P = X$.

Conclusion, les solutions sont de la forme $P = a \in \mathbb{R}$ ou $P = X$.

Exercice de khôlle 602

Résoudre $(P')^2 = 4P$ où l'inconnue est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

Solution : Il est clair que $P = 0$ est solution. Si $P = a \in \mathbb{R}^*$ est une constante alors $(P')^2 = 0 \neq 4P$. Si $n = \deg P \geq 1$ alors

$$\deg P' = n - 1 \text{ d'où } \deg(P')^2 = 2n - 2 = \deg 4P = n$$

d'où l'on déduit que $\deg P = 2$. On pose alors $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$, après calculs on obtient

$$(P')^2 - 4P = 4a(a - 1)X^2 + 4b(a - 1)X + b^2 - 4c$$

d'où

$$(P')^2 = 4P \iff \begin{cases} 4a(a - 1) = 0 \\ 4b(a - 1) = 0 \\ b^2 - 4c = 0 \end{cases} \xrightarrow{a \neq 0} \begin{cases} a = 1 \\ c = \frac{b^2}{4} \end{cases}$$

Conclusion, les solutions sont de la forme $P = 0$ ou $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2$ où $b \in \mathbb{R}$.

Remarque : On peut aussi remarquer que si α est racine de P alors $P'(\alpha)^2 = 0$ donc α est racine double. Donc si

$\deg P = 2$, P est de la forme $a(X - \alpha)^2$. Puis on remplace dans $(P')^2 = 4P \dots$

Exercice de khôlle 603

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X+1) = (X+3)P(X)$.

Solution : Méthode ① : Avec $X = 0$ on a $3P(0) = 0$ et $X = -3$ donne $-3P(-2) = 0$, ainsi 0 et -2 sont racines de P . On factorise P sous la forme

$$P(X) = X(X+2)Q(X) \text{ où } Q \in \mathbb{C}[X]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} XP(X+1) &= X(X+3)(X+1)Q(X+1) \\ (X+3)P(X) &= X(X+3)(X+2)Q(X) \end{aligned}$$

d'où (par intégrité de $\mathbb{C}[X]$ i.e. on peut simplifier par $X(X+3)$)

$$XP(X+1) = (X+3)P(X) \iff (X+1)Q(X+1) = (X+2)Q(X)$$

Avec $X = -1$ on obtient $Q(-1) = 0$ et $X = -2$ donne aussi $Q(-1) = 0$. On factorise donc $Q(X) = (X+1)R(X)$ d'où

$$\begin{aligned} (X+1)Q(X+1) &= (X+1)(X+2)R(X+1) \\ (X+2)Q(X) &= (X+1)(X+2)R(X) \end{aligned}$$

d'où

$$(X+1)Q(X+1) = (X+2)Q(X) \iff R(X+1) = R(X)$$

La fonction polynômiale $x \mapsto R(x)$ est donc périodique de période 1, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $R(n) = R(0)$. Mais alors le polynôme $R(X) - R(0)$ a une infinité de racine (tous les $n \in \mathbb{N}$) donc est nul. Bref $R = \lambda \in \mathbb{C}$ est une constante et

$$P(X) = \lambda X(X+1)(X+2) \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}$$

Méthode ② : Analyse Soit P une solution, alors P a un nombre fini de racines réelles (éventuellement aucune). Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $x \geq N$ alors $P(x) \neq 0$ (N est plus grand que la plus grande racine réelle de P par exemple). On a ainsi pour $x \geq N$

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = \frac{x+3}{x}$$

d'où si $n > N$

$$\begin{aligned} \frac{P(n)}{P(N)} &= \prod_{k=N}^{n-1} \frac{P(k+1)}{P(k)} = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{k+3}{k} = \frac{\prod_{k=N}^{n-1} (k+3)}{\prod_{k=N}^{n-1} k} = \frac{\prod_{i=N+3}^{n+2} i}{\prod_{i=N}^{n-1} i} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n}{N(N+1)(N+2)} \end{aligned}$$

ainsi $\forall n \geq N+1$

$$P(n) = \lambda n(n+1)(n+2) \text{ où } \lambda = \frac{P(N)}{N(N+1)(N+2)} \in \mathbb{C}$$

Le polynôme $P - \lambda X(X+1)(X+2)$ admet donc une infinité de racines (les $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n > N$) donc est nul. Ainsi

$$P = \lambda X(X+1)(X+2) \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}$$

Synthèse : on vérifie qu'un tel polynôme est bien solution du problème posé.

Exercice de khôlle 604

Soit Φ définie sur $\mathbb{C}[X]$ par $\Phi(P) = (X^2 + 3X + 2)P'(X) - (2X + 3)P(X)$.

1. Déterminer, en fonction du degré de P , le degré de $\Phi(P)$.
2. L'application Φ est-elle surjective ? injective ?
3. Déterminer $\ker \Phi = \{P \in \mathbb{C}[X], \Phi(P) = 0\}$.

Solution : C'est comme l'exercice type ...

1. Si $P = 0$ alors $\Phi(P) = 0$, sinon on écrit que $P = a_n X^n + Q$ où $n = \deg P$, $a_n \neq 0$ et $\deg Q < n$. On a alors

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= (X^2 + 3X + 2)(na_n X^{n-1} + Q') - (2X + 3)(a_n X^n + Q) \\ &= a_n(n-2)X^{n+1} + \underbrace{(n-3)a_n X^n + 2na_n X^{n-1} + (X^2 + 3X + 2)Q' - (2X + 3)Q}_R\end{aligned}$$

or

$$\deg R \leq \max(n, n-1, n-1, n)$$

donc si $n \neq 2$, on a bien $a_n(n-2) \neq 0$ et ainsi $\deg(\Phi(P)) = n+1$.

Reste le cas où $n = 2$. Dans ce cas, on pose $P = aX^2 + bX + c$ et un calcul simple donne

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= (X^2 + 3X + 2)(2aX + b) - (2X + 3)(aX^2 + bX + c) \\ &= (3a - b)X^2 + (4a - 2c)X + 2b - 3c\end{aligned}$$

Si $b \neq 3a$ alors $\deg(\Phi(P)) = 2$.

Si $b = 3a$ et $c \neq 2a$ alors $\deg(\Phi(P)) = 1$.

Si $b = 3a$ et $c = 2a$ alors $\Phi(P) = 0$ et $\deg(\Phi(P)) = -\infty$.

2. On constate que $\deg \Phi(P) \neq 0$ et $\deg \Phi(P) \neq 3$, donc X^3 (ou 1) n'a pas d'antécédent. Ainsi Φ n'est pas surjective. De même $\Phi(X^2 + 3X + 2) = 0 = \Phi(0)$, donc Φ n'est pas injective.
3. Le calcul précédent prouve que $\Phi(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $P = a(X^2 + 3X + 2)$ avec $a \neq 0$. Ainsi

$$\ker \Phi = \{a(X^2 + 3X + 2), a \in \mathbb{C}\}$$

Remarque : Si on pose $Q = X^2 + 3X + 2$, on a $\Phi(P) = QP' - Q'P$ ainsi $\Phi(Q) = 0$ est immédiat !

Exercice de khôlle 605

Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, P(xy) = P(x)P(y)$$

Solution : On commence par chercher quelques solutions. Si P est constant $P = a$ alors $a^2 = a$ donc $P = 0$ ou $P = 1$. On remarque ensuite que pour $d \in \mathbb{N}$, X^d est aussi solution. Bon, et maintenant on prie pour qu'il n'en existe pas d'autres !

Analyse : Avant tout, on se ramène à une variable. En effet $\forall x \in \mathbb{R}, P(x^2) = P(x)^2$ donc, cette égalité numérique étant vraie sur $\mathbb{R}$ qui est infini, on a $P(X^2) = P(X)^2$. Si P non constant est une solution, soit d son degré. On écrit alors

$$P = a_d X^d + a_n X^n + Q$$

où $d = \deg P$, donc $a_d \neq 0$, $n \leq d-1$ (il peut avoir des lacunes dans les coefficients de P , par exemple $P = 2X^5 + 3X^2 + X + 1$ pour lequel $d = 5$ et $n = 3$!) et $\deg Q < n$. On a alors

$$\begin{aligned}P(X^2) &= a_d X^{2d} + a_n X^{2n} + Q(X^2) \\ P(X)^2 &= (a_d X^d + a_n X^n + Q(X))^2 \\ &= a_d^2 X^{2d} + 2a_d a_n X^{n+d} + a_n^2 X^{2n} + \underbrace{2a_d X^d Q(X) + 2a_n X^n Q(X) + Q(X)^2}_R\end{aligned}$$

On a

$$\deg(2a_d X^d Q(X)) < d + n, \deg(2a_n X^n Q(X)) < 2n < d + n \text{ et } \deg(Q(X)^2) < 2n < d + n$$

d'où $\deg(R) < 2n$. Ainsi

$$0 = P(X^2) - P(X)^2 = (a_d - a_d^2) X^{2d} - 2a_d a_n X^{n+d} + (a_n - a_n^2) X^{2n} + R \text{ où } \deg R < 2n$$

Ceci impose $a_d - a_d^2 = 0$, $2a_d a_n = 0$ d'où (avec $a_d \neq 0$) $a_d = 1$ et $a_n = 0$. Tous les coefficients de degré strictement inférieur à d sont donc nuls et $P = X^n$.

Conclusion (car on a fait la synthèse en remarquant que X^n est une solution), les polynômes solutions sont les X^n où $n \in \mathbb{N}$ et le polynôme nul.

Exercice de khôlle 606

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} P(t) dt = n^2 - 1$.

Solution : Analyse : Soit P un polynôme solution et Q tel que $Q' = P$ et $Q(0) = 0$. En d'autres termes si $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ est solution, on pose $Q = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q(n+1) - Q(n) = n^2 - 1$$

On en déduit que pour $n \geq 1$ (Pirate!)

$$\begin{aligned} Q(n) - Q(0) &= Q(n) = \sum_{k=0}^{n-1} Q(k+1) - Q(k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - 1) \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - n = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6} \\ &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{N}$ est une partie infini, cela permet d'affirmer que $Q = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} - \frac{5X}{6}$. En dérivant, on obtient $P = X^2 - X - \frac{5}{6}$.

Synthèse : Simple calcul pour obtenir $\int_n^{n+1} \left(t^2 - t - \frac{5}{6}\right) dt = n^2 - 1$.

Remarque : On peut aussi écrire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} P(t) dt = \int_0^n P(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$.

Puis, impérativement, préciser qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\int_0^n P(t) dt = Q(n)$. On en déduit alors que $\int_0^x P(t) dt = \frac{x(x+1)(2x-5)}{6}$ (car $\mathbb{N}$ est infini). Enfin le TFA donne $P'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x(x+1)(2x-5)}{6} \right) = x^2 - x - \frac{5}{6}$.

17.4 Histoire de racines

Exercice de khôlle 607

- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = X^2 + X + 1$ divise $A = P(X^{2024}) + P(X^{1012}) + P(X^{10})$.
- (★) Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, non nul, de degré 5, pour lequel $B = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ divise $A = P(X^{2024}) + P(X^{1012}) + P(X^{10})$.

Solution :

1. Les racines de B sont j et j^2 . Ainsi

$$B \text{ divise } A \iff A(j) = A(j^2) = 0$$

On a $j^{2024} = j^{2022} \times j^2 = j^2$ car 2022 est un multiple de 3 (somme des chiffres) donc $j^{2022} = 1$ (on a $2022 = 3 \times q$ donc $j^{2022} = (j^3)^q = 1^q = 1$). De même $j^{1012} = j^{1011} \times j = j$ et $j^{10} = j^9 \times j = j$. On en déduit que

$$A(j) = P(j^2) + 2P(j)$$

Puisque A et P sont à coefficients réels, en conjuguant, on obtient

$$A(j^2) = P(j) + 2P(j^2)$$

On a donc

$$A(j) = A(j^2) = 0 \iff \begin{cases} 2P(j) + P(j^2) = 0 \\ P(j) + 2P(j^2) = 0 \end{cases} \iff P(j) = P(j^2) = 0 \iff B \text{ divise } P$$

car le système $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ a pour déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc a une unique solution $a = b = 0$.

Les polynômes P solutions sont donc les multiples de B .

2. Si $B = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, on a $B(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \sum_{k=0}^4 z^k = \frac{z^5 - 1}{z - 1}$ si $z \neq 1$. Puisque $z = 1$ n'est clairement pas racine de B , on a

$$B(z) = 0 \iff z^5 - 1 = 0 \text{ et } z \neq 1$$

On résout $z^5 = 1 \iff \exists k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$. Puis $z \neq 1$, on exclut la valeur $k = 0$ et les racines de B sont les $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ où $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On pose alors $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, les racines de B sont alors a, a^2, a^3, a^4 et on n'oublie pas que $a^5 = 1$. De la même manière, on a

$$B \text{ divise } A \iff A(a) = A(a^2) = A(a^3) = A(a^4) = 0$$

Avec $a^5 = 1$, on a $a^{10} = (a^5)^2 = 1$ et de même $(a^2)^{10} = (a^{10})^2 = 1$, $(a^3)^{10} = (a^4)^{10} = 1$. Puis $a^{2024} = a^{2020} \times a^4 = a^4$ et $a^{1012} = a^{1010} \times a^2 = a^2$.

Ainsi

$$A(a) = P(a^4) + P(a^2) + P(1)$$

De même $(a^2)^{2024} = (a^{2024})^2 = a^8 = a^5 \times a = a^3$ et $(a^2)^{1012} = a^{2024} = a^4$ d'où

$$A(a^2) = P(a^3) + P(a^4) + P(1)$$

$(a^3)^{2024} = a^{2024} \times (a^2)^{2024} = a^{12} = a^2$ et $(a^3)^{1012} = a^2 \times a^4 = a$ donne

$$A(a^3) = P(a^2) + P(a) + P(1)$$

et enfin $(a^4)^{2012} = ((a^2)^{2012})^2 = a^6 = a$, $(a^4)^{1012} = (a^2)^{2021} = a^3$ conduit à

$$A(a^4) = P(a) + P(a^3) + P(1)$$

Pour obtenir, un exemple simple, on choisit P tel que $P(a) = P(a^2) = P(a^3) = P(a^4) = P(1) = 0$. On choisit donc

$$P = (X - 1)(X - a)(X - a^2)(X - a^3)(X - a^4) = X^5 - 1$$

car $1, a, a^2, a^3, a^4$ sont les racines cinquième de l'unité.

Remarque : Si on pose $x = P(a)$, $y = P(a^2)$, $z = P(a^3)$, $t = P(a^4)$ et $u = P(1)$ alors

$$A(-a) = A(-a^2) = A(-a^3) = A(-a^4) = 0 \iff \begin{cases} y+t+u=0 \\ z+t+u=0 \\ x+y+u=0 \\ x+z+u=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+u=0 \\ x+z+u=0 \\ y+t+u=0 \\ z+t+u=0 \end{cases}$$

On résout ce système par le Pivot (exercice) pour avoir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t-u \\ -t-u \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

Une CNS pour que P soit solution est donc $P(a) = P(a^4)$, $P(a^2) = -P(a^4) - P(1)$, $P(a^3) = P(a^2) = -P(a^4) - P(1)$. On peut alors montrer que P est de la forme

$$b \left(X^4 + X - \frac{1}{3} \right) + c \left(X^3 + X^2 - \frac{1}{3} \right) + X^5 - 1 \text{ où } (b, c) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque ① : On peut décrire les solutions.

Analyse : Si P est une solution alors $P(a) = P(a^4) = P(\bar{a})$ donc $P(a) \in \mathbb{R}$. Si on pose $P_1 = \frac{1}{10} \left(3 \left(X + X^2 + X^3 + X^4 - \right. \right.$

et $P_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} (X^4 - X^3 - X^2 + X)$, alors

$$\begin{aligned} P_1(1) &= 1, P_1(a) = 0 \\ P_2(1) &= 0 \text{ et } P_2(a) = 1 \\ P_i(a) &= P(a^4), P_i(a^2) = P_i(a^3) = -P(a^4) - P(1) \end{aligned}$$

Ces deux polynômes sont solutions et $P - P(1)P_1 - P(a)P_2$ admet alors $1, a, a^2, a^3, a^4$ comme racines donc

$$P = P(1)P_1 + P(a)P_2 + (X^5 - 1)Q$$

On en déduit que P est de la forme

$$P = \alpha P_1 + \beta P_2 \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ (car } P(a) \in \mathbb{R})$$

Synthèse : On vérifie que tout polynôme de la forme $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ est bien solution.

Exercice de khôlle 608

(★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 1$ et tel que les racines de P ont toutes une partie imaginaire strictement négative.

- Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|P(z)| = |P(\bar{z})|$ alors $z \in \mathbb{R}$.
- On écrit $P(X) = P_1(X) + iP_2(X)$ où $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P_1 et P_2 sont scindés dans $\mathbb{R}$.
- Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P_1 + \lambda P_2$ est scindé.

Solution : On peut factoriser $P = a \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ où $a \in \mathbb{C}$, $n = \deg P$ et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $z_k = \alpha_k - i\beta_k$ avec $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

1. Si $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $|P(z)| = |P(\bar{z})|$. Si $P(z) = 0$ alors $P(\bar{z}) = 0$ donc z et $\bar{z}$ sont des racines de P .

Puisque $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$ c'est impossible (z et $\bar{z}$ ne peuvent avoir, tous les deux, une partie imaginaire strictement négative). On peut donc écrire que

$$1^2 = \left(\frac{|P(z)|}{|P(\bar{z})|} \right)^2 = \left| \frac{P(z)}{P(\bar{z})} \right|^2 = \left| \frac{\prod_{k=1}^n (z - z_k)}{\prod_{k=1}^n (\bar{z} - z_k)} \right|^2 = \prod_{k=1}^n \frac{|z - z_k|^2}{|\bar{z} - z_k|^2}$$

mais

$$\frac{|z - z_k|^2}{|\bar{z} - z_k|^2} = \frac{(a - \alpha_k)^2 + (b + \beta_k)^2}{(a - \alpha_k)^2 + (-b + \beta_k)^2} - 1 = \frac{4b\beta_k}{|\bar{z} - z_k|^2}$$

Par l'absurde, si $b \neq 0$, alors $\frac{4b\beta_k}{|\bar{z} - z_k|^2}$ a un signe constant. Si $b > 0$, on a donc $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\frac{|z - z_k|^2}{|\bar{z} - z_k|^2} > 1$, le produit ne peut valoir 1 ! Et si $b < 0$, $\frac{|z - z_k|^2}{|\bar{z} - z_k|^2} < 1$, idem ...

Conclusion $b = 1$.

2. Puisque $P_1 \in \mathbb{R}[X]$, pour $z \in \mathbb{C}$, on a $P_1(\bar{z}) = \overline{P_1(z)}$ et de même avec P_2 . Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_1 , on a alors

$$|P(z)| = |iP_2(z)| = |P_2(z)| \text{ et } |P(\bar{z})| = |iP_2(\bar{z})| = |\overline{P_2(z)}| = |P_2(z)|$$

d'après la question 1, on a $z \in \mathbb{R}$. Les racines de P_1 sont toutes réelles, donc P_1 est scindé.

De même si z est une racine de P_2 ,

$$|P(z)| = |P_1(z)| = |P_1(z)| \text{ et } |P(\bar{z})| = |P_1(\bar{z})| = |\overline{P_1(z)}| = |P_1(z)|$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et z une racine de $P_1 - \lambda P_2$ alors $P_1(z) = \lambda P_2(z)$ et

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |(\lambda + i)P_2(z)| = |\lambda + i| |P_2(z)| \\ |P(\bar{z})| &= |(\lambda + i)P_2(\bar{z})| = |\lambda + i| |P_2(\bar{z})| = |\lambda + i| |\overline{P_2(z)}| = |\lambda + i| |P_2(z)| = |P(z)| \end{aligned}$$

d'où z est réelle, ce qui prouve le résultat.

Exercice de khôlle 609

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la fonction polynômiale associée soit périodique, montrer que P est constant.

Solution : Soit $T > 0$ une période de T , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(nT) = P(0)$$

Le polynôme $Q = P - P(0)$ admet donc une infinité de racines (tous les nT où $n \in \mathbb{N}$) donc est nul. Conclusion $P = P(0)$ est bien constant.

17.5 Relations coefficients-racines

Exercice de khôlle 610

Soient α, β, γ les racines de $P = X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de

$$A = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}$$

Solution : Méthode ① : On réduit au même dénominateur pour avoir

$$A = \frac{3 - 2(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

Puisque α, β, γ sont les racines de P , on a

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) \\ &= X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)X - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

d'où (unicité des coefficients)

$$\alpha + \beta + \gamma = 5, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 6 \text{ et } \alpha\beta\gamma = 1$$

Le numérateur de A vaut donc $3 - 10 + 6 = -1$. Pour le dénominateur, ou bien on le développe pour avoir

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = 1 - 5 + 6 - 1 = 1$$

Ou bien (plus malin, on a $P(1) = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = -1$ d'où $A = -1$).

Méthode ② (plus jolie). On cherche un polynôme Q tel que $a = \frac{1}{1-\alpha}, b = \frac{1}{1-\beta}$ et $c = \frac{1}{1-\gamma}$ soient racines de Q .

L'idée est d'inverser la fonction $y = \frac{1}{1-x}$. On a

$$y = \frac{1}{1-x} \iff x = \frac{y-1}{y}$$

ainsi

$$\begin{aligned} x \text{ racine de } P(x) &\iff x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0 \\ &\iff \left(\frac{y-1}{y}\right)^3 - 5\left(\frac{y-1}{y}\right)^2 + 6\left(\frac{y-1}{y}\right) - 1 = 0 \\ &\iff \frac{y^3 + y^2 - 2y - 1}{y^3} = 0 \iff y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que a, b et c sont racines de $X^3 + X^2 - 2X - 1$. D'après les relations coefficients-racines, on a

$$A = a + b + c = -1$$

Exercice de khôlle 611

Soit $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, où a, b, c et d sont des réels. On sait que $P(2i) = P(2+i) = 0$, que vaut $a + b + c + d$?

Solution : Le polynôme P est à coefficients réels, ses racines sont donc soit réelles, soit complexes deux à deux conjuguées. Or, on sait que $2i$ et $2+i$ sont racines de P , ainsi $-2i$ et $2-i$ (les conjugués) sont aussi racines de P . On

a donc quatre racines de P qui est de degré 4 et unitaire. On peut ainsi affirmer que (le coefficient dominant vaut 1)

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - 2i)(X + 2i)(X - 2 - i)(X - 2 + i) \\ &= (X^2 + 4)(X^2 - 2\operatorname{Re}(2 + i)X + |2 + i|^2) \\ &= (X^2 + 4)(X^2 - 4X + 5) \\ &= X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d \end{aligned}$$

Or $P(1) = 1 + a + b + c + d = 5 \times 2 = 10$ donc

$$a + b + c + d = 9$$

Exercice de khôlle 612

Factoriser $P = 36X^3 - 12X^2 - 5X + 1$ sachant que l'une des racines est la somme des deux autres.

Solution : Soient α, β et γ les racines de P avec $\gamma = \alpha + \beta$. La somme des racines de P vaut

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\gamma = -\frac{-12}{36} = \frac{1}{3} \text{ d'où } \gamma = \frac{1}{6} = \alpha + \beta$$

La produit des racines vaut

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{36} \text{ d'où } \alpha\beta = -\frac{1}{6}$$

Mais alors α et β sont racines de

$$X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta = X^2 - \frac{X}{6} - \frac{1}{6}$$

dont les racines sont $(\Delta = \frac{1}{36} + \frac{4}{6} = \frac{25}{36}) - \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Conclusion

$$P = 36 \left(X - \frac{1}{6}\right) \left(X + \frac{1}{3}\right) \left(X - \frac{1}{2}\right) = (3X + 1)(2X - 1)(6X - 1)$$

Exercice de khôlle 613

Trouver trois nombres a, b et c tels que $a + b + c = 6$, $abc = 6$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

Solution : Soit $P = (X - a)(X - b)(X - c)$ alors

$$\begin{aligned} P &= X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ca)X - abc \\ &= X^3 - 6X^2 + (ab + bc + ca)X - 6 \end{aligned}$$

Mais $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ d'où $ab + bc + ca = \frac{36 - 14}{2} = 11$ et ainsi

$$P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$

On remarque que 1 est racine évidente, on factorise $P = (X - 1)(X^2 - 5X + 6)$, on résout et pour finir les racines de P sont 1, 2, 3 soleil! Conclusion $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ à une permutation près.

Exercice de khôlle 614

Déterminer toutes les solutions de $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.

Solution : On pose $a = e^{ix}$, $b = e^{iy}$ et $c = e^{iz}$ alors $a + b + c = 0$. Mais on a aussi

$$0 = \overline{a + b + c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc}$$

d'où $ab + bc + ca = 0$. Si on pose $P = (X - a)(X - b)(X - c)$, on a alors

$$P = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ca)X - abc = X^3 - k$$

où $k = abc$ est de module 1. Si on note $k = e^{i\alpha}$ alors (cours sur les racines énièmes)

$$a = e^{i\frac{\alpha}{3}}, b = e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3})} = ja \text{ et } c = e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3})} = j^2a$$

a une permutation près. Puis on sait que si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{iu} = e^{iv} \iff u = v + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi

$$x = \frac{\alpha}{3} + 2k\pi, y = \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \text{ et } z = \frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3} + 2m\pi \text{ où } (k, m, n) \in \mathbb{Z}^3$$

à une permutation près.

Remarque : Si on note A, B et C les points d'affixe a, b et c , la condition $a + b + c = 0$ permet d'affirmer que l'isobarycentre du triangle ABC est O donc (on n'oublie pas que A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 1) coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Naguère, on savait qu'alors ABC est équilatéral et c'est fini.

Exercice de khôlle 615

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que le polynôme $P = X^3 + X^2 + \alpha X + 6$ admette deux racines réelles $a < b$ dont la somme égale le produit. Déterminer la valeur de $\left(\frac{b+5}{a}\right)^2$.

Solution : Si on note a, b, c les trois racines avec $a+b+c=0$, on a $P = (X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ca)X - abc$. Par unicité des coefficients, on a

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= a + b + c = -1 \\ \sigma_2 &= ab + bc + ca = \alpha \\ \sigma_3 &= abc = -6\end{aligned}$$

Si on pose $s = a + b = ab$ alors σ_1 donne $s + c = -1$ et σ_3 conduit à $s \times c = -6$. Ainsi s et c sont racines de

$$X^2 - (s + c)X + s \times c = X^2 + X - 6$$

Les solutions sont -3 et 2 . Enfin $\sigma_2 = s + c(a + b) = s + sc = s - 6 = \alpha$ donne la valeur de α .

Premier cas : $s = -3$, $c = 2$, $\alpha = -9$. Puis a et b sont racines de $X^2 - sX + s = X^2 + 3X - 3$. Une bête résolution donne $a = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$ et $b = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$.

Second cas : $s = 2$, $c = -3$, $\alpha = -4$. Puis a et b sont racines de $X^2 - sX + s = X^2 - 2X + 2$ qui n'a pas de racines réelles.

Conclusion $a = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$, $b = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$, puis

$$a^2 = -3a + 3 = 3(1 - a) \text{ car } a \text{ est racine de } X^2 + 3X - 3$$

$$\begin{aligned}
(b+5)^2 &= b^2 + 10b + 25 = (-3b+3) + 10b + 25 \quad (b \text{ racines de } X^2 + 3X - 3) \\
&= 7b + 28 = 7(a+b-b) + 28 = 7(-3-a) + 28 \quad (s = -3) \\
&= 7 - 7a = 7(1-a)
\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\frac{b+5}{a}\right)^2 = \frac{7}{3}$$

Exercice de khôlle 616

Ces trois complexes sont bien surprenants : Ils sont non nuls, leur somme est égale à leur produit mais aussi à l'inverse de la somme de leur inverse. Que valent-ils ?

Solution : On les note a, b, c et on traduit l'énoncé. Si $s = a + b + c$, alors $s = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = abc$. On résout donc

$$\begin{cases} a + b + c = s \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{s} \\ abc = s \end{cases}$$

où $s \in \mathbb{C}$. Si on pose $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ dont les racines sont a, b, c on a

$$P(X) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$$

Mais $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{s}$ d'où $ab+bc+ca = 1$ et ainsi

$$P(X) = X^3 - sX^2 + X - s = (X-s)(X^2+1)$$

Ces trois nombres sont $i, -i$ et s où $s \neq 0$ (pour que l'inverse existe).

Exercice de khôlle 617

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $A = (Z+1)^n - (Z+i)^n$.

- Déterminer le degré, noté d , de A , son coefficient dominant a_d et a_{d-1} , le coefficient de X^{d-1} .
- Déterminer les racines, notées z_k où $k \in \llbracket 1; d \rrbracket$ de P .

3. Que valent $S = \sum_{k=1}^d z_k$ et $P = \prod_{k=1}^d z_k$?

4. En déduire une forme close de

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \text{ et de } \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Solution :

- Avec le binôme, $A = Z^n + nZ^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}Z^{n-2} + Q_1 - \left(Z^n + niZ^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}i^2Z^{n-2} + Q_2\right)$ où $\deg(Q_i) < n-2$. Ainsi

$$A = (1-i)nZ^{n-1} + n(n-1)Z^{n-2} + Q \text{ où } \deg Q < n-2$$

On en déduit que $d = \deg Z = n-1$, que le coefficient dominant vaut $a_d = (1-i)n$ et que $a_{d-1} = n(n-1)$.

2. On a

$$\begin{aligned}
 P(z) &= 0 \iff (z+1)^n - (z+i)^n = 0 \iff_{z=i \text{ non racine}} \left(\frac{z+1}{z+i}\right)^n = 1 \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \frac{z+1}{z+i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z+i) \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = ie^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \\
 &\iff \exists k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, z = \frac{ie^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \text{ car } k=0 \text{ donne } 0 = i-1
 \end{aligned}$$

Les racines sont donc les $z_k = \frac{ie^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$ pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. On peut simplifier avec

$$\begin{aligned}
 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} &= -2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \\
 ie^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 &= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)} - 1 = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}
 \end{aligned}$$

d'où les racines de P :

$$z_k = -\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ pour } k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$$

3. La somme des racines vaut $S = -\frac{a_{d-1}}{a_d} = -\frac{n(n-1)}{(1-i)n} = -\frac{n-1}{1-i}$ et le produit vaut $P = (-1)^{n-1} \frac{a_0}{a_n} = (-1)^{n-1} \frac{A(0)}{a_n}$. Si vous avez un doute pour le produit, le KDS vous dit d'écrire

$$A(X) = a_d \prod_{k=1}^d (X - z_k) \text{ d'où } A(0) = a_d \prod_{k=1}^d (-z_k) = (-1)^d a_d \times P$$

Puisque $A(0) = 1 - i^n$, on a $P = (-1)^{n-1} \frac{1 - i^n}{n(1-i)}$.

4. La somme des racines vaut donc

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} -\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{n-1}{1-i}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{n(n-1)}{1-i} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{n-1}{\sqrt{2}}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1 - i^n}{n(1-i)} = (-1)^{n-1} \frac{1 - e^{\frac{in\pi}{2}}}{n\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = (-1)^{n-1} \times \frac{-\sqrt{2}i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) e^{\frac{i(n+1)\pi}{4}}}{n}$$

Mais

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = (-e^{i\frac{\pi}{4}})^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (-1)^{n-1} e^{\frac{i(n-1)\pi}{4}} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

d'où

$$(-1)^{n-1} e^{\frac{i(n-1)\pi}{4}} \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = (-1)^{n-1} \times \frac{-\sqrt{2}i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) e^{\frac{i(n+1)\pi}{4}}}{n}$$

soit

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -\sqrt{2} \frac{i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) e^{\frac{in\pi}{2}}}{n} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}$$

Remarque : Avec $\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ (en utilisant $\sin(a+b)$), on en déduit que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}$$

Formule qui n'a d'intérêt que si n n'est pas de la forme $4k$ ou $4k+2$ (sinon l'une des cotangentes est nulle). Lorsque n est de la forme $4k+1$ ou $4k+3$, on peut alors regrouper les cotangentes deux par deux (avec $\cotan(\pi-x) = -\cotan(x)$) et obtenir de bien jolies formules.

Exercice de khôlle 618

Soient a et b deux racines distinctes de $X^3 + 3X^2 + X + 1$. Calculer $A = a^2b + ab^2 + 3ab$.

Solution : On a $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ où c est la troisième racine de P . En développant

$$P(X) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$$

d'où par unicité des coefficients

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= a+b+c = -3 \\ \sigma_2 &= ab+bc+ca = 1 \\ \sigma_3 &= abc = -1 \text{ en particulier } c \neq 0\end{aligned}$$

On a $A = ab(a+b+3) = -\frac{1}{c}(-c) = 1$.

Remarque (Question que l'on peut poser en fin de khôlle) : Soit $P = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, à quelles conditions la valeur de $A = a^2b + ab^2 + 3ab$ ne dépend pas du choix de deux racines a et b de P ?

Si a, b et c sont les racines de P , on a $\sigma_1 = a+b+c = -\alpha$ et

$$A = ab(a+b+3) = ab(3-\alpha-c) = ab(3-\alpha) - abc = \gamma + ab(3-\alpha)$$

On souhaite que ce terme soit le même si on change le choix des racines. Comme il y a $\binom{3}{2} = 3$ manières de choisir deux racines parmi les 3, on souhaite avoir

$$\gamma + ab(3-\alpha) = \gamma + bc(3-\alpha) = \gamma + ca(3-\alpha)$$

Cas ① : $\alpha = 3$, dans ce cas $A = \gamma$ (c'est l'exemple de l'exercice).

Cas ② : $\alpha \neq 3$, la condition cherchée s'écrit donc

$$ab = bc = ca \text{ soit } \begin{cases} ab - bc = b(a-c) = 0 \\ ab - ca = a(b-c) = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$ab + bc + ca = 3ab = \beta \text{ d'où } A = \gamma + \frac{\beta}{3}(3-\alpha) = \beta + \gamma - \frac{\alpha}{3}$$

Premier sous cas : $b \neq 0$ donc $a = c$ que l'on reporte dans $a(b-c) = 0$ pour avoir $a(b-a) = 0$ d'où les cas

$$b \neq 0, a = c = 0 \text{ ou } b \neq 0, a = b = c$$

Second sous cas : $b = 0$, que l'on reporte dans $a(b - c) = 0$ qui donne

$$b = 0, a = 0 \text{ ou } b = 0, c = 0$$

Le cas ② se résume donc à : ou bien 0 est racine d'ordre 2 exactement (et $A = \gamma$) ou bien P a une racine d'ordre 3 (et $A = \beta + \gamma - \frac{\alpha}{3}$).

Exercice de khôlle 619

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$. Pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on note σ_k la somme des racines de $P^{(k)}$. Montrer que la suite $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ est arithmétique et préciser sa raison.

Solution : On pose $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$. Pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a

$$P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} a_n X^{n-k} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} a_{n-1} X^{n-1-k} + \dots$$

Rappel :

$$(X^p)^{(k)} = p(p-1) \cdots (p-k+1) X^{p-k} = \frac{p!}{(p-k)!} X^{p-k}$$

Les relations coefficients-racines donnent alors

$$\begin{aligned} \sigma_k &= -\frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} a_{n-1}}{\frac{n!}{(n-k)!} a_n} = \frac{(n-1)!}{n!} \times \frac{(n-k)!}{(n-1-k)!} \times \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n} \right) \\ &= \frac{n-k}{n} \times \sigma_0 = \sigma_0 - k \times \frac{\sigma_0}{n} \end{aligned}$$

La suite est bien arithmétique de raison $-\frac{\sigma_0}{n}$.

17.6 Fear factor (isation)

Exercice de khôlle 620

Factoriser en produits d'irréductibles sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On pourra commencer par montrer que j est racine double de P .

Solution : On suit l'indication, sachant que $1+j = -j^2$ on a

$$\begin{aligned} P(j) &= (-j^2)^7 - j^7 - 1 = -j^{14} - j^7 - 1 = -j^{12} \times j^2 - j^6 \times j - 1 = 0 \\ \text{car } j^3 &= 1 \text{ donc } j^{12} = (j^3)^4 = 1 \text{ et } j^6 = (j^3)^2 = 1 \text{ et } 1+j+j^2 = 0 \end{aligned}$$

et

$$P'(j) = 7(1+j)^6 - 7j^6 = 7 \times \left((-j^2)^6 - j^6 \right) = 7 \times (1-1) = 0$$

Ainsi j est racine double de P , puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait que $\bar{j} = j^2$ est également racine double de P . On a donc déjà 4 racines (elles comptent double chacune). Avec le binôme, on a

$$P = (X^7 + 7X^6 + 21X^5 + \dots + 7X + 1) - X^7 - 1 = 7X^6 + 21X^5 + \dots + 7X$$

ce qui permet d'affirmer que $\deg P = 6$ et 0 est racine de P (ce qui n'est pas dur à voir !). On a donc 5 racines, il en manque une !

Ou bien on ouvre ses mirettes pour voir que -1 est racine, ou bien on sait que la somme des racines vaut $-\frac{21}{7} = -3$. Si α est la racine manquante on a donc

$$\alpha + 0 + 2(j + j^2) = \alpha - 2 = -3 \text{ d'où } \alpha = -1$$

Conclusion (le coefficient dominant valant 7, ne pas l'oublier)

$$\begin{aligned} P &= 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2 \text{ sur } \mathbb{C} \\ &= 7X(X+1)(X^2+X+1)^2 \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 621

Factoriser $P = X^6 + \sqrt{2}X^3 + 1$ en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Solution : Soit $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = 0 \iff_{Z=z^3} Z^2 + \sqrt{2}Z + 1 = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = 2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$ ainsi $Z = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ ou $Z = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$. On a

$$\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\frac{\pi}{4}} \text{ et } \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi

$$z^3 = e^{3i\frac{\pi}{4}} \iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = 1 \iff z \in \{e^{i\frac{\pi}{4}}, je^{i\frac{\pi}{4}}, j^2e^{i\frac{\pi}{4}}\}$$

Or $je^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = e^{\frac{11i\pi}{12}}$ et $j^2e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = e^{\frac{-19i\pi}{12}}$, ainsi

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{\frac{11i\pi}{12}} \text{ et } e^{\frac{-19i\pi}{12}} \text{ sont racines de } P$$

Puisque P est à coefficients réels, les conjuguées de ces trois racines sont aussi racines de P . On obtient ainsi 6 racines deux à deux distinctes de P , on a toutes les racines. On en déduit que

$$P = (X - e^{i\frac{\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X - e^{\frac{11i\pi}{12}})(X - e^{\frac{-11i\pi}{12}})(X - e^{\frac{-19i\pi}{12}})(X - e^{\frac{-19i\pi}{12}})$$

Avec $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$ on a

$$P = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)X + 1\right)$$

On peut encore simplifier car $X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$!

Remarque : Pour le fun, on a

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6} = -\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$P = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X + 1\right)\left(X^2 + \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X + 1\right)$$

Exercice de khôlle 622Factoriser sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$

$$P = 2X^6 - X^2 - 1$$

On donne $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Solution : On cherche les racines. On a $P(z) = 0 \iff 2Z^3 - Z - 1 = 0$. Puisque $Z = 1$ est racine évidente, on factorise

$$2Z^3 - Z - 1 = (Z - 1)(2Z^2 + 2Z + 1)$$

Les racines de $2Z^2 + 2Z + 1$ sont ($\Delta = 4 - 8 = -4$), $Z_1 = \frac{-2 - 2i}{4} = -\frac{1}{2}(1 + i)$ et $Z_2 = -\frac{1}{2}(1 - i)$. On en déduit que

$$P(z) = 0 \iff \begin{cases} z^2 = 1 \\ \text{ou } z^2 = -\frac{1}{2}(1 + i) \\ \text{ou } z^2 = -\frac{1}{2}(1 - i) \end{cases}$$

On sait que $z^2 = 1 \iff z \in \{1, -1\}$. Puis $-\frac{1}{2}(1 - i) = \frac{1}{2}(-1 + i) = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ d'où

$$z^2 = -\frac{1}{2}(1 - i) \iff z = \pm \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

Puisque P est à coefficients réels, on sait que les conjuguées de $\pm \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{i\frac{3\pi}{8}}$ sont aussi racines de P . Conclusion

$$P = 2(X - 1)(X + 1)\left(X - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)\left(X - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right)\left(X + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)\left(X + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right) \text{ sur } \mathbb{C}$$

Puis

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)\left(X - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right) &= X^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)X + \left|\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{i\frac{3\pi}{8}}\right|^2 \\ &= X^2 - \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)X + \frac{1}{\sqrt{2}} = X^2 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}}X + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= X^2 - \sqrt{\sqrt{2}-1}X + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left(X + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)\left(X + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right) &= X^2 + \sqrt{\sqrt{2}-1}X + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Conclusion

$$P = 2(X - 1)(X + 1)\left(X^2 - \sqrt{\sqrt{2}-1}X + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(X^2 + \sqrt{\sqrt{2}-1}X + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Exercice de khôlle 623

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n tel que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(k) = \frac{k}{k+1}$. Déterminer $P(n+1)$.

Indication : Quelles sont les racines de $Q(X) = (X+1)P(X) - X$?

Solution : Ce problème (sans l'indication) est l'un des sujets d'Olympiades de mathématiques des USA en 1975. On suit l'indication, on pose $Q = (X + 1)P - X$ alors $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $Q(k) = 0$. On a donc $n + 1$ racines deux à deux distinctes de Q . Puisque $\deg P = n$, on a $\deg Q = n + 1$. On a donc toutes les racines de Q . On en déduit que

$$Q = aX(X - 1) \dots (X - n) = a \prod_{k=0}^n (X - k) \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ est le coefficient dominant}$$

Reste à déterminer a , mais

$$Q(-1) = 1 = a \prod_{k=0}^n (-1 - k) = a(-1)^{n+1} \prod_{k=0}^n (k + 1) = a(-1)^{n+1} (n + 1)!$$

$$\text{d'où } a = \frac{1}{(-1)^{n+1} (n + 1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

On en déduit que

$$Q(n + 1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n + 1)!} \prod_{k=0}^n (n + 1 - k) \underset{j=n+1-k}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{(n + 1)!} \prod_{j=1}^{n+1} j = (-1)^{n+1}$$

enfin

$$Q(n + 1) = (-1)^{n+1} = (n + 2)P(n + 1) - (n + 1)$$

donne

$$\text{Si } n \text{ est pair } P(n + 1) = \frac{n}{n + 2} \text{ et si } n \text{ est impair } P(n + 1) = 1$$

17.7 Racines multiples

Exercice de khôlle 624

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que le polynôme $X^4 - 2X^3 + \lambda X^2 + 2X - 1$ ait une racine d'ordre 3 au moins.

Solution : Analyse : Soit α cette racine alors

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$$

d'où le système

$$\begin{cases} \alpha^4 - 2\alpha^3 + \lambda\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \\ 4\alpha^3 - 6\alpha^2 + 2\lambda\alpha + 2 = 0 \\ 12\alpha^2 - 12\alpha + 2\lambda = 0 \end{cases}$$

Avec la ligne 3 on obtient $\lambda = 6\alpha - 6\alpha^2 = 6\alpha(\alpha - 1)$ que l'on reporte dans les deux autres lignes en isolant λ à droite pour avoir

$$\begin{cases} \alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha - 1 = 6\alpha^3(\alpha - 1) \\ 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 6\alpha^2(\alpha - 1) \\ 6\alpha(\alpha - 1) = -\lambda \end{cases}$$

Oh miracle, 1 est racine évidente de $2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1$, et de $\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha - 1$. On factorise alors

$$\begin{aligned} \alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha - 1 &= (\alpha^4 - 1) - 2\alpha(\alpha^2 - 1) = (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1 - 2\alpha) = (\alpha - 1)^3(\alpha + 1) \\ 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 &= (\alpha - 1)(2\alpha^2 - \alpha - 1) = (\alpha - 1)(\alpha - 1)(2\alpha + 1) = (2\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 \end{aligned}$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} (\alpha + 1)(\alpha - 1)^3 = 6\alpha^3(\alpha - 1) \\ (2\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 = 6\alpha^2(\alpha - 1) \\ 6\alpha(\alpha - 1) = -\lambda \end{cases}$$

On constate que $\alpha = 1, \lambda = 0$ est une solution du système. Le polynôme $X^4 - 2X^3 + \lambda X^2 + 2X - 1$ est alors égal à $X^4 - 2X^3 + 2X - 1 = (X + 1)(X - 1)^3$ (On l'a déjà factorisé! bande de poissons rouges!).

Est-ce la seule solution? (L'énoncé n'est pas très clair et ne demande pas explicitement d'examiner tous les cas, mais un vrai matheux ...).

Si $\alpha \neq 1$, on peut simplifier pour avoir

$$\begin{cases} (\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 = 6\alpha^3 \\ (2\alpha + 1)(\alpha - 1) = 6\alpha^2 \\ 6\alpha(\alpha - 1) = -\lambda \end{cases}$$

La seconde équation du dernier système s'écrit alors $6\alpha^2 - (2\alpha + 1)(\alpha - 1) = 4\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ et se résout facilement.

Ses racines sont $\alpha = -\frac{1}{8} \pm \frac{1}{8}i\sqrt{15}$ ce qui donne $\lambda = 6\alpha(\alpha - 1)$ non réel!

Remarque : Si on s'autorise à avoir $\lambda \in \mathbb{C}$, cela ne marche pas mieux. En effet si $4\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ alors

$$\begin{aligned} 6\alpha^3 - (\alpha + 1)(\alpha - 1)^2 &= 5\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1 = \left(\frac{5\alpha}{4} - \frac{1}{16}\right)(4\alpha^2 + \alpha + 1) - \frac{3\alpha}{16} - \frac{15}{16} \\ &= -\frac{3\alpha}{16} - \frac{15}{16} \neq 0 \text{ (car } \alpha \neq -5) \end{aligned}$$

(on a juste fait la division euclidienne de $5X^3 + X^2 + X - 1$ par $4X^2 + X + 1$).

Exercice de khôlle 625

Calcul de $\sum_{k=1}^n kx^k$.

- Déterminer deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $A_n = a_n X^{n+1} + b_n X^n + 1$ soit divisible par $B = (X - 1)^2$.
On définit ainsi deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer le quotient de la division euclidienne de A_n par B pour $n \geq 1$.
- En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n kx^k$ si $x \neq 1$ est un complexe.

Solution :

- Le polynôme B divise A si et seulement si $A(1) = A'(1) = 0$. On a donc le système

$$\begin{cases} a_n + b_n = -1 & \text{La première ligne traduit } A(1) = 0 \\ (n+1)a_n + nb_n = 0 & \text{La seconde traduit } A'(1) = 0 \end{cases}$$

qui donne immédiatement (faire $L_2 - nL_1$) $a_n = n$ et $b_n = -(n+1)$.

On en déduit que

$$A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \text{ est divisible par } B$$

- Si on pose la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{\underbrace{(nX^{n+1} - 2nX^n + nX^{n-1})}_{A_{n-1}}} & \begin{array}{l} X^2 - 2X + 1 \\ nX^{n-1} \end{array} \end{array}$$

On a donc $A_n = nX^{n-1}B + A_{n-1}$. Si on note Q_n le quotient de la division euclidienne de A_n par B , on a, pour $n \geq 2$

$$Q_n = nX^{n-1} + Q_{n-1}$$

et

$$Q_1 = 1 \text{ car } A_1 = B$$

Une récurrence immédiate donne

$$Q_n = 1 + 2X + 3X^2 + \dots + nX^{n-1}$$

Autre approche :

$$\begin{aligned} nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 &= nX^n(X-1) - (X^n - 1) \\ &= (X-1)(nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - 1) \\ \text{car } (X^n - 1) &= (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1) \end{aligned}$$

Il faut prouver que $nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - 1$ est divisible par $(X-1)$.

On regarde quelques exemples (avec $n = 2, 3$)

$$\begin{aligned} 2X^2 - X - 1 &= 2X^2 - 2X^2 + X - 1 = (X-1)(2X+1) \\ 3X^3 - X^2 - X - 1 &= 3X^3 - 3X^2 + 2X^2 - 2X + X - 1 = (X-1)(3X^2 + 2X + 1) \end{aligned}$$

ce qui donne l'idée que

$$\begin{aligned} nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - 1 &= nX^n - nX^{n-1} + (n-1)X^{n-1} + \dots + 1 \\ nX^n - \sum_{k=1}^n X^{k-1} &= \sum_{k=1}^n k(X^k - X^{k-1}) = \sum_{k=1}^n kX^{k-1}(X-1) = (X-1) \sum_{k=1}^n kX^{k-1} \end{aligned}$$

Il faut donc prouver que

$$nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \sum_{k=1}^n k(X^k - X^{k-1})$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(X^k - X^{k-1}) &= \sum_{k=1}^n kX^k - \sum_{k=1}^n kX^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n kX^k - \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)X^j \text{ avec } j = k-1 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n kX^k - \sum_{k=0}^{n-1} kX^k \right) - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \\ &= (nX^n - 0 \times X^0) - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \end{aligned}$$

3. On a donc pour $x \neq 1$ dans $\mathbb{C}$, $Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{(x-1)^2}$, or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kx^k &= x(1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}) \\ &= xQ_n(x) \\ &= \frac{x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 626

- Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 7 tel que $(X+1)^4$ divise $P-1$ et $(X-1)^4$ divise $P+1$.
- En déduire qu'il existe $(U, V) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $U(X)(X+1)^4 + V(X)(X-1)^4 = 1$.

Solution :

1. Soit $P_1 = P - 1$ alors -1 est racine d'ordre 3 de P_1 d'où

$$P_1(-1) = P'_1(-1) = P''_1(-1) = P_1^{(3)}(-1) = 0$$

Mais $P'_1 = P'$ ainsi

$$P'(-1) = (P')'(-1) = (P')''(-1) = 0$$

ce qui prouve que -1 est racine d'ordre 3 de P' . De la même manière 1 est racine d'ordre 3 de P' . Puisque P' est de degré 6, on a toutes les racines de P' . Si le coefficient dominant de P vaut a , celui de P' vaut $7a$ et ainsi

$$P' = 7a(X-1)^3(X+1)^3 = 7a(X^2-1)^3 = 7a(X^6-3X^4+3X^2-1)$$

On en déduit que

$$P(X) = 7a\left(\frac{X^7}{7} - 3\frac{X^5}{5} + 3\frac{X^3}{3} - X\right) + b \text{ (où } b = P(0) \text{ mais RAF)}.$$

Enfin, $P_1(-1) = P(1) - 1 = 0$ d'où $P(1) = 1$ et de même $P(-1) + 1 = 0$ d'où $P(-1) = -1$ donne : $-\frac{16}{5}$

$$\begin{aligned} P(1) &= 7a\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{5} + 1 - 1\right) + b = b - \frac{16}{5}a = 1 \\ P(-1) &= -7a\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{5} + 1 - 1\right) + b = b + \frac{16}{5}a = -1 \end{aligned}$$

d'où $a = -\frac{5}{16}$, $b = 0$ et ainsi

$$P = -\frac{35}{16}\left(\frac{X^7}{7} - 3\frac{X^5}{5} + 3\frac{X^3}{3} - X\right)$$

Remarque : On peut se demander si une synthèse (vérification calculatoire) est utile. En fait, non il suffit de remonter par équivalence.

2. Il existe donc deux polynômes A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X) - 1 = (X+1)^4 \times A(X) \text{ et } P(X) + 1 = (X+1)^4 \times B(X)$$

Mais alors

$$1 = \frac{1}{2}((P(X) + 1) - (P(X) - 1)) = \frac{1}{2}((X+1)^4 \times B(X) - (X+1)^4 \times A(X))$$

En posant $U(X) = \frac{B(X)}{2}$ et $V(X) = -\frac{A(X)}{2}$ c'est fini.

Remarque : Un calcul simple (pour une machine) donne

$$\begin{aligned} P(X) - 1 &= \left(-\frac{5}{16}X^3 - \frac{5}{4}X^2 - \frac{29}{16}X - 1\right)(X-1)^4 \\ P(X) + 1 &= \left(-\frac{5}{16}X^3 + \frac{5}{4}X^2 - \frac{29}{16}X + 1\right)(X+1)^4 \end{aligned}$$

d'où $U(X) = -\frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 - \frac{29}{32}X + \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{5}{32}X^3 + \frac{5}{8}X^2 + \frac{29}{32}X + \frac{1}{2}$.

Exercice de khôlle 627

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on définit

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + \lambda)P$$

1. Montrer que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P \neq 0$ et $\varphi(P) = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ une racine de P .
 - (a) Montrer que α n'est pas racine simple pour P .
 - (b) Justifier qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ (on précisera ce que représente m). Calculer alors $\varphi(P)$ et conclure à une absurdité.
 - (c) En déduire les valeurs possibles pour λ et l'expression de P .

Solution :

1. On pose $P = a_n X^n + Q$ où $\deg Q < n$ ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= (X^2 - 1)(na_n X^{n-1} + Q') - (nX + \lambda)(a_n X^n + Q) \\ &= (X^2 - 1)Q' - na_n X^{n-1} - nXQ - \lambda(a_n X^n + Q)\end{aligned}$$

Puisque chaque terme de la somme a un degré au plus égal à n , il en est de même de $\varphi(P)$.

2.

- (a) Si α est racine de P et si $\varphi(P) = 0$ alors $(\alpha^2 - 1)P'(\alpha) - (n\alpha + \lambda)P(\alpha) = 0$. Puisque $P(\alpha) = 0$ et $\alpha^2 \neq 1$, on en déduit que α est racine au moins d'ordre 2 de P .
- (b) Si on prend pour m l'ordre de multiplicité de α et Q le quotient de la division de P par $(X - \alpha)^m$ on sait que

$$P = (X - \alpha)^m Q \text{ et } Q'(\alpha) \neq 0$$

On a alors

$$\varphi(P) = (X^2 - 1) \times \left(m(X - \alpha)^{m-1} Q(X) + (X - \alpha)^m Q'(X) \right) - (nX + \lambda)(X - \alpha)^m Q(X) = 0$$

Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$ on en déduit que (on «simplifie» par $(X - \alpha)^{m-1}$)

$$(X^2 - 1) \times (mQ(X) + (X - \alpha)Q'(X)) - (nX + \lambda)(X - \alpha)Q(X) = 0$$

Mais alors avec $X = \alpha$, on obtient $Q(\alpha) = 0$ absurde!

- (c) Analyse : Donc les racines de P ne peuvent être égales que à 1 et -1 . On peut écrire (avec a le coefficient dominant)

$$P = a(X - 1)^p (X + 1)^q \text{ où } (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } a \in \mathbb{R}^*$$

Attention $p = 0$ signifie que 1 n'est pas racine de P ! Mais alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a(X^2 - 1) \left(p(X - 1)^{p-1} (X + 1)^q + q(X - 1)^p (X + 1)^{q-1} \right) - a(nX + \lambda)(X - 1)^p (X + 1)^q \\ &= ap(X - 1)^p (X + 1)^{q+1} + aq(X - 1)^{p+1} (X + 1)^q - a(nX + \lambda)(X - 1)^p (X + 1)^q = 0\end{aligned}$$

Toujours par intégrité (et car $a \neq 0$), il vient

$$p(X + 1) + q(X - 1) - (nX + \lambda) = (p + q - n)X + (p - q - \lambda) = 0$$

Ainsi $p + q = n$ et $\lambda = p - q = n - 2q$. A priori, q prend toutes les valeurs de $\llbracket 0; n \rrbracket$.

Synthèse : Si $q \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $p = n - q$ et $\lambda = n - 2q$, le calcul précédent montre que

$$\varphi(a(X - 1)^{n-q} (X + 1)^q) = 0$$

Donc les valeurs possibles pour λ sont de la forme $n - 2q$ où $q \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et

$$P = a(X - 1)^{n-q} (X + 1)^q \text{ où } a \in \mathbb{R}^*$$

Remarque : En fait ce qui peut aussi être absurde c'est que P ait une racine. Mais d'après D'Alembert-Gauß, cela signifie que P est constant. Puisque $\varphi(P) = 0$ et que $nX + \lambda$ n'est pas le polynôme nul, cela implique $P = 0$, exclus (bien que $P = 0$ soit une solution de $\varphi(P) = 0$!)

Exercice de khôlle 628

Soit $P = X^4 - 2X^3 - 11X^2 + 12X + 36$. Sachant que P admet deux racines multiples réelles, factoriser P à l'aide des relations entre coefficients et racines.

Solution : On note $\alpha, \alpha, \beta, \beta$ les racines de P alors

$$S = 2\alpha + 2\beta = 2 \text{ et } \alpha^2\beta^2 = 36$$

Ou bien $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = 6$ d'où (α, β) sont racines de $X^2 - X + 6 = 0$, mais les racines ne sont alors pas réelles.
Ou bien $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -6$ ce qui donne $\alpha = -2$ et $\beta = 3$. Ainsi

$$P = (X + 2)^2 (X - 3)^2$$

18.1 Sous-espace vectoriel

Exercice de khôlle 629

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in E, x - 2y + 3z = 0\}$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une famille génératrice.

Solution : On écrit que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F &\iff x = 2y - 3z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } (y, z) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E dont une famille génératrice est $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice de khôlle 630

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in E, x - 2y + 3z = x - y + z = 0\}$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une famille génératrice.

Solution : On écrit que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F &\iff \begin{cases} \boxed{x} - 2y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \boxed{x} - 2y + 3z = 0 \\ \boxed{y} - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } z \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E dont une famille génératrice est $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice de khôlle 631

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \left\{ P \in E, (1+X)P(X) + X^2 \times \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\}$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Solution : On a $F \subset E$ par définition, puis $F \neq \emptyset$ car si $P = 0$ (le polynôme nul) alors $\int_0^1 P(t) dt = 0$ (le nombre 0) et ainsi $(1+X)P(X) + X^2 \times \int_0^1 P(t) dt = 0$ (le polynôme nul). Puis si $(P, Q) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $R = \lambda P + Q \in F$? Or

$$R \in F \iff (1+X)R(X) + X^2 \times \int_0^1 R(t) dt = 0$$

Mais

$$\begin{aligned} (1+X)R(X) + X^2 \times \int_0^1 R(t) dt &= (1+X)(\lambda P(X) + Q(X)) + X^2 \times \int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t)) dt \\ &= \lambda(1+X)P(X) + (1+X)Q(X) + X^2 \times \left(\lambda \int_0^1 P(t) dt + \int_0^1 Q(t) dt \right) \\ &= \lambda \left((1+X)P(X) + X^2 \times \int_0^1 P(t) dt \right) + \left((1+X)Q(X) + X^2 \times \int_0^1 Q(t) dt \right) \end{aligned}$$

Puisque $P \in F$, on a $(1+X)P(X) + X^2 \times \int_0^1 P(t) dt = 0$ et de même $Q \in F$ donc $(1+X)Q(X) + X^2 \times \int_0^1 Q(t) dt = 0$.

Conclusion $(1+X)R(X) + X^2 \times \int_0^1 R(t) dt = 0$ et ainsi $R \in F$. Conclusion F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice de khôlle 632

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E, f(1-x) = f(x) + f(1)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Solution : On a $F \subset E$ par définition, puis $F \neq \emptyset$ car si $f = 0$ (la fonction identiquement nulle) alors $f(1-x) = f(x) = f(1) = 0$ donc $f(1-x) = f(x) + f(1)$. Puis si $(f, g) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $h = \lambda f + g \in F$? Or

$$h \in F \iff h(1-x) = h(x) + h(1)$$

Mais

$$\begin{aligned} h(1-x) &= \lambda f(1-x) + g(1-x) = \lambda(f(x) + f(1)) + g(x) + g(1) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont dans } F \\ &= (\lambda f(x) + g(x)) + (\lambda f(1) + g(1)) = h(x) + h(1) \end{aligned}$$

d'où $h \in F$. Conclusion F est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice de khôlle 633

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X], 2X^2P''(X) - P'(X) + P(X) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Solution : On a $F \in \mathbb{R}[X]$ par définition, si $P = 0$ alors $2X^2P''(X) - P'(X) + P(X) = 0$, ainsi $F \neq \emptyset$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in F$, a-t-on $R = \lambda P + Q \in F$? Mais

$$\begin{aligned} 2X^2R''(X) - R'(X) + R(X) &= 2X^2(\lambda P + Q)'' - (\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q) \\ &= 2X^2(\lambda P'' + Q'') - (\lambda P' + Q') + (\lambda P + Q) \\ &= \lambda(2X^2P''(X) - P'(X) + P(X)) + \mu(2X^2Q''(X) - Q'(X) + Q(X)) \end{aligned}$$

Or $P \in F$ d'où $2X^2P''(X) - P'(X) + P(X) = 0$ et de même $Q \in F$ d'où $2X^2Q''(X) - Q'(X) + Q(X) = 0$. On a donc

$$2X^2R''(X) - R'(X) + R(X) = 0$$

Ce qui montre que $R \in F$ et permet de conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice de khôlle 634

Montrer que $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(X) + P(1-X) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Solution : On a $F \in \mathbb{R}[X]$ par définition, si $P = 0$ alors $P(X) + P(1-X) = 0$, ainsi $F \neq \emptyset$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in F$, a-t-on $R = \lambda P + Q \in F$? Mais

$$\begin{aligned} R(X) + R(1-X) &= (\lambda P(X) + Q(X)) + \lambda P(1-X) + Q(1-X) \\ &= \lambda(P(X) + P(1-X)) + (Q(X) + Q(1-X)) \end{aligned}$$

Or $P \in F$ d'où $P(X) + P(1-X) = 0$ et de même $Q \in F$ d'où $Q(X) + Q(1-X) = 0$. On a donc

$$R(X) + R(1-X) = 0$$

Ce qui montre que $R \in F$ et permet de conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice de khôlle 635

Soit $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists C \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq C |\sin(x) - \sin(y)|\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de :

① $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, puis de ② $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et enfin ③ de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Solution : **Remarque :** On sait que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont des SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (un bon exercice, le justifier).

① On a $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, si $f = 0$ alors avec $C = 1$ (par exemple)

$$|f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 \leq C |\sin(x) - \sin(y)|$$

La fonction nulle est donc dans F . Puis si $(f, g) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $h = \lambda f + g \in F$?

Par l'IT, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |\lambda(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \leq |\lambda(f(x) - f(y))| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq |\lambda| |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \end{aligned}$$

Or puisque $f \in F$ et $g \in F$, il existe C_f et C_g réels positifs tels que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x) - f(y)| \leq C_f |\sin(x) - \sin(y)| \text{ et } |g(x) - g(y)| \leq C_g |\sin(x) - \sin(y)|$$

mais alors

$$|h(x) - h(y)| \leq (|\lambda| C_f + C_g) |\sin(x) - \sin(y)| = C |\sin(x) - \sin(y)|$$

où $C = |\lambda| C_f + C_g \in \mathbb{R}_+$. Ceci prouve que $h \in F$ et ainsi que F est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Pour la suite, tout semble identique, mais ...

② On a $F \subset C^0(\mathbb{R})$, ah pas évident ! Il faut donc montrer que si $f \in F$ alors f est continue. Mais on sait que $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée est $\cos$ et $|\cos| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$). Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

et ainsi, si $f \in F$, on a $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, d'où f est C -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ donc continue (cours...). Pour la suite, on procède de la même manière.

③ Même problème, a-t-on $F \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$? Si f est dans F alors $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq C|\sin x - \sin 0| + |f(0)| = C|\sin x| + |f(0)| \leq C + |f(0)|$$

car f est dans F et $\sin$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Conclusion f est bornée par $C + |f(0)|$ donc est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La suite est identique.

Exercice de khôlle 636

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

et $F = \{M(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice.

Solution : On a

$$M \in F \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = M(a, b) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$F = \text{Vect}(A, I_3) \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un sous-espace vectoriel dont une famille génératrice est (A, I_3) .

Exercice de khôlle 637

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $A \in E$ fixé on définit $F = \{M \in E, MA - AM = \mathcal{O}_n\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . Puis montrer que $G = \text{Vect}(A, I_3)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Solution : On a $F \subset E$ par définition. Si $M = \mathcal{O}_n$ alors $MA - AM = \mathcal{O}_n \times A + A \times \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_n$, ainsi $\mathcal{O}_n \in F$ et $F \neq \emptyset$. Soient $(M, N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P = \lambda M + N$, a-t-on $P \in F$?

Par hypothèse $MA - AM = \mathcal{O}_n$ et $NA - AN = \mathcal{O}_n$ d'où

$$\begin{aligned} PA - AP &= (\lambda M + N)A - A(\lambda M + N) \\ &= \lambda MA + NA - \lambda AM - AN \\ &= \lambda(MA - AM) + (NA - AN) = \mathcal{O}_n \end{aligned}$$

Ainsi $P \in F$. Ceci prouve la stabilité de F par combinaisons linéaires. Conclusion F est un sous-espace vectoriel de E . Enfin $A \in F$ et I_3 donc $\text{Vect}(A, I_3)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Exercice de khôlle 638

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $F = \{M \in E, \det M = 0\}$ et $G = \{M \in E, M + 2M^T = 0\}$. Les ensembles F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

Solution : On a $F \subset E$ et $G \subset E$, la matrice nulle est dans F et dans G , ni F , ni G ne sont vides. Mais F n'est pas un sous-espace vectoriel, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans F mais leur somme (égale à I_2) ne l'est pas. Pour G : soit $(M, N) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P = \lambda M + N$. A-t-on $P \in G$? Par hypothèse, $M + 2M^T = 0$ et $N + 2N^T = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P + 2P^T &= (\lambda M + N) + 2(\lambda M + N)^T = \lambda M + N + 2\lambda M^T + 2N^T \text{ (linéarité de la transposition)} \\ &= \lambda(M + 2M^T) + (N + 2N^T) = 0 \text{ d'où } P \in G \end{aligned}$$

Remarque : Si on pose $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors $M + 2M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3a & 2b+c \\ b+2c & 3d \end{pmatrix}$. Ainsi

$$M \in G \iff \begin{pmatrix} 3a & 2b+c \\ b+2c & 3d \end{pmatrix} = 0 \iff a = b = c = d = 0$$

bref, G est réduit au vecteur nul !

Exercice de khôlle 639

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite semi-magique de somme σ si la somme des coefficients sur chaque ligne ou chaque colonne est égale à σ . Par exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \\ 6 & 11 & 4 \end{pmatrix} \text{ est semi-magique de somme } 21$$

On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matrice colonne de 1.

1. Soit F l'ensemble des matrices semi-magiques, justifier que

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \exists \sigma \in \mathbb{R}, MU = \sigma U \text{ et } U^T M = \sigma U^T\}$$

2. Montrer que si M et N sont semi-magiques alors MN également.
3. Justifier que l'ensemble F des matrices semi-magiques est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'ensemble G des matrices semi-magiques, de somme nulle, et symétriques est un sous-espace vectoriel de F et en donner une famille génératrice.

Solution :

$$\begin{aligned} 1. \text{ Simple calcul, car si } M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+d+g \\ b+h+e \\ c+f+i \end{pmatrix} \text{ et} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b+c & d+f+e & g+h+i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si M est semi-magique de somme σ alors $MU = \sigma U$ et $U^T M = \sigma U^T$. Réciproquement, s'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $MU = \sigma U$ et $U^T M = \sigma U^T$ alors M est bien semi-magique de somme σ .

Remarque : La condition $U^T M = \sigma U^T$ est équivalente, en transposant, à $M^T U = \sigma U$.

2. On sait que M est semi-magique s'il existe $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ tel que $MU = \sigma_1 U$ et $U^T M = \sigma_1 U^T$. De même pour N , il existe $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ tel que $NU = \sigma_2 U$ et $U^T N = \sigma_2 U^T$. Mais alors

$$\begin{aligned} MNU &= M(NU) = M(\sigma_2 U) = \sigma_2 MU = \sigma_1 \sigma_2 U \\ U^T MN &= (U^T M)N = (\sigma_1 U^T)N = \sigma_1 U^T N = \sigma_1 \sigma_2 U^T \end{aligned}$$

Ainsi MN est semi-magique de somme $\sigma_1 \sigma_2$. Surprenant non ?

3. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice nulle est clairement semi-magique. Puis si $(M, N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $P = \lambda M + N \in F$? Par hypothèse, il existe σ et ρ réels tels que

$$MU = \sigma U, U^T M = \sigma U^T, NU = \rho U \text{ et } U^T N = \rho U^T$$

On a alors

$$\begin{aligned} PU &= (\lambda M + N)U = \lambda MU + NU = \lambda \sigma U + \rho U = (\lambda \sigma + \rho)U \\ U^T P &= U^T (\lambda M + N) = \lambda U^T M + U^T N = \lambda \sigma U^T + \rho U^T = (\lambda \sigma + \rho)U^T \end{aligned}$$

ce qui prouve que $P \in F$. Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ une matrice symétrique, alors M est semi-magique de somme nulle si et seulement si

$$\begin{cases} \boxed{a} + b + c = 0 \\ \boxed{b} + d + e = 0 \\ \boxed{c} + e + f = 0 \end{cases}$$

c'est un système déjà échelonné que l'on résout pour avoir $a = d + f + 2e, b = -d - e, c = -f - e$ d'où

$$M \in G \iff M = \begin{pmatrix} d + f + 2e & -d - e & -f - e \\ -d - e & d & e \\ -f - e & e & f \end{pmatrix} \text{ où } (d, e, f) \in \mathbb{R}^3 \text{ sont quelconques}$$

Ainsi

$$G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice de khôlle 640

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $F = \left\{ u \in E, \left(|u_n|^{\frac{1}{n}} \right)_n \text{ est bornée} \right\}$. Montrer que F est un SEV de E .

Solution : On a $F \subset E$ par définition. Si u est la suite nulle alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ donc $\left(|u_n|^{\frac{1}{n}} \right)_n$ est bornée. Soient u et v deux suites de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $w = \lambda u + v$, a-t-on $w \in F$. Par définition de w , on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda u_n + v_n$. Par IT,

$$|w_n| \leq |\lambda u_n| + |v_n| = |\lambda| |u_n| + |v_n|$$

Par croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $[0, +\infty[$, on en déduit que

$$|w_n|^{\frac{1}{n}} \leq (|\lambda| |u_n| + |v_n|)^{\frac{1}{n}}$$

On a, à ce stade, besoin d'une inégalité du type

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[, (x + y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$$

qu'il s'agit de démontrer. Par stricte croissance de $x \mapsto x^n$,

$$(x+y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}} \iff x+y \leq \left(x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

Par le binôme,

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}\right)^n &= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^0 \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^k \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-k} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-n} \\ &= x+y + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^k \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-k} \geq x+y \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité qui va nous sauver. On a donc

$$|w_n|^{\frac{1}{n}} \leq (|\lambda| |u_n| + |v_n|)^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|^{\frac{1}{n}} |u_n|^{\frac{1}{n}} + |v_n|^{\frac{1}{n}}$$

Puisque $\left(|u_n|^{\frac{1}{n}}\right)_n$ et $\left(|v_n|^{\frac{1}{n}}\right)_n$ sont bornées, il en est de même de $\left(|w_n|^{\frac{1}{n}}\right)_n$.

Remarque : Si on veut le rédiger, il existe M_u et M_v deux réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n|^{\frac{1}{n}} \leq M_u$ et $|v_n|^{\frac{1}{n}} \leq M_v$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|^{\frac{1}{n}} M_u + M_v$.

18.2 Supplémentaires et projections

Exercice de khôlle 641

Soit $E = \mathbb{R}^3$, on définit $F = \{(x, y, z) \in E, x - 2y + 3z = x - y + z = 0\}$ et pour $a \in \mathbb{R}$,

$G_a = \{(x, y, z) \in E, x + ay - z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des SEV de E et en donner une base.
2. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la somme $F + G_a$ est-elle directe ?
3. Montrer que si la somme $F + G_a$ est directe alors $F \oplus G_a = \mathbb{R}^3$.

4. Pour $a = 1$, si p est la projection sur G_1 de direction F , déterminer la matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

alors

$$p(X) = P \times X$$

Que vaut P^2 ?

Solution :

1. Pour F c'est simple et on obtient $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, ainsi $\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F (elle est génératrice et libre car on a un vecteur non nul).

Pour G_a , on obtient facilement (en écrivant que $x = -ay + z$)

$$G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\mathcal{B}_G = \left(\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de G car génératrice et libre (si $\lambda \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - a\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\lambda = \mu = 0$).

2. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$ alors

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$$

C'est un système 3×3 , **homogène**, de déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 + C_2 \\ C_3 + C_2}}{=} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ a+1 & a & a-1 \end{vmatrix} = 2a$.

Ainsi pour $a \neq 0$, il y a une unique solution qui est $x = y = z = 0$ et ainsi $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Si $a = 0$, il y a une infinité de solution (car il y en a au moins une!), et la somme n'est pas directe. Dans ce cas, on $F \subset G$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, le générateur de F est dans G !

3. Méthode ① : Avec les bases, on sait que $E = F \oplus G_a \iff \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E . Mais $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a \neq 0$$

Méthode ② : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on cherche à montrer que $\vec{u}$ se décompose de manière unique en une somme d'un élément de F et d'un élément de G_a . Cela revient à montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ uniques tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit à un système de déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ si $a \neq 0$.

4. Avec la méthode ②, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $p(\vec{u}) = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On calcule donc α avec les formules de Cramer pour avoir

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}(x + y - z)$$

et ainsi

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x + y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - y + z \\ -2x + 2z \\ -x - y + 3z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d'où $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On a $P^2 = P$ (ouf car $p \circ p = p$).

Remarque : On peut vérifier que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car si } \vec{u} \in F \text{ on a } p(\vec{u}) = \vec{0} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\text{car si } \vec{u} \in G \text{ on a } p(\vec{u}) = \vec{u} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 642

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(-1) = 0\}$, $G = \text{Vect}(1 + X + X^2)$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F , G et H sont des sous-espaces vectoriels de E , en donner une base.
2. Montrer que $E = F \oplus G$. Si p est la projection sur F de direction G , préciser $p(A)$ où $A \in \mathbb{R}_2[X]$.
3. La somme $F + H$ est-elle directe ?
4. A-t-on $F + H = E$?

Solution :

1. Méthode ① :

$$\begin{aligned} P &= aX^2 + bX + c \in F \iff a - b + c = 0 \iff b = a + c \iff P = a(X^2 + X) + c(X + 1) \text{ où } (a, c) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff P \in \text{Vect}(X^2 + X, X + 1) \text{ d'où } F = \text{Vect}(X^2 + X, X + 1) \end{aligned}$$

Méthode ② :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff -1 \text{ racine de } P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X + 1)Q \text{ (car } \deg P \leq 2) \\ \text{en écrivant } Q &= aX + b, \text{ on a } P \in F \iff P = aX(X + 1) + b(X + 1) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

d'où $F = \text{Vect}(X(X + 1), X + 1)$.

De la même manière

$$\begin{aligned} P &= aX^2 + bX + c \in H \iff 2a + b = 0 \iff b = -2a \iff P = a(X^2 - 2X) + c \text{ où } (a, c) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff P \in \text{Vect}(X^2 - 2X, 1) \text{ d'où } H = \text{Vect}(X^2 - 2X, 1) \end{aligned}$$

Puisque F, G et H sont sous forme de «Vect», ce sont des SEV de E .

Pour les bases, $(X^2 + X, X + 1)$ est génératrice de F , libre car échelonnée donc est une base de F . Par les mêmes arguments, $(1 + X + X^2)$ est une base de G et $(X^2 - 2X, 1)$ est une base de H .

2. Soit $A = aX^2 + bX + c$, on va montrer que A se décompose de manière unique en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Cela revient à montrer qu'il existe $P \in F$ et $Q \in G$ tels que $A = P + Q$. Or $P \in F$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P = \alpha(X^2 + X) + \beta(X + 1)$ et $Q \in G$ si et seulement s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \gamma(1 + X + X^2)$. Ainsi

$$\begin{aligned} A &= P + Q \iff aX^2 + bX + c = \alpha(X^2 + X) + \beta(X + 1) + \gamma(1 + X + X^2) \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + \beta + \gamma = b \\ \beta + \gamma = c \end{cases} \end{aligned}$$

Le système obtenu est de Cramer car $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_2-L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \oplus 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, ainsi A se décompose toujours de manière unique en une somme d'un élément de F et d'un élément de G . Par caractérisation des espaces supplémentaires, cela prouve que $E = F \oplus G$.

De plus la projection $q(A)$ de A sur G de direction F est le vecteur $\gamma(1 + X + X^2)$. On calcule γ soit par les formules de Cramer pour avoir

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}}{1} = a - b + c$$

et ainsi $q(aX^2 + bX + c) = (a - b + c) \times (X^2 + X + 1)$ d'où

$$\begin{aligned} p(aX^2 + bX + c) &= (aX^2 + bX + c) - (a - b + c) \times (X^2 + X + 1) \\ &= (b - c)X^2 + (2b - a - c)X + b - a \end{aligned}$$

Remarque ① : Le terme $a - b + c$ vaut $A(1)$ donc $q(A) = A(1) \times (X^2 + X + 1)$ et $p(A) = A - A(1) \times (X^2 + X + 1)$.

Remarque ② : Le cours sur les bases permet de dire que

$$E = F \oplus G \iff ((X^2 + X), (X + 1), (1 + X + X^2)) \text{ base de } E$$

On verra que cela revient à montrer qu'un déterminant (celui du système) est non nul et permet de conclure de manière rapide. Mais, on demande la projection, donc autant tout détailler !

3. On a toujours $\{0\} \subset F \cap H$, réciproquement si $P \in F \cap H$ alors :

Méthode ① : On écrit $P = aX^2 + bX + c$ ainsi

$$P \in F \cap H \iff \begin{cases} P(1) = a + b + c = 0 \\ P'(1) = 2a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a - b = a \\ b = -2a \end{cases} \iff P = a(X^2 - 2X + 1)$$

$$\text{d'où } F \cap H = \text{Vect}((X - 1)^2)$$

Méthode ② : $P \in F \cap H \iff 1$ est racine double de $P \iff P = a(X - 1)^2$ (car $\deg P \leq 2$), et on retrouve le même résultat. La somme n'est donc pas directe.

4. Soit $A = aX^2 + bX + c$, on cherche si A se décompose de manière (pas unique, car la somme n'est pas directe) en la somme d'un élément de F et d'un élément de H . Cela revient à montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$A = \alpha(X^2 + X) + \beta(X + 1) + \gamma(X^2 - 2X) + \delta$$

Donc à prouver que le système $\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + \beta - 2\gamma = b \\ \beta + \delta = c \end{cases}$ a au moins une solution (et donc en a une infinité, car par unicité!).

Méthode ① : Par le pivot

$$\begin{cases} \boxed{\alpha} + \gamma = a \\ \alpha + \beta - 2\gamma = b \\ \beta + \delta = c \end{cases} \stackrel{L_2-L_1}{\iff} \begin{cases} \boxed{\alpha} + \gamma = a \\ \boxed{\beta} - 3\gamma = b - a \\ \beta + \delta = c \end{cases} \stackrel{L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} \boxed{\alpha} + \gamma = a \\ \boxed{\beta} - 3\gamma = b - a \\ 3\gamma + \boxed{\delta} = a - b + c \end{cases} \stackrel{L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} \alpha = a - \gamma \\ \beta = b - a + 3\gamma \\ \delta = a - b + c - 3\gamma \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions !

Méthode ② : On cherche, par exemple une solution telle que $\delta = 0$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + \beta - 2\gamma = b \\ \beta = c \end{cases}$$

qui est de Cramer car $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$ (s'il n'est pas de Cramer, on tente avec $\gamma = 0$ ou $\beta = 0 \dots$). On a donc au moins une solution (pour laquelle $\delta = 0$).

Exercice de khôlle 643

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S} = \{M \in E, M^T = M\}$ et $\mathcal{A} = \{M \in E, M^T = -M\}$.

1. Montrer que $E = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$ (ne pas oublier de justifier que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des SEV de E).
2. Soit p le projecteur de noyau $\mathcal{S}$ et d'image $\mathcal{A}$, que vaut $p(M)$ si $M \in E$.

Solution :

1. On montre que $\mathcal{S}$ est un SEV de E . On a, par définition, $\mathcal{S} \subset E$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ car si $M = 0$ (la matrice nulle) alors $M^T = 0 = M$. Puis si $(M, M') \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $\lambda M + M' \in \mathcal{S}$? Par linéarité de la transposition

$$(\lambda M + M')^T = \lambda M^T + (M')^T = \lambda M + M' \text{ car } M \in \mathcal{S} \text{ donc } M^T = M \text{ et de même avec } M'$$

Conclusion, $\mathcal{S}$ est un SEV de E . On procède de même pour $\mathcal{A}$.

2. ① On montre que $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. On a $\{0\} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ (ce sont des SEV). Réciproquement si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ alors

$$M^T = M \text{ et } M^T = -M \text{ d'où } M = -M \text{ et ainsi (2} \neq 0) \text{ } M = 0$$

Remarque : Cette partie est en fait inutile mais instructive.

② On montre que $\mathcal{S} + \mathcal{A} = E$ par analyse-synthèse.

Analyse : soit $M \in E$, on suppose que $M = S + A$ où $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$ alors (linéarité de la transposition)

$$\begin{aligned} M &= S + A \\ M^T &= (S + A)^T = S^T + A^T = S - A \end{aligned}$$

d'où $S = \frac{M + M^T}{2}$ et $A = \frac{M - M^T}{2}$ (ceci prouve que la décomposition est unique, donc que la somme est bien directe)

Synthèse : On pose $S = \frac{M + M^T}{2}$ et $A = \frac{M - M^T}{2}$ alors

$$\begin{aligned} S^T &= \left(\frac{M + M^T}{2} \right)^T = \frac{M^T + (M^T)^T}{2} = \frac{M^T + M}{2} = S \text{ d'où } S \in \mathcal{S} \\ A^T &= \left(\frac{M - M^T}{2} \right)^T = \frac{M^T - (M^T)^T}{2} = \frac{M^T - M}{2} = -A \text{ d'où } A \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

et enfin $M = S + A$. Au final, on a bien $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

3. Enfin, d'après ce qui précède

$$p(M) = \text{d'où } S \in \mathcal{S}$$

Exercice de khôlle 644

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des SEV de E , en donner une base.
2. Montrer que $E = F \oplus G$. Si p est le projecteur sur F de direction G , déterminer $p(M)$ où $M \in E$. Que vaut $p \circ p(M)$?
3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p(M) = P \times M$ où $P = \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et retrouver alors ce que vaut $p \circ p(M)$.

Solution :

1. Ce sont déjà des «Vect» puisque

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de F , elle est libre car si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors par unicité des coefficients d'une matrice, on a $a = c = 0$. De la même manière, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de G .

2. On va montrer que toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ se décompose de manière unique sous la forme d'une somme d'un élément de F et d'un élément de G . Cela revient à montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ uniques tels que

$$M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bref, à montrer que le système

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ -\alpha + \gamma = b \\ \beta + \delta = c \\ -\beta + \delta = d \end{cases} \text{ a toujours une unique solution}$$

On peut calculer le déterminant du système et ainsi montrer qu'il est de Cramer, mais il est simple à résoudre ! En effet

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ -\alpha + \gamma = b \\ \beta + \delta = c \\ -\beta + \delta = d \end{cases} \begin{matrix} L_2 + L_1 \\ L_4 + L_3 \end{matrix} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ 2\gamma = b + a \\ \beta + \delta = c \\ 2\delta = d + c \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(a - b) \\ \beta = \frac{1}{2}(c - d) \\ \gamma = \frac{1}{2}(a + b) \\ \delta = \frac{1}{2}(c + d) \end{cases}$$

Ainsi on a bien $E = F \oplus G$ et au passage

$$p(M) = \frac{1}{2}(a - b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(c - d) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a - b & c - d \\ -(a - b) & -(c - d) \end{pmatrix}$$

D'après le cours $p(p(M)) = M$ ($p \circ p = Id_E$).

3. Un simple calcul donne

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & c - d \\ -(a - b) & -(c - d) \end{pmatrix}$$

d'où $\lambda = \frac{1}{2}$ convient. On vérifie ensuite que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $P^2 = \lambda^2 \times 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P$ et ainsi $p \circ p(M) = P^2 M = PM = p(M)$.

Exercice de khôlle 645

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$ et $G = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que G est un SEV de E .
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Soit p la projection sur F de direction G , si h_1 et h_2 sont définies par $h_1(x) = \ln(1 + e^x)$ et $h_2(x) = e^x$, que valent $p(h_1)$ et $p(h_2)$?

Solution : Il est clair que F est un SEV de E .

1. On a $G \subset E$ par définition. Si $f = 0$ (la fonction nulle) alors $f(0) = f'(0) = 0$. Soient f et g dans G et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $h = \lambda f + g \in G$? Puisque f et g sont dans G , on sait que $f(0) = g(0) = 0$ et $f'(0) = g'(0) = 0$. Mais alors

$$h(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$$

et par linéarité de la dérivation $h'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = 0$. Ainsi $h \in G$ et G est un SEV de E .

2. Par analyse-synthèse. Analyse : Soit $h \in E$, on suppose qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $h = f + g$. Puisque $f \in F$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f = \lambda \text{ch} + \mu \text{sh}$. Puis $g = h - f \in G$ donc

$$\begin{aligned} g(0) &= h(0) - \lambda \text{ch}(0) - \mu \text{sh}(0) = h(0) - \lambda = 0 \\ g'(0) &= h'(0) - \lambda \text{sh}(0) - \mu \text{ch}(0) = h'(0) - \mu = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$f = h(0) \text{ch} + h'(0) \text{sh} \text{ et } g = h - f$$

ce qui prouve l'unicité (sous réserve d'existence) de la décomposition.

Synthèse : Soit $h \in E$, on pose $f = h(0) \text{ch} + h'(0) \text{sh}$ et $g = h - f$. Par construction $f \in F$ et on a immédiatement

$$g(0) = g'(0) = 0 \text{ donc } g \in G$$

Enfin $h = f + g$, ce qui prouve l'existence de la décomposition.

Conclusion : tout vecteur de E se décompose de manière unique en une somme d'un élément de F et d'un élément de G , ainsi $E = F \oplus G$.

3. D'après ce qui précède, on a

$$p(h) = h(0) \text{ch} + h'(0) \text{sh}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p(h_1)(x) &= \ln(1 + e^0) \text{ch } x + \frac{e^0}{1 + e^0} \text{sh}(x) = \ln(2) \text{ch } x + \frac{\text{sh}(x)}{2} \\ p(h_2)(x) &= e^0 \text{ch}(x) + e^0 \text{sh}(x) = e^x \text{ (ouf car } \exp \in F \text{ donc } p(\exp) = \exp) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 646

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in E$. On définit $F = \{M \in E, PM = M^T P^T\}$ et $G = \{M \in E, PM = M^T P\}$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E . On admet que G également (preuve similaire à celle pour F).
2. On suppose $n = 2$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Donner une base de F et de G .
 - (b) Montrer que $E = F \oplus G$.
 - (c) Déterminer la projection de P sur F dans la direction de G .

Solution :

1. On a $F \subset E$, si $M = \bigcirc_n$ alors $M^T = \bigcirc_n$ et ainsi $PM = M^T P^T$ d'où $F \neq \emptyset$. Puis si $(M, N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, a-t-on $R = \lambda M + N \in F$? Par hypothèses

$$PM = M^T P^T \text{ et } PN = N^T P^T$$

Par linéarité de la transposition, $R^T = \lambda M^T + N^T$. Par linéarité à droite et à gauche du produit matriciel

$$PR = P(\lambda M + N) = \lambda PM + PN \text{ et } R^T P^T = (\lambda M^T + N^T) P^T = \lambda M^T P^T + N^T P^T$$

les deux termes sont égaux car M et N sont dans F . Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de E .

2. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} M \in F &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a-b-d \\ a+b+d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \{ a+b+d=0 \} \iff a = -b-d \\ &\iff M = \begin{pmatrix} -b-d & c \\ b & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$

Ainsi $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre car si $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ sont tels que $b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{pmatrix} -b-d & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } b = c = d = 0$$

De la même manière

$$\begin{aligned} M \in F &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b & a-b-d \\ a+b-d & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = d \text{ et } b = c = 0 \iff M = aI_2 \text{ où } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi $G = \text{Vect}(I_2)$ et $\mathcal{B}_G = I_2$ est une base de la droite vectorielle G (car $I_2 \neq \bigcirc_2$).

- (b) On sait que $E = F \oplus G$ si et seulement si $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E . La matrice dans la base canonique

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (qui est $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son

déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \oplus 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{C_1+C_3} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \ominus 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

donc $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E et $E = F \oplus G$.

- (c) On cherche à décomposer (on sait qu'une telle décomposition existe)

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = 1$ puis $\begin{cases} -\lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_1 = 1 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{cases}$ donne $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 1$. Ainsi

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

La projeté de P sur F dans la direction de G est donc $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18.3 Somme de sous-espaces vectoriels (exercices théoriques)

Exercice de khôlle 647

Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $(F \cap G) \oplus H = G$. Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Solution : On a trois points à montrer : ① $F \cap H = \{\vec{0}\}$ pour que la somme soit directe, ② $F + G \subset F + H$ et ③ $F + H \subset F + G$, ainsi ② et ③ donnent $F + G = F + H$.

Et les hypothèses se traduisent par ④ : $F \cap G \cap H = \{\vec{0}\}$, ⑤ $(F \cap G) + H \subset G$ et ⑥ $G \subset (F \cap G) + H$.

Pour ① : On remarque que ⑤ implique $H \subset G$. Ainsi $G \cap H = H$ et $F \cap G \cap H = F \cap H$. Avec ④ on a donc immédiatement ①.

Pour ② : Soit $x \in F + G$, alors il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $x = f + g$. Puisque $G \subset (F \cap G) + H$ (avec ⑤), il existe $f_1 \in F \cap G$ donc $f_1 \in F$ et $h_1 \in H$ tels que $g = f_1 + h_1$. Mais alors $x = (f + f_1) + h_1 \in F + H$ car $f + f_1 \in F$ (car F est un SEV). Conclusion ($x \in F + G \implies x \in F + H$) d'où $F + G \subset F + H$.

Pour ③ : Soit $x \in F + H$ il existe $f \in F$ et $h \in H$ tel que $x = f + h$. Puisque $h \in H \subset G$ (cf. remarque dans la preuve de ①), on en déduit que $x \in F + G$ (somme d'un élément de F et d'un de G). Conclusion $x \in F + G$ d'où $F + G \subset F + H$.

Exercice de khôlle 648

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F \cap G = F + G$, que dire de F et G ?

Solution : Avant tout, comme F et G jouent des rôles symétriques, la conclusion doit être invariante par permutation des rôles. En d'autres termes, c'est sans doute une histoire d'égalité et non pas d'inclusion.

Analyse : On suppose que $F \cap G = F + G$. Puisque $F \subset F + G$, on en déduit que $F \subset F \cap G$. Mais $F \cap G \subset G$ donc $F \subset G$ et par symétrie des rôles, on a $G \subset F$ d'où $F = G$.

Synthèse : Si $F = G$ alors $F \cap G = F$ et $F + G = F + F = F$. Conclusion : $F = G$.

Exercice de khôlle 649

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note $F = \{f \in E, f|_{\mathbb{Q}} = 0\}$ (en d'autres termes $f \in F$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = 0$) et $G = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On sait (cf cours) que G est un SEV de E .

1. Justifier que F est un SEV de E .
2. Montrer que F et G sont en somme directe.
3. Les SEV F et G sont-ils supplémentaires ? (Considérer la fonction δ_0 définie par $\delta_0(0) = 1$ et $\delta_0(x) = 0$ si $x \neq 0$ dite fonction de Dirac en 0).

Solution :

1. C'est banal, on a $F \subset E$. Si $f = 0$ (la fonction identiquement nulle), alors pour $x \in \mathbb{Q}$ on a $f(x) = 0$ donc $f \in F$. Soient $(f, g) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $h = \lambda f + g$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = g(x) = 0$ donc $h(x) = \lambda f(x) + g(x) = 0$. Ainsi $h \in F$. Conclusion F est un SEV de E .
2. Soit $f \in F \cap G$ alors $f \in F$ donc $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. On a $f(u_n) = 0$ (car $f \in F$ et $u_n \in \mathbb{Q}$) donc $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Mais $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ par continuité de f en x (et par le critère séquentiel). Par unicité de la limite on en déduit que $f(x) = 0$. Conclusion $f = 0$. Ceci prouve que $F \cap G \subset \{0\}$, la réciproque est évidente car F et G sont des SEV de E .
3. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $\delta_0 = f + g$. Soit $u_n = \frac{1}{n}$ (qui est dans $\mathbb{Q}$) alors

$$\delta_0(u_n) = 0 \text{ et } f(u_n) = 0 \text{ donc } g(u_n) = 0$$

Puisque g est continue en $x = 0$, on a $g(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(0)$ d'où $g(0) = 0$. Mais alors (puisque $0 \in \mathbb{Q}$)

$$\delta_0(0) = 1 = f(0) + g(0) = 0 \text{ absurde}$$

18.4 Familles libres, liées, génératrices

Exercice de khôlle 650

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre avec $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $f_4(x) = \arctan x$.

Solution : Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 (x + 1) + \lambda_3 \sqrt{1+x^2} + \lambda_4 \arctan x = 0$$

On a alors

$$0 = \frac{f(x)}{e^x} = \lambda_1 + \lambda_2 (x + 1) e^{-x} + \lambda_3 \sqrt{1+x^2} e^{-x} + \lambda_4 \arctan(x) e^{-x}$$

Mais par les croissances comparées

$$(x + 1) e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \sqrt{1+x^2} e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et $\arctan(x) e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (« bornée $\times$ tend vers 0 »). Donc

$$f(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda_1$$

par unicité de la limite on a $\lambda_1 = 0$. Puis (avec $\lambda_1 = 0$)

$$\begin{aligned} f(0) &= \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ f(-1) &= \sqrt{2} \lambda_3 - \frac{\pi}{4} \lambda_4 = 0 \\ f(1) &= 2\lambda_2 + \sqrt{2} \lambda_3 + \frac{\pi}{4} \lambda_4 = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne un système 3×3 dont le déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\frac{\pi}{4} \\ 2 & \sqrt{2} & \frac{\pi}{4} \end{vmatrix} = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2} \neq 0$$

Conclusion $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, la famille est libre.

Exercice de khôlle 651

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $P_1 = X^3 + X$, $P_2 = X^2 + 1$, $P_3 = X^3 - 1$ et $P_4 = -X^3 + X^2 + X + a$ où $a \in \mathbb{R}$. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre ? Lorsqu'elle est liée, donner une relation de dépendance linéaire.

Solution : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$$

Par unicité des coefficients, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 + a\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Le système est carré de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_4 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \leftarrow \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 - C_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a-1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3-a \end{aligned}$$

Le système est de Cramer si et seulement si $a \neq 3$, dans ce cas, la solution est unique et vaut $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, la famille est libre (c'est même une base de $\mathbb{R}_3[X]$). Pour $a = 3$, on résout le système (on sait qu'il y a une solution autre que la solution triviale, et même une infinité, on en cherche une)

$$\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 = \lambda_2 + 3\lambda_4 = 2\lambda_4 \\ \lambda_1 = -\lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_4 \end{cases}$$

Avec $\lambda_4 = 1$, on obtient

$$-P_1 - P_2 + 2P_3 + P_4 = 0$$

Exercice de khôlle 652

Dans $\mathbb{R}^4$, discuter, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, la liberté de la famille suivante.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \right)$$

Préciser une relation de dépendance lorsqu'elle est liée.

Solution : Méthode ① : Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_1} + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3-2L_1 \\ L_4-L_1}}{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_1} + 3\lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + (a-3)\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \underset{L_4-3L_2}{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_1} + 3\lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} + 2\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ (a-9)\lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

Si $a \neq 9$, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la famille est libre.

Si $a = 9$, on obtient le système $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_1} + 3\lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} + 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right.$ d'où par exemple avec $\lambda_3 = 1$

$$-3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la famille est liée.

Méthode ② : on note $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ les trois vecteurs, si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \underset{C_3-3C_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & a-3 \end{pmatrix} \underset{C_3-2C_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a-9 \end{pmatrix}$$

qui est de rang égal à 3 si et seulement si $a \neq 9$. La famille est libre si $a \neq 9$, liée si $a = 9$ car $\vec{w} - 3\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{0}$.

Exercice de khôlle 653

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la famille (A, A^2) est liée.

Solution : Un simple calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} -a^2+1 & -2a \\ 2a & -a^2+9 \end{pmatrix}$ puis $\lambda A + \mu A^2 = \begin{pmatrix} -\lambda + \mu(1-a^2) & -a\lambda - 2a\mu \\ a\lambda + 2a\mu & 3\lambda + \mu(9-a^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donne

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} -\lambda + \mu(1-a^2) = 0 \\ -\lambda a - 2\mu a = 0 \\ 3\lambda + \mu(9-a^2) = 0 \end{cases}$$

Méthode ① : On fait le pivot

$$(\mathcal{S}) \quad \underset{\substack{L_2-aL_1 \\ L_3+3L_1}}{\iff} \begin{cases} -\lambda + \mu(1-a^2) = 0 \\ \mu a(a^2-3) = 0 \\ -4\mu(a^2-3) = 0 \end{cases} \underset{a}{\iff} \begin{cases} -\lambda + \mu(1-a^2) = 0 \\ 0 = 0 \\ -4\mu(a^2-3) = 0 \end{cases} \underset{L_2+\frac{a}{4}L_3}{\iff}$$

Ainsi pour $a^2 \neq 3$, on a $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$, la famille est libre. Et si $a^2 = 3$, $(\mathcal{S}) \iff -\lambda - 2\mu = 0$, la famille est liée.

Méthode ② : Si on considère les lignes 1 et 3 de $(\mathcal{S})$, on obtient un système dont le déterminant vaut $\begin{vmatrix} -1 & 1-a^2 \\ 3 & 9-a^2 \end{vmatrix} =$

$4(a^2-3)$. Ainsi pour $a^2 \neq 3$, $\begin{cases} -\lambda + \mu(1-a^2) = 0 \\ 3\lambda + \mu(9-a^2) = 0 \end{cases}$ a une unique solution qui vaut $\lambda = \mu = 0$. La famille est libre.

Reste le cas où $a^2 = 3$, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit alors

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} -\lambda - 2\mu = 0 \\ -\lambda a - 2\mu a = 0 \\ 3\lambda + 6\mu = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à $\lambda = 2\mu$, la famille est liée.

Exercice de khôlle 654

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$. On note $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_n)$, montrer que

1. Si $\mathcal{G}$ est libre et si $u_{n+1} \notin \text{Vect}(\mathcal{G})$ alors $\mathcal{F}$ est libre.
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E et si $u_{n+1} \in \text{Vect}(\mathcal{G})$ alors $\mathcal{G}$ est génératrice de E .

Solution :

1. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k = \vec{0}$$

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$ alors

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} \right) u_k \in \text{Vect}(\mathcal{G})$$

donc $\lambda_{n+1} = 0$. Mais alors $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ et puisque $\mathcal{F}$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. La famille est libre car tous les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont nuls.

2. On sait que $u_{n+1} \in \text{Vect}(\mathcal{G})$, il existe donc $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$$

Soit $x \in E$, puisque $\mathcal{F}$ est génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k$$

Mais alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k + \lambda_{n+1} u_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k + \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \lambda_{n+1} \alpha_k) u_k \\ &= \sum_{k=1}^n \mu_k u_k \text{ où } \mu_k = \lambda_k + \lambda_{n+1} \alpha_k \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Ainsi $x \in \text{Vect}(\mathcal{G})$, ce qui prouve que $\mathcal{G}$ est génératrice de E .

Exercice de khôlle 655

(★) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour $f \in E$, à quelle condition sur f , la famille $\mathcal{F} = (\tilde{1}, f, f^2, \dots, f^n)$ est-elle liée dans E ? ($\tilde{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$). Même question si $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution : Analyse (condition nécessaire) : Supposons $\mathcal{F}$ liée, il existe donc $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ non tous nuls (un au moins ne l'est pas) tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f^k = \tilde{0}$. Ceci équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k f^k(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (f(x))^k = 0$$

On pose $P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est une racine de P . On a $\deg P \leq n$, et puisque l'un, au moins, des λ_k est non nuls, le polynôme P admet au plus n racines. Conclusion, f prend au plus n valeurs distinctes, en d'autres termes

$$|f(\mathbb{R})| \leq n \text{ (où } |f(\mathbb{R})| = \text{Card}(f(\mathbb{R})) \text{)}$$

Synthèse (condition suffisante) : Soit f tel $|f(\mathbb{R})| \leq n$ et $P = \prod_{\alpha \in f(\mathbb{R})} (X - \alpha)$ (en d'autres termes, si on écrit $f(\mathbb{R}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ où $d = |f(\mathbb{R})|$, on a $P = \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$). Alors $P \neq 0$ (car $f(\mathbb{R})$ a au moins un élément) et $\deg P \leq |f(\mathbb{R})| = n$. Si on écrit P sous forme développée $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ (on peut car $\deg P = d \leq n$, quitte à prendre $\lambda_k = 0$ pour $k > d$) alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(f(x)) = 0$ (car $f(x)$ est l'un des α_i , donc un des α de $f(\mathbb{R})$). On en déduit que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k f^k = \tilde{0}$$

la famille est donc liée (car un, au moins, des coefficients de P , i.e. un des λ_k , est non nul).

Conclusion : $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si f ne prend au plus n valeurs distinctes.

Si $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et si f prend deux valeurs distinctes $\alpha_1 < \alpha_2$, par le TVI elle prend toutes les valeurs de $[\alpha_1, \alpha_2]$ donc une infinité. En d'autres termes, les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs sont les fonctions constantes. Dans ce cas, $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si f est constante.

Exercice de khôlle 656

Pour x, y et z trois réels tous non nuls (i.e. $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$), on définit les trois vecteurs $u = (yz, z, y)$, $v = (z, xz, z)$, $w = (y, x, xy)$ de $\mathbb{R}^3$. A quelle condition sur $S = x + y + z$ et $P = xyz$ la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Solution : Simple application du cours, on calcule (si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w)) &= \begin{vmatrix} yz & z & y \\ z & xz & x \\ y & x & xy \end{vmatrix} \stackrel{C_1 - yC_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & z & y - yz \\ z - zxy & xz & x - xyz \\ y - yx & x & 0 \end{vmatrix} \stackrel{L_2 - xL_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & \ominus z & y - yz \\ z - zxy & 0 & x - xy \\ y - yx & \ominus x & 0 \end{vmatrix} \\ &= -z \begin{vmatrix} z - zxy & x - xy \\ y - yx & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 0 & y - yz \\ z - zxy & x - xy \end{vmatrix} = zxy(1-x)(1-y) + xyz(1-z)(1-xy) \\ &= xyz(1-x-y+xy+1-xy-z+xyz) = xyz(2+xyz-(x+y+z)) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base si et seulement si $2 + P = S$.

Exercice de khôlle 657

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $P_0 = 1$ et pour $k \geq 1$

$$P_k(X) = X(X-1)\cdots(X-k+1)$$

1. Reconnaître $\frac{P_k(n)}{k!}$. Que vaut $\sum_{k=0}^n \frac{P_k(n)}{k!} X^k$?
2. Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

$$1. \text{ On a } \frac{P_0(n)}{0!} = 1 \text{ et si } k \geq 1, \frac{P_k(n)}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ d'où}$$

$$\frac{P_k(n)}{k!} = \binom{n}{k} \text{ (et c'est aussi vrai si } k=1).$$

Mais alors

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(n)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k = (X+1)^n$$

2. On a $\deg P_k = k$ et le coefficient dominant de P_k vaut 1. Si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P_0, \dots, P_n) = \begin{pmatrix} 1 & ? & & ? \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant égal à 1. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On peut aussi invoquer le théorème de la base échelonnée.

Exercice de khôlle 658

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de E . Soit $d \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et P un polynôme de degré d non unitaire (donc de coefficient dominant différent de 1). On note $\mathcal{B}$ la famille obtenue en remplaçant X^d dans $\mathcal{B}_c$ par P .

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E .

2. Soit $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$, donner les coordonnées de A dans la base $\mathcal{B}$.

3. Existe-t-il des vecteurs ayant même coordonnées dans les deux bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}$?

Solution : On note $P = \sum_{k=0}^d \alpha_k X^k$.

1. On écrit le déterminant de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ qui vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \alpha_{d-1} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \alpha_d & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant égal à $\alpha_d \neq 0$.

2. On cherche $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ réels tels que

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k + a_d X^d + \sum_{k=d+1}^n a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} (\lambda_k + \lambda_d \alpha_k) X^k + \lambda_d \alpha_d X^d + \sum_{k=d+1}^n \lambda_k X^k \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients, on obtient

$$\text{si } k \in \llbracket 0 ; d-1 \rrbracket, \lambda_k + \lambda_d \alpha_k = a_k, \lambda_d \alpha_d = a_d \text{ et si } k \in \llbracket d+1 ; n \rrbracket, \lambda_k = a_k$$

d'où ($\alpha_d \neq 0$)

$$\text{si } k \in \llbracket 0 ; d-1 \rrbracket, \lambda_k + \lambda_d \alpha_k = a_k - \frac{a_d}{\alpha_d} \alpha_k, \lambda_d = \frac{a_d}{\alpha_d} \text{ et si } k \in \llbracket d+1 ; n \rrbracket, \lambda_k = a_k$$

Les coordonnées de A dans $\mathcal{B}$ sont donc

$$\begin{pmatrix} a_0 - \frac{a_d}{\alpha_d} \alpha_0 \\ \vdots \\ a_{d-1} - \frac{a_d}{\alpha_d} \alpha_{d-1} \\ \frac{a_d}{\alpha_d} \\ a_{d+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

3. Le vecteur A a même coordonnées dans les deux bases si et seulement si

$$\begin{aligned} a_k - \frac{a_d}{\alpha_d} \alpha_k &= a_k \text{ pour } k \in \llbracket 0 ; d-1 \rrbracket \\ \frac{a_d}{\alpha_d} &= a_d \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_d \neq 1$ (car P non unitaire), on en déduit que $a_d = 0$ est la condition cherchée. On vérifie (synthèse) que dans ce cas, A a même coordonnées dans les deux bases. En d'autre terme, une CNS est que A n'a pas de terme en X^d .

Exercice de khôlle 659

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 1$, et $u = \sum_{k=1}^n e_k$. On note $\mathcal{B} = (e_1 + \alpha u, e_2 + \alpha u, \dots, e_n + \alpha u)$.

1. A quelle condition sur α la famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^n$?

2. Pour $\alpha = 1$, quelles sont les coordonnées de $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$?

Solution : Rappel $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$ de déterminant

$$D = \sum_{k=1}^n C_k = \begin{vmatrix} 1+n\alpha & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ \vdots & 1+\alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & 1+\alpha & \alpha \\ 1+n\alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1+\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+n\alpha & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ \vdots & 1+\alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & 1+\alpha & \alpha \\ 1+n\alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 1+\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (1+n\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \\ \vdots & 1+\alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha & 1+\alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & \cdots & \alpha & 1+\alpha \end{vmatrix} \stackrel{C_k \leftarrow C_k - \alpha C_1}{=} (1+n\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+n\alpha)$$

Puisque $D \neq 0$ si et seulement si $\alpha \neq -\frac{1}{n}$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base si et seulement si $\alpha \neq -\frac{1}{n}$.

2. On a bien $1 \neq -\frac{1}{n}$, donc pour $\alpha = 1$, on a bien une base. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les coordonnées de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$ alors

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k + u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k + \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) u$$

Analyse (est-ce vraiment une analyse-synthèse?) : on pose $S = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ alors

$$\sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + S) e_k$$

d'où (par unicité des coordonnées ou parce que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_k = \lambda_k + S$$

En sommant, il vient $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + S) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) + nS = (n+1)S$ puis

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = x_k - S = x_k - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i$$

Synthèse : Bah, en fait on sait que les $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ existent et sont uniques et on vient de trouver leur valeur, donc pas besoin de synthèse!

Conclusion, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i \\ \vdots \\ x_n - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 660

Une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est dite SC (lire à signe constant) si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) \geq 0$.

- Donner un exemple de n fonctions SC qui forment une famille libre.
- L'ensemble des fonctions SC est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
- Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitués de fonctions SC et non réduit à la fonction identiquement nulle notée $\tilde{0}$.
 - Donner un exemple de tel sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
 - Soit $f \neq \tilde{0}$ une fonction de F , $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$, $g \in F$ et $b \neq a$ un réel.
 - Justifier que le système $\begin{cases} \lambda f(a) + \mu g(a) = 1 \\ \lambda f(b) + \mu g(b) = -1 \end{cases}$ d'inconnue $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ n'a jamais de solution.
 - En déduire que $g \in \text{Vect}(f)$.
 - Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitués de fonctions SC.

Solution :

- Premier exemple : un exemple simple de fonction SC est $x \mapsto x^2$. Si, pour $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, on pose $f_k(x) = x^{2k}$ alors $(f_0, \dots, f_n)$ est libre. En effet, si $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = \tilde{0}$ alors le polynôme $P(X) =$

$\sum_{k=0}^n \lambda_k X^{2k}$ est donc le polynôme nul, tous ses coefficients sont donc nuls. Ceci prouve que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Second exemple : on définit g_k par $g_k(x) = e^{kx}$ alors $(g_0, \dots, g_n)$ est libre. En effet si $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k g_k = \tilde{0}$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{kx} = \sum_{k=0}^n \lambda_k (e^x)^k = 0$$

Soit $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$, pour $\alpha > 0$, on a $P(\alpha) = \sum_{k=0}^n \lambda_k (e^{\ln \alpha})^k = 0$, ainsi α est racine de P . Puisque $]0, +\infty[$ est une partie infinie, on en déduit que $P = 0$ (le polynôme nul). Les coefficients de P sont donc tous nuls, ce qui prouve que $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, \lambda_k = 0$.

- Non, par exemple f_1 et f_0 sont SC mais $f = f_1 - f_0$ ne l'est pas (on a $f(x) = x^2 - 1$). Un autre exemple : $\exp$ et $\frac{1}{\exp}$ sont SC, mais $\text{sh} = \frac{1}{2} \exp - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\exp}$ ne l'est pas (car $\text{sh}(1)\text{sh}(-1) < 0$). Ceci contredit la stabilité par combinaison linéaire.
- (a) Par exemple $\text{Vect}(\exp)$. En fait $\text{Vect}(f)$ où f est SC. En effet, si $g = \lambda f$ alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x)g(y) = \lambda^2 f(x)f(y) \geq 0$, ce qui prouve que λf est SC.
 - i. Par l'absurde, si ce système a une solution alors $h = \lambda f + \mu g$ est dans F (car F SEV et f, g sont dans F), mais $h(1)h(-1) < 0$ donc h n'est pas SC.
 - ii. Le déterminant de ce système est donc nul pour tout $b \neq a$. Ainsi $f(a)g(b) = f(b)g(a)$. Puisque $f(a) \neq 0$, on en déduit que

$$\forall b \in \mathbb{R}, b \neq a, g(b) = \frac{g(a)}{f(a)} f(b)$$

et c'est clairement encore vrai si $b = a$. En posant $\lambda = \frac{g(a)}{f(a)}$ on a donc $g = \lambda f \in \text{Vect}(f)$.

- iii. On résume, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitué de fonctions SC. Ou bien $F = \{\tilde{0}\}$, ou bien il existe $f \neq \tilde{0}$ dans F (donc un $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$). Si $g \in F$ alors $g \in \text{Vect}(f)$ donc $F \subset \text{Vect}(f)$. Et puisque $f \in F$, on a aussi $\text{Vect}(f) \in F$ car F est un espace vectoriel. Conclusion $F = \text{Vect}(f)$.

Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitué de fonctions SC sont les droites vectorielles dont une base est SC ou l'espace $\{\tilde{0}\}$ réduit à la fonction identiquement nulle.

Exercice de khôlle 661

Dans $\mathbb{R}^4$, discuter, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, la liberté de la famille suivante.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} \right)$$

Préciser une relation de dépendance lorsqu'elle est liée.

Solution : Méthode ① : Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cela conduit au système

$$\begin{cases} \boxed{\lambda_1} + 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3-L_1}{\sim} \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} - 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 - a\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 2a\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3+2L_2}{\sim} \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} - 2\lambda_3 = 0 \\ -(a+3)\lambda_3 = 0 \\ 2(a+3)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_4+2L_3}{\sim} \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} - 2\lambda_3 = 0 \\ -(a+3)\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq -3$, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la famille est libre.

Si $a = -3$, on obtient le système $\begin{cases} \boxed{\lambda_1} + 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$ d'où par exemple avec $\lambda_3 = 1$, on obtient $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_1 = -1$

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la famille est liée.

Méthode ② : on note $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ les trois vecteurs, si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2-2C_1 \\ C_3-aC_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & -2 \\ 2 & -3 & -a+3 \\ 1 & 3 & 2a \end{pmatrix} \underset{C_3+2C_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & -1 & -(a+3) \\ 1 & 3 & 2(a+3) \end{pmatrix}$$

où $\vec{z} = \vec{w} - a\vec{u} + 2(\vec{v} - 2\vec{u}) = \vec{w} - (a+4)\vec{u} + 2\vec{v}$

qui est de rang égal à 3 si et seulement si $a \neq -3$. La famille est libre si $a \neq -3$, liée si $a = -3$ car $\vec{w} - (-3+4)\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{0}$.

Exercice de khôlle 662

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_{\alpha}(x) = \text{ch}(\alpha x)$. La famille $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est-elle libre ?

Solution : Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$ donc tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k \text{ch}(kx) = 0$$

Méthode ① : On sait que $\text{ch}(kx) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$ ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k \text{ch}(kx) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \times \frac{e^{nx}}{e^{nx}} = \frac{1}{2e^{nx}} \sum_{k=1}^n \lambda_k (e^{(n+k)x} + e^{(n-k)x}) \\ &= \frac{1}{2e^{nx}} (\lambda_1 (e^{(n+1)x} + e^{(n-1)x}) + \lambda_2 (e^{(n+2)x} + e^{(n-2)x}) + \dots + \lambda_n (e^{2nx} + e^{0x})) \\ &= \frac{1}{2e^{nx}} (\lambda_n + \lambda_{n-1}e^x + \lambda_{n-2}e^{2x} + \dots + \lambda_2 e^{(n-2)x} + \lambda_1 e^{(n-1)x} + \lambda_1 e^{(n+1)x} + \dots + \lambda_n e^{2nx}) \\ &= \frac{1}{2e^{nx}} P(e^x) \text{ où } P(X) = \lambda_n + \lambda_{n-1}X + \dots + \lambda_1 X^{n-1} + \lambda_1 X^{n+1} + \dots + \lambda_n X^{2n} \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, P(e^x) = 0$, donc que pour $y > 0$, $P(e^{\ln y}) = P(y) = 0$. Ceci montre que P a une infinité de racines donc est identiquement nul. En particulier tous ses coefficients sont nuls. Ceci se traduit par $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. La famille est libre.

Méthode ② :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\text{ch}(nx)} \sum_{k=1}^n \lambda_k \text{ch}(kx) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(nx)} = 0$$

Mais $\frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(nx)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{e^{kx}}{2}}{\frac{e^{nx}}{2}} = \frac{1}{e^{(n-k)x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(nx)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \lambda_n$$

Mais $\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\text{ch}(kx)}{\text{ch}(nx)} = 0 \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, par unicité de la limite, on a $\lambda_n = 0$. Pour conclure, on le prouve par récurrence

sur n . Si $n = 1$, on a $0 = \sum_{k=1}^1 \lambda_k \text{ch}(kx) = \lambda_1 \text{ch}(x)$ d'où avec $x = 0$, $\lambda_1 = 0$. Puis si c'est vrai au rang $n-1$ (où $n \geq 2$) alors ce qui précède montre que $\lambda_n = 0$, puis l'hypothèse de récurrence donne $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

19.1 Linéarité, noyau, image

Exercice de khôlle 663

Soit f défini sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (x + 2z, x + y + z, x + 2z)$.

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Déterminer son noyau et son image. En donner une famille génératrice.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
4. Donner l'expression de la projection, noté p , sur $\operatorname{Im} f$ et de direction $\ker f$. Que vaut $p \circ f$?

Solution :

1. On a bien $f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (le «endo»), puis en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$f(X) = AX$$

Si $(X, Y) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité à droite du produit matriciel, on a $f(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda f(X) + f(Y)$, ce qui prouve la linéarité.

2. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$Y \in \operatorname{Im} f \iff \exists X \in \mathbb{R}^3, Y = f(X) = AX \iff \text{le système } (\mathcal{S}) : \begin{cases} x + 2z = a \\ x + y + z = b \\ x + 2z = c \end{cases} \text{ a au moins une solution}$$

Mais

$$(\mathcal{S}) \underset{L_2 - L_1}{\underset{L_3 - L_1}{\sim}} \begin{cases} \boxed{x} + 2z = a \\ \boxed{y} - z = b - a \\ 0 = c - a \end{cases}$$

Le système a des solutions si et seulement si $c = a$, ainsi

$$\operatorname{Im} f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a - c = 0\} = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Puis avec $a = b = c$, on obtient $y = z$ et $x = -2z$ d'où

$$\ker f = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\text{Im } f$ et libre (son rang est 2, elle est déjà échelonnée) et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est génératrice de $\ker f$ et libre (un vecteur non nul). Ce sont des bases de $\text{Im } f$ et $\ker f$ respectivement.

3. Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ alors

$$\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et ainsi $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus \ker f$.

4. Pour calculer la projection, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on décompose $X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ où (Cramer)

$$\lambda = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = -\frac{x-z}{3}$$

d'où

$$p(X) = X - \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{x-z}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+2z \\ x+3y-z \\ x+2z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On pose alors $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour finir

$$p \circ f(X) = P \times A \times X$$

$$\text{Mais } P \times A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A \text{ d'où } p \circ f = f.$$

En fait c'est évident car si $x \in E$, on a $f(x) \in \text{Im } f$ donc

$$f(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{\vec{0}}_{\in \ker f} \text{ d'où } p(f(x)) = f(x)$$

Exercice de khôlle 664

$$\text{Soit } f_a : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y-2z \\ x+az \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

1. Montrer que $f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Déterminer $\ker(f_a)$ et $\text{Im}(f_a)$ en fonction du paramètre a .
3. A-t-on $\ker(f_a) \oplus \text{Im}(f_a) = \mathbb{R}^3$?

Solution :

1. On a bien $f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (le «endo»), puis en posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$f(X) = AX$$

Si $(X, Y) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité à droite du produit matriciel, on a $f(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda f(X) + f(Y)$, ce qui prouve la linéarité.

2. Soit $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$Y \in \text{Im } f_a \iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, Y = AX$$

Ainsi le vecteur Y est dans $\text{Im } f_a$ si et seulement le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x - y - 2z = \beta \\ x + az = \gamma \end{cases}$ admet au moins une solution. Mais

$$(\mathcal{S}) \underset{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}}{\sim} \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ -2y - 3z = \beta - \alpha \\ -y + (a-1)z = \gamma - \alpha \end{cases} \underset{L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim} \begin{cases} \boxed{x} + y + z = \alpha \\ \boxed{-2y} - 3z = \beta - \alpha \\ \left(a + \frac{1}{2}\right)z = \gamma - \alpha - \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \end{cases}$$

② Si $a \neq -\frac{1}{2}$ le système a toujours une unique solution, on a $\text{Im } f_a = \mathbb{R}^3$ et $\ker f_a = \{\vec{0}\}$ (la seule solution pour $Y = 0$ est $x = y = z = 0$).

② Si $a = -\frac{1}{2}$ le système a une (et même plusieurs) solution si et seulement si $\alpha + \beta - 2\gamma = 0$. On a donc

$$\text{Im } f_a = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Pour $\ker f_a$, on termine la résolution dans le cas où $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On obtient

$$(\mathcal{S}) \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = -\frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\text{d'où } \ker f_{-\frac{1}{2}} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On peut aussi calculer le déterminant du système qui vaut

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -(1 + 2a)$$

il est non nul si $a \neq -\frac{1}{2}$. Dans ce cas, $(\mathcal{S})$ admet toujours une unique solution et f_a est bijective (c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$) d'où $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ et $\ker f = \{\vec{0}\}$. On examine ensuite uniquement le cas particulier $a = -\frac{1}{2}$.

3. Si $a \neq -\frac{1}{2}$, on a $\ker f_a \oplus \operatorname{Im} f_a = \mathbb{R}^3$ de manière évidente.

Si $a = -\frac{1}{2}$, une base de $\operatorname{Im} f_{-\frac{1}{2}}$ est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (car génératrice, de rang 2 donc libre) et une base de

$\ker f_{-\frac{1}{2}}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a

$$\det_{\mathcal{B}_c} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

d'où

$$\operatorname{Im} f_{-\frac{1}{2}} \oplus \ker f_{-\frac{1}{2}} = \mathbb{R}^3.$$

Exercice de khôlle 665

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ définie par $\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$ et $H = \{P \in E, P(0) = 0\}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Donner une famille génératrice de $\operatorname{Im} \varphi$ et en déduire $\operatorname{Im} \varphi \subset H$. L'endomorphisme φ est-il surjectif?
3. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ et $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$.
 - (a) Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de E .
 - (b) Calculer $\varphi(P_k)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
 - (c) Simplifier $P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k$ puis $\varphi(P)$ de deux manières. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$. Comment calculer $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$?

Solution :

1. Il y a «endo» et «morphisme». On commence par la linéarité.

Si $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(\lambda P + Q) = \frac{1}{n}X(1-X) \times (\lambda P + Q)' + X \times (\lambda P + Q)$$

Par linéarité de la dérivation (et distributivité vue comme linéarité à droite du produit), on peut affirmer que

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= \frac{1}{n}X(1-X) \times (\lambda P' + Q') + X \times (\lambda P + Q) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{n}X(1-X)P' + XP \right) + \left(\frac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ \right) \\ &= \lambda \varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

Reste à montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Méthode ① : On écrit que $P = a_n X^n + Q$ où $\deg Q < n$ (et $a_n \in \mathbb{R}$ peut être nul) ainsi

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{1}{n}X(1-X)(na_n X^{n-1} + Q') + X(a_n X^n + Q) \\ &= -a_n X^{n+1} + a_n X^n + \frac{1}{n}X(1-X)Q' + a_n X^{n+1} + XQ \\ &= a_n X^n + \frac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ \end{aligned}$$

Ainsi $\deg(\varphi(P)) \leq \max\left(\deg(a_n X^n), \deg\left(\frac{1}{n}X(1-X)Q'\right), \deg(XQ)\right)$, mais

$$\deg(a_n X^n) \leq n, \deg\left(\frac{1}{n}X(1-X)Q'\right) < n+1, \deg(XQ) < n+1$$

d'où $\deg(\varphi(P)) \leq n$.

Méthode ② : On écrit que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, par linéarité, on obtient

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi(X^k)$$

Mais un calcul simple donne

$$\varphi(X^k) = \frac{k}{n}X(1-X)X^{k-1} + X^{k+1} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)X^{k+1} + \frac{k}{n}X^k$$

d'où $\varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ (si $k = n$, le terme $\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ est nul). Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ (combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$).

2. Avec la méthode ②, on a $\varphi(X^k)$ si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ (sinon, on le calcule!). On obtient que

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi &= \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \dots, \varphi(X^n)) \\ &= \text{Vect}\left(X, \frac{n-1}{n}X^2 + \frac{1}{n}X, \dots, \left(1 - \frac{k}{n}\right)X^{k+1} + \frac{k}{n}X^k, \dots, X^n\right) \end{aligned}$$

On constate que chacun des générateurs obtenus est dans H car sans terme constant. Ainsi $\text{Im } \varphi \subset H$ (au passage H est un hyperplan). Puisque $H \neq E$ (par exemple $P = 1 \notin H$), on a $\text{Im } \varphi \neq E$. Conclusion, φ n'est pas surjectif.

3.

(a) On a

$$P_0 = (1-X)^n = 1 + \dots, P_1 = X(1-X)^{n-1} = X + \dots$$

et

$$P_k = X^k(1-X)^{n-k} = X^k + \dots$$

Si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on a (les « ? » sont liés au triangle de Pascal !)

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P_0, \dots, P_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ ? & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ ? & & ? & 1 \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire donc de déterminant égal au produit des termes diagonaux, à savoir égal à 1 ! On a une base !

(b) Un calcul simple donne (oh oh !) $\varphi(P_k) = \frac{k}{n}P_k$ si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

(c) Par le binôme

$$P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$$

Mais alors, par linéarité de φ ,

$$\varphi(1) = X = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi(P_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} P_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} P_k$$

avec $X = \frac{1}{2}$, compte tenu de $P_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$, on obtient

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{k \binom{n}{k}}{2^n} \text{ d'où } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \frac{1}{2} n 2^n.$$

Puis

$$\varphi^2(P) = \varphi(\varphi(P)) = \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} P_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \varphi(P_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} P_k$$

Mais on a également

$$\varphi^2(P) = \varphi(X) = \frac{1}{n}X + \frac{n-1}{n}X^2$$

Avec $X = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{1}{2n} + \frac{n-1}{4n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2^n} \binom{n}{k} \text{ d'où } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = 2^n n^2 \left(\frac{1}{2n} + \frac{n-1}{4n}\right) = n(n+1)2^{n-2}$$

Exercice de khôlle 666

Soit $f : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie pour $P = \sum_{k=0}^4 a_k X^k$ par $f(P) = a_0 X^2 + 7a_2 X + a_4$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X], \mathbb{R}_2[X])$.
2. Déterminer une base de $\ker f$ et de $\text{Im } f$.

Solution :

1. Il s'agit de prouver la linéarité, mais si $P = \sum_{k=0}^4 a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^4 b_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\lambda P + Q = \sum_{k=0}^4 c_k X^k \text{ où } c_k = \lambda a_k + b_k$$

d'où

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= c_0 X^2 + 7c_2 X + c_4 = (\lambda a_0 + b_0) X^2 + 7(\lambda a_2 + b_2) X + (\lambda a_4 + b_4) \\ &= \lambda(a_0 X^2 + 7a_2 X + a_4) + (b_0 X^2 + 7b_2 X + b_4) = \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

2. Pour le noyau, si $P = \sum_{k=0}^4 a_k X^k$ alors

$$\begin{aligned} P &\in \ker f \iff f(P) = 0 \iff a_0 X^2 + 7a_2 X + a_4 = 0 \iff a_0 = a_2 = a_4 = 0 \text{ (unicité des coefficients)} \\ &\iff P = a_3 X^3 + a_1 X \text{ où } (a_3, a_1) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\ker f = \text{Vect}(1, X^3)$. Une base de $\ker f$ est $(1, X^3)$ (elle l'engendre et est libre car sous famille de la base canonique, elle-même libre).

Enfin $\text{Im } f = \text{Vect}(f(\mathcal{B}_c))$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique. On a $f(1) = X^2$, $f(X) = 0$, $f(X^2) = 7X$, $f(X^3) = 0$ et $f(X^4) = 1$ d'où

$$\text{Im } f = \text{Vect}(X^2, 0, 7X, 0, 1) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$$

Une base de $\text{Im } f$ est $(1, X, X^2)$ (la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$).

Exercice de khôlle 667

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ définie sur E par

$$\varphi(P) = P(X+1) - \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(X)}{k!}$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $\varphi(X^i)$.
3. Que peut-on en déduire pour φ ?

Solution :

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P(X+1)$ et $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P^{(k)}(X)$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$, ainsi $\varphi(P)$ aussi (en tant que combinaison linéaire de vecteurs d'un espace vectoriel). On sait que la dérivation, définie par $D(P) = P'$ est un endomorphisme de E , ainsi $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $D^k \in \mathcal{L}(E)$ et par combinaison linéaire $T = \sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} \in \mathcal{L}(E)$ (on a

$$T : P \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(X)}{k!}.$$

Enfin si on note $s : P \mapsto P(X+1)$ (s comme «shifted») alors $s \in \mathcal{L}(E)$ car

$$s(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda s(P) + s(Q)$$

Conclusion $\varphi = s - T \in \mathcal{L}(E)$.

Remarque : On peut aussi simplement calculer $\varphi(\lambda P + Q)$ et utiliser la linéarité de la dérivation!

2. On sait que si $(i, k) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, on a

$$(X^i)^{(k)} = k! \binom{i}{k} X^{i-k} \text{ si } k \leq i \text{ et } (X^i)^{(k)} = 0 \text{ si } k > i$$

Ainsi

$$\varphi(X^i) = (X+1)^i - \sum_{k=0}^i \frac{k! \binom{i}{k} X^{i-k}}{k!} = (X+1)^i - \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} X^{i-k} = 0$$

car d'après le binôme, on a $\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} X^{i-k} = (X+1)^i$.

3. Conclusion φ est nulle sur une base donc est l'application linéaire nulle.
Pour le justifier : Méthode ① : l'image d'une base définie de manière unique une application linéaire, or ici φ et l'application nulle envoient la base canonique sur la même image, donc sont égales.

Méthode ② : Si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, par linéarité $\varphi(P) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi(X^i) = 0$, donc $\varphi = 0$.

Exercice de khôlle 668

Soit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. On suppose les $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ deux à deux distincts, et on définit f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = MD - DM$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Si $M = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$; que vaut $f(M)$? Que peut-on en déduire?
3. Déterminer $\ker f$.

Solution : On a clairement $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est le «endo»).

1. Si $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors par linéarité du produit matriciel

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= (\lambda M + N)D - D(\lambda M + N) = \lambda MD + ND - \lambda DM - DN \\ &= \lambda(MD - DM) + (ND - DN) = \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire d'où $f \in \mathcal{L}(E)$.

2. On sait que dans ce cas $MD = DM = \text{Diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n)$ donc $f(M) = 0$. On en déduit que si on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales, on a $\mathcal{D}_n \subset \ker f$. Ainsi f n'est pas injective!

3. On commence par regarder ce qu'il se passe pour $n = 2$. Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} MD &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & c\lambda_2 \\ b\lambda_1 & d\lambda_2 \end{pmatrix} \\ DM &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & c\lambda_1 \\ b\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $MD - DM = 0 \iff MD = DM \iff \begin{cases} b\lambda_1 = b\lambda_2 \\ c\lambda_1 = c\lambda_2 \end{cases} \iff b = c = 0$ car $\lambda_1 \neq \lambda_2$, d'où M est diagonale.

De manière général, on note $D = ((\lambda_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $i \neq j \implies \lambda_{i,j} = 0$ et $\lambda_{i,i} = \lambda$ et $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ le coefficient d'indice (i, j) de MD vaut

$$\sum_{k=1}^n m_{i,k} \lambda_{k,j} = m_{i,j} \lambda_j$$

et celui d'indice (i, j) de DM vaut

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{i,k} m_{k,j} = \lambda_i m_{i,j}$$

On en déduit que $M \in \ker f \iff MD = DM \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, m_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$ d'où si $i \neq j$ on a $m_{i,j} = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$. La matrice M est donc diagonale, ce qui prouve que $\ker f \subset \mathcal{D}_n$ et par double inclusion

$$\ker f = \mathcal{D}_n \text{ ensemble des matrices diagonales}$$

Exercice de khôlle 669

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, à $P \in E$ on associe le polynôme $f(P)$ défini par

$$f(P) = (1 - X^2) \left(P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} + \left(\frac{P''(0)}{2} - P(0) \right) X \right).$$

- Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
- Déterminer une base de $\ker f$ et de $\text{Im } f$, ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires?
- L'endomorphisme f est-il injectif? surjectif? bijectif?

Solution :

1. Avant tout, $f(P) \in E$ (car $P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} + \left(\frac{P''(0)}{2} - P(0) \right) X \in \mathbb{R}_1[X]$). Pour la linéarité, c'est facile, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda P + Q) = (1 - X^2) \left((\lambda P + Q)'(0) - \frac{(\lambda P + Q)'''(0)}{6} + \left(\frac{(\lambda P + Q)''(0)}{2} - (\lambda P + Q)(0) \right) X \right)$$

Par linéarité de l'évaluation et de la dérivation, on a

$$f(\lambda P + Q) = \lambda P'(0) + Q'(0) - \frac{\lambda P'''(0) + Q'''(0)}{6} + \left(\frac{\lambda P''(0) + Q''(0)}{2} - (\lambda P(0) + Q(0)) \right) X$$

et par distributivité (ou linéarité du produit de polynômes)

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \lambda \left((1 - X^2) \left(P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} + \left(\frac{P''(0)}{2} - P(0) \right) X \right) \right) \\ &\quad (1 - X^2) \left(Q'(0) - \frac{Q'''(0)}{6} + \left(\frac{Q''(0)}{2} - Q(0) \right) X \right) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(E)$.

2. Pour le noyau : $P \in \ker f \iff f(P) = 0 \iff (1 - X^2) \left(P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} + \left(\frac{P''(0)}{2} - P(0) \right) X \right) = 0$. Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, on a

$$\begin{aligned} P &\in \ker f \iff \left(P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} \right) + \left(\frac{P''(0)}{2} - P(0) \right) X \\ &\iff P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} = \frac{P''(0)}{2} - P(0) = 0 \text{ (unicité des coefficients)} \end{aligned}$$

Mais d'après la formule de Taylor, on a

$$P = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \frac{P'''(0)}{6}X^3$$

d'où

$$P \in \ker f \iff P = P(0)(1 + X^2) + P'(0)(X + X^3)$$

Puisque $P(0)$ et $P'(0)$ peuvent prendre toutes les valeurs possibles, on en déduit que

$$\ker f = \text{Vect}(1 + X^2, X + X^3)$$

La famille $(1 + X^2, X + X^3)$ est libre (échelonnée en degré) et génératrice de $\ker f$, c'en est une base.

Pour $\text{Im } f$, on sait que

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$$

Or $f(1) = -X(1 - X^2)$, $f(X) = (1 - X^2)$, $f(X^2) = \frac{X}{2}(1 - X^2)$ et $f(X^3) = -\frac{1}{6}(1 - X^2)$ (il est bon de remarquer que si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ alors $a_0 = P(0)$, $a_1 = P'(0)$, $a_2 = \frac{P''(0)}{2}$ et $a_3 = \frac{P'''(0)}{6}$).
Ainsi

$$\text{Im } f = \text{Vect}(1 - X^2, X - X^3)$$

et $(1 - X^2, X - X^3)$ en est une base (même arguments).

Enfin

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(1 + X^2, X + X^3, 1 - X^2, X - X^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{de déterminant égal à } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_3 + C_1 & C_4 + C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16 \neq 0, \text{ ainsi } (1 + X^2, X + X^3, 1 - X^2, X - X^3)$$

est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ donc

$$E = \ker f \oplus \text{Im } f$$

3. On a $\ker f \neq \{\vec{0}\}$ et $\text{Im } f \neq E$, donc f n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice de khôlle 670

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) : x \longmapsto f(0) + f(1) \cos(\pi x) + f(2) \cos(2\pi x)$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$.
2. Donner une base de $\text{Im } \varphi$.

Solution : On définit g_1, g_2 et g_3 , fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, par $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = \cos(\pi x)$ et $g_3(x) = \cos(2\pi x)$ alors

$$\varphi(f) = f(0)g_1 + f(1)g_2 + f(2)g_3$$

1. La linéarité est alors évidente, si $(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\varphi(\lambda f_1 + f_2) = (\lambda f_1 + f_2)(0)g_1 + (\lambda f_1 + f_2)(1)g_2 + (\lambda f_1 + f_2)(2)g_3$$

Par linéarité de l'évaluation, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f_1 + f_2) &= (\lambda f_1(0) + f_2(0))g_1 + (\lambda f_1(1) + f_2(1))g_2 + (\lambda f_1(2) + f_2(2))g_3 \\ &= \lambda(f_1(0)g_1 + f_1(1)g_2 + f_1(2)g_3) + (f_2(0)g_1 + f_2(1)g_2 + f_2(2)g_3) \\ &= \lambda\varphi(f_1) + \varphi(f_2) \end{aligned}$$

2. Puisque $\varphi(f) = f(0)g_1 + f(1)g_2 + f(2)g_3$, on a $\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \varphi(f) \in \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$. Ceci prouve que $\text{Im } \varphi \subset \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$. Réciproquement, il suffit de montrer que g_1, g_2 et g_3 sont dans $\text{Im } \varphi$. Pour g_1 , il suffit de trouver $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$. Par exemple (penser polynôme, mais ce n'est pas la seule possibilité), si $f_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}$ (Lagrange), on a $\varphi(f_1) = g_1$. De même si $f_2(x) = \frac{x(x-2)}{1 \times (1-2)}$ et $f_3 = \frac{x(x-1)}{2 \times (2-1)}$ alors $\varphi(f_2) = g_2$ et $\varphi(f_3) = g_3$.

Conclusion, g_1, g_2 et g_3 sont dans $\text{Im } \varphi$ donc $\text{Vect}(g_1, g_2, g_3) \subset \text{Im } \varphi$ et par double inclusion

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$$

Enfin, pour avoir une base, montrons que (g_1, g_2, g_3) est une famille libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0 \text{ (la fonction nulle)}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 \cos(\pi x) + \lambda_3 \cos(2\pi x) = 0$$

Avec $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$ on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

système homogène de déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ donc qui admet une unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc libre et

(g_1, g_2, g_3) est une base de $\text{Im } \varphi$

Remarque : Pour $\ker \varphi$, on a $f \in \ker \varphi \iff f(0)g_1 + f(1)g_2 + f(2)g_3 = 0$, puisque (g_1, g_2, g_3) est libre, ceci équivaut à $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Ainsi

$$\ker \varphi = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f(0) = f(1) = f(2) = 0\}$$

Exercice de khôlle 671

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$$

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
2. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. L'application linéaire f est-elle injective? surjective?

Solution : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ainsi $f(X) = AX$.

1. Si $(X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY \text{ (linéarité à droite du produit matriciel)} \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \text{ ce qui prouve la linéarité} \end{aligned}$$

2. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} Y \in \operatorname{Im} f &\iff \exists X \in \mathbb{R}^3, f(X) = Y \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + 2y + z = b \end{cases} \text{ a au moins une solution} \xLeftrightarrow[L_2 - L_1] \begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = a \\ \boxed{y} - z = b - a \end{cases} \text{ a au moins une solution} \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Puis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = 0 \\ \boxed{y} - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3z \\ y = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \ker f = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Puisque $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ on peut affirmer que f est surjective, mais $\ker f \neq \{\vec{0}\}$ donc f n'est pas injective.

Exercice de khôlle 672

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f définie sur E par

$$\forall P \in E, f(P) = P(1)(X^2 + X + 1) + P(-1)(X + 1)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer son noyau et son image.
3. A-t-on $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$?
4. Si π est la projection sur $\operatorname{Im} f$ de direction $\ker f$, déterminer $\pi(P)$ pour $P \in E$.

Solution :

1. Si $P \in E$, puisque $P(1)$ et $P(-1)$ sont des scalaires, on en déduit que $f(P) \in E$ en tant que combinaison linéaire de $X^2 + X + 1$ et de $X + 1$ (qui sont dans E , et aussi parce que E est un espace vectoriel). Puis si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(1)(X^2 + X + 1) + (\lambda P + Q)(-1)(X + 1) \\ &= (\lambda P(1) + Q(1))(X^2 + X + 1) + (\lambda P(1) + Q(1))(X + 1) \\ &\quad \text{par linéarité de l'évaluation} \\ &= \lambda(P(1)(X^2 + X + 1) + P(-1)(X + 1)) + (Q(1)(X^2 + X + 1) + Q(-1)(X + 1)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire. C'est donc un endomorphisme de E .

2. Méthode ① : On fait les deux, soit $Q = aX^2 + bX + c \in E$ alors

$$Q \in \text{Im } f \iff \exists P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in E \text{ tel que } f(P) = Q$$

Puisque

$$\begin{aligned} f(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) &= (\alpha + \beta + \gamma)(X^2 + X + 1) + (\alpha - \beta + \gamma)(X + 1) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (2\alpha + 2\gamma)X + 2\alpha + 2\gamma \end{aligned}$$

On a (unicité de coefficients)

$$\begin{aligned} f(P) = Q &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ 2\alpha + 2\gamma = b \\ 2\alpha + 2\gamma = c \end{cases} \text{ a au moins une solutions} \\ &\iff b = c \iff Q = aX^2 + b(X + 1) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Im } f = \text{Vect}(X^2, X + 1)$. Puis, $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \ker f$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases}$ ce qui

donne $\gamma = -\alpha$ et $\beta = 0$, soit $P = \alpha(X^2 - 1)$. Conclusion $\ker f = \text{Vect}(X^2 - 1)$.

Méthode ② : On commence par $\ker f$. On a

$$P \in \ker f \iff P(1)(X^2 + X + 1) + P(-1)(X + 1) = 0$$

Par unicité de coefficients, cela équivaut à $P(1) = 0$ et $P(1) + P(-1) = 0$ d'où $P(1) = P(-1) = 0$. Ainsi $P \in \ker f$ si et seulement si 1 et -1 sont racines de P . Puisque $\deg P \leq 2$, on en déduit que $P = \lambda(X - 1)(X + 1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\ker f = \text{Vect}(X^2 - 1)$.

Puis on sait que $\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \text{Vect}(X^2 + 2X + 2, X^2, X^2 + 2X + 1) = \text{Vect}(X^2 + 2X + 1, X^2)$.

On a bien

$$\text{Vect}(X^2 + 2X + 2, X^2) = \text{Vect}(X^2, X + 1)$$

(Les générateurs de l'un sont dans l'autre!).

Remarque : ① En fait la famille $(X + 1, X^2 + X + 1)$ est libre car échelonnée en degré donc $P(1)(X^2 + X + 1) + P(-1)(X + 1) = 0$ implique $P(1) = P(-1) = 0$.

② Le polynôme $f(P)$ est une combinaison linéaire de $X^2 + X + 1$ et de $X + 1$ donc $\text{Im } f \subset \text{Vect}(X^2 + X + 1, X + 1)$.

De plus $f\left(\frac{X+1}{2}\right) = X^2 + X + 1$ et $f\left(\frac{1-X}{2}\right) = X + 1$ donc $\text{Vect}(X^2 + X + 1, X + 1) \subset \text{Im } f$ d'où l'égalité

$$\text{Im } f = \text{Vect}(X^2 + X + 1, X + 1).$$

3. On a vu que $\text{Im } f = \text{Vect}(X^2, X + 1)$, la famille $(X^2, X + 1)$ est libre (car échelonnée) et génératrice de $\text{Im } f$, donc en est une base. Le vecteur $X^2 - 1$ est libre (car non nul) et générateur de $\ker f$, il en forme une base. On sait alors que

$$E = \text{Im } f \oplus \ker f \iff (X^2, X + 1, X^2 - 1) \text{ base de } E$$

On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(X^2, X + 1, X^2 - 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant égal à 1 donc $(X^2, X + 1, X^2 - 1)$ est bien une base de E .

4. Soit $P = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in E$, on sait qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ unique tel que

$$P = \underbrace{aX^2 + b(X+1)}_{=\pi(P) \in \text{Im } f} + \underbrace{c(X^2-1)}_{\in \ker f}$$

Par unicité des coefficients on a

$$\begin{cases} a + c = \alpha \\ b = \beta \\ b - c = \gamma \end{cases} \quad \text{d'où } c = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \pi(P) &= P - \frac{\beta - \gamma}{2}(X^2 - 1) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma - \frac{\beta - \gamma}{2}(X^2 - 1) \\ &= \frac{2\alpha - \beta + \gamma}{2}X^2 + \beta X + \frac{\beta + \gamma}{2} \end{aligned}$$

Remarque : On peut remarquer que $\pi(X^2 - 1) = 0$, $\pi(X^2) = X^2$ et $\pi(X + 1) = X + 1$ ouf!

Exercice de khôlle 673

Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 4x - y \\ -2x + 2y + 3z \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Que vaut, pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $f^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$? En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et préciser $f^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
3. Soit $g = f - 3I$, déterminer $E = \ker(g)$ et $F = \text{Im}(g)$ où $I = Id_{\mathbb{R}^3}$.
4. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
5. Si p est la projection sur E et de direction F donner l'expression analytique de p .
6. Que valent $f \circ p$ et $p \circ f$?

Solution :

1. On a bien $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ («endo») et $f(X) = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si $(X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda X + Y) &= A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY \quad (\text{linéarité à droite du produit matriciel}) \\ &= \lambda f(X) + f(Y) \quad \text{ce qui prouve la linéarité («morphisme»)}. \end{aligned}$$

2. On a $A^2 = 9I_3$ d'où $f^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Puis $A \times \left(\frac{1}{9}A\right) = I_3$ prouve que A est inversible avec $A^{-1} = \frac{1}{9}A$ d'où, pour X et Y dans $\mathbb{R}^3$

$$Y = AX \iff X = \frac{1}{9}AY$$

ce qui prouve que f est bijective (d'où est un automorphisme) avec

$$f^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{9}f \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} a + 2b \\ 4a - b \\ -2a + 2b + 3c \end{pmatrix}$$

3. On a, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a $g(X) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 4x-y \\ -2x+2y+3z \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+2y \\ 4x-4y \\ -2x+2y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} X \in \ker g &\iff \begin{pmatrix} -2x+2y \\ 4x-4y \\ -2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } (x, z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Ainsi $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour $\text{Im}(g)$, le mieux est d'écrire que

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect} \left(g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi écrire que

$$\begin{aligned} Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im } g &\iff \exists X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+2y \\ 4x-4y \\ -2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -2x+2y = a \\ 4x-4y = b \\ -2x+2y = c \end{cases} \text{ a au moins une solution} \\ &\iff \begin{cases} -2x+2y = a \\ 0 = b+2a \\ 0 = c-a \end{cases} \text{ a au moins une solution} \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Im } g = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, b+2a = c-a = 0 \right\}$ (c'est bien une droite car intersection de deux plans).

4. Méthode ① : Par le théorème de la base adaptée. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de E et est libre car

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_e} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est de rang } 2 \\ \text{ou bien car } \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donne } \lambda = \mu = 0 \end{aligned}$$

donc est une base de E . Une base de F est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (elle est génératrice et libre, car un vecteur non nul est

libre). D'après le cours

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &= E \oplus F \iff \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \\ &\iff \det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (c'est le cas, il vaut 3)}\end{aligned}$$

Méthode ② : E est un hyperplan (c'est le noyau de $\varphi(x, y, z) = x - y$ qui est une forme linéaire non nulle), le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans E (il ne vérifie pas « $x - y = 0$ ») donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

5. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on sait qu'il existe α, β et γ trois réels tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $p + q = I$. On calcule γ avec les formules de Cramer pour avoir

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}(x - y)$$

D'où

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x - y \\ -2x + 2y \\ x - y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On est content de voir que si $X \in \mathbb{R}^3$ on a bien $q(X) = \vec{0}$. On pose $Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ pour avoir

$$\begin{aligned}p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= I - q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (I_3 - Q) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \text{où } P &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

6. Méthode ① : Si $X \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(f \circ p)(X) = A \times P \times X \text{ et } (p \circ f)(X) = P \times A \times X$$

On calcule $A \times P$ et $P \times A$ et on obtient $3P$ donc $f \circ p = p \circ f = 3p$.

Méthode ② : Si $X \in \mathbb{R}^3$ alors $p(X) \in \ker g$ donc $f(p(X)) - 3p(X) = \vec{0}$, ce qui donne bien $f \circ p = 3p$. Puis $f(X) - 3X = g(X) \in \text{Im } g = \ker p$ d'où

$$p(f(X) - 3X) = p \circ f(X) - 3p(X) = \vec{0}$$

ce qui donne bien $p \circ f = 3p$.

Exercice de khôlle 674

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que T définie par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], T(P) = P'' + \omega^2 P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $T(\tilde{1}), T(X), \dots, T(X^n)$ et en déduire que T est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
On a noté $\tilde{1}$ le polynôme constant égal à 1.
3. Montrer que l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = x^n$, d'inconnue $y \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, possède une unique solution polynomiale puis la résoudre.

Solution :

1. «Morphisme» : Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} T(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' + \omega^2 (\lambda P + Q) \\ &= \lambda P'' + Q'' + \omega^2 (\lambda P + Q) \quad (\text{linéarité de la dérivation}) \\ &= \lambda (P'' + \omega^2 P) + (Q'' + \omega^2 Q) = \lambda T(P) + T(Q) \end{aligned}$$

«Endo» : Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\deg P'' \leq \deg P - 2$ d'où $P'' \in \mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, la combinaison linéaire $P'' + \omega^2 P$ (les coefficients sont 1 et ω^2 , les vecteurs sont P'' et P) est dans $\mathbb{R}_n[X]$ (stabilité par combinaison linéaire). Bref $T(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a $T(\tilde{1}) = \omega^2 \times \tilde{1}$, $T(X) = \omega^2 X$ et si $k \geq 2$, $T(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + \omega^2 X^k$. En particulier, si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(T(\mathcal{B}_c)) = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \omega^2 & \ddots & k(k-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \omega^2 & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots & \omega^2 \end{pmatrix}$$

de déterminant égal à $(\omega^2)^{n+1} \neq 0$. Ainsi $(T(\tilde{1}), T(X), \dots, T(X^n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. L'image d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc T est un automorphisme.

Remarque : On peut aussi écrire que pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ on a $\deg(T(X^k)) = k$. Ainsi, d'après le théorème de la base échelonnée, on en déduit que $(T(\tilde{1}), T(X), \dots, T(X^n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Une solution particulière de l'équation différentielle est donc la fonction polynomiale associée à $T^{-1}(X^n)$ que l'on note, abusivement, $T^{-1}(x^n)$ (on devrait la noter $T^{-1}(X^n)(x)$) et les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + T^{-1}(x^n) \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}$$

Exercice de khôlle 675

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f définie sur E par

$$\forall P \in E, f(P) = P(2) + P'(2)X + P(2)X^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. A-t-on $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$?

Solution : Avant tout $f(P) \in \mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_3[X]$ (c'est le «endo»). et $f(P) = P(2) \times (1 + X^2) + P'(2)X$

1. Soient $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, si $R = \lambda P + Q$, par linéarité de l'évaluation on a $R(2) = \lambda P(2) + Q(2)$, puis par linéarité de la dérivation (que l'on compose avec l'évaluation), on a $R'(2) = \lambda P'(2) + Q'(2)$ ainsi

$$\begin{aligned} f(R) &= (\lambda P(2) + Q(2))(1 + X^2) + (\lambda P'(2) + Q'(2))X \\ &= \lambda(P(2)(1 + X^2) + P'(2)X) + (Q(2)(1 + X^2) + Q'(2)X) \end{aligned}$$

(Par distributivité, ou mieux linéarité à droite du produit de polynômes). Ainsi f est une application linéaire de E dans E donc un endomorphisme.

2. On sait que $P \in \ker f \iff f(P) = P(2)(1 + X^2) + P'(2)X = 0 \iff P(2) = P'(2) = 0$ (en considérant les coefficients). Ainsi

$$P \in \ker f \iff 2 \text{ est racine double de } P \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = (X - 2)^2 Q$$

Puisque $\deg P \leq 3$, on a $\deg Q \leq 1$, et Q est de la forme $Q = aX + b$. Conclusion

$$\begin{aligned} P &\in \ker f \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X - 2)^2 (aX + b) = aX(X - 2)^2 + b(X - 2)^2 \\ \text{d'où } \ker f &= \operatorname{Vect}((X - 2)^2, X(X - 2)^2) \end{aligned}$$

Pour l'image :

Méthode ① :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \operatorname{Vect}(X^2 + 1, 2X^2 + X + 2, 4X^2 + 4X + 4, 8X^2 + 12X + 8)$$

Mais ce n'est pas super joli, car on se doute qu'il y a des vecteurs en trop.

Méthode ② : En fait $f(P) = P(2)(1 + X^2) + P'(2)X$ est une combinaison linéaire de X et $(1 + X^2)$ donc

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(X, 1 + X^2)$$

Réciproquement, puisque $f((X - 2)) = X$ et $f(1) = 1 + X^2$ on a $X \in \operatorname{Im} f, 1 + X^2 \in \operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{Vect}(X, 1 + X^2) \subset \operatorname{Im} f$ et par double inclusion

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X, 1 + X^2)$$

Méthode ② : Soit $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d$ alors $Q \in \operatorname{Im} f$ si et seulement s'il existe P tel que

$$f(P) = P(2)(1 + X^2) + P'(2)X = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

Par unicité des coefficients, ceci équivaut à

$$\begin{cases} P(2) = d \\ P'(2) = c \\ P(2) = b \\ 0 = a \end{cases} \iff \begin{cases} P(2) = d \\ P'(2) = c \\ 0 = b - d \\ 0 = a \end{cases}$$

Lorsque $a = b - d = 0$, le système a au moins une solution qui est $P = d + c(X - 2)^2$ (bah oui on écrit la formule de Taylor $P(X) = P(2) + P'(2)(X - 2)$ si $\deg P \leq 2$). Ainsi $Q = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \operatorname{Im} f \iff Q = b(X^2 + 1) + cX$ où $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X, 1 + X^2)$$

3. On a montré que $\ker f = \text{Vect} \left((X-2)^2, X(X-2)^2 \right)$, la famille $\mathcal{B}_k = \left((X-2)^2, X(X-2)^2 \right)$ est libre car échelonnée et engendre $\ker f$, c'est donc une base de $\ker f$. De la même manière, $\mathcal{B}_i = (X, 1+X^2)$ est une base de $\text{Im } f$. On sait que

$$E = \ker f \oplus \text{Im } f \iff \mathcal{C} = \mathcal{B}_k \cup \mathcal{B}_i = \left((X-2)^2, X(X-2)^2, X, 1+X^2 \right) \text{ est une base de } E$$

On écrit la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de E de la famille $\mathcal{C}$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut (on développe par rapport à la troisième colonne)

$$-\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Ainsi $\mathcal{C}$ est une base et $E = \ker f \oplus \text{Im } f$.

Exercice de khôlle 676

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n (que l'on identifie à $\mathbb{R}_n[X]$ car $\mathbb{R}$ est infini). Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note e_k le vecteur de $\mathcal{P}$ défini par $e_k(x) = x^k$. Pour $f \in \mathcal{P}$ on définit $u(f)$ et $v(f)$ par

$$u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin(t)) dt \text{ et } v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x \sin(t)) dt$$

Pour $p \in \mathbb{N}$ on pose $W_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^p dt$ et on admet que $(p+1)W_p W_{p+1} = \frac{\pi}{2}$.

1. Calculer $u(e_k)$ puis montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.
2. Calculer $v(e_k)$. On admet, et on ne demande pas de le vérifier que v est aussi un endomorphisme de $\mathcal{P}$.
3. Calculer $(u \circ v)(e_k)$ et $(v \circ u)(e_k)$, en déduire que u est un automorphisme de $\mathcal{P}$ et préciser u^{-1} .

Solution :

1. Simple calcul, $\frac{2}{\pi} \int_0^1 (x \sin(t))^k dt = \frac{2}{\pi} x^k \times \int_0^1 (\sin(t))^k dt = \frac{2W_k}{\pi} x^k$. Ainsi $u(e_k) = \frac{2W_k}{\pi} e_k$. Puis si $(f, g) \in \mathcal{P}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} u(\lambda f + g) &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (\lambda f + g)(x \sin(t)) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (\lambda f(x \sin(t)) + g(x \sin(t))) dt \text{ linéarité de l'évaluation} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \lambda f(x \sin(t)) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^1 g(x \sin(t)) dt \text{ linéarité de l'intégration} \\ &= \lambda u(f) + u(g) \end{aligned}$$

Pour finir si $f = \sum_{k=0}^n a_k e_k$ est un élément de $\mathcal{P}$, d'après ce qui précède $u(f) = \sum_{k=0}^n \frac{2W_k}{\pi} a_k e_k$. Ceci prouve que $u(f) \in \mathcal{P}$ dès que $f \in \mathcal{P}$ (endo) et la linéarité (morphisme).

2. On a

$$v(e_k)(x) = e_k(0) + \frac{\pi x}{2} u(e'_k)(x)$$

Si $k = 0$ alors $e_0(x) = 1$

$$v(e_0)(x) = 1 + \frac{\pi x}{2} u'(0) = 1 = e_0(x)$$

si $k \geq 1$ alors $e_k(0) = 0$ et $e'_k = k e_{k-1}$ d'où

$$v(e_k)(x) = \frac{\pi x}{2} u(k e_{k-1})(x) = \frac{\pi x}{2} \times \frac{2W_{k-1}}{\pi} k e_{k-1}(x) = k W_{k-1} e_k$$

3. On a donc pour $k = 0$

$$\begin{aligned} u(v(e_0)) &= u(e_0) = \frac{2W_0}{\pi} e_0 = e_0 \text{ car } W_0 = \frac{\pi}{2} \\ v(u(e_0)) &= v(e_0) = e_0 \end{aligned}$$

si $k \geq 1$

$$\begin{aligned} u(v(e_k)) &= u(k W_{k-1} e_k) = k W_{k-1} u(e_k) = k W_{k-1} \times \frac{\pi}{2} W_k e_k \\ &= \frac{\pi}{2} \times k W_k W_{k-1} e_k = e_k \text{ car } (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2} \\ v(u(e_k)) &= v\left(\frac{\pi}{2} W_k e_k\right) = \frac{\pi}{2} W_k v(e_k) = \frac{\pi}{2} W_k \times k W_{k-1} e_k = e_k \end{aligned}$$

Pour finir $u \circ v = v \circ u = Id_{\mathcal{P}}$ sur une base donc sur $\mathcal{P}$ montre que $u \circ v = v \circ u = Id_{\mathcal{P}}$.

19.2 Plus théoriques (des noyaux qui posent des pépins et des images)

Exercice de khôlle 677

Soient E un espace vectoriel et f, g deux endomorphismes de E . Montrer que :

1. $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f + g)$.
2. $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$.
3. $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
4. $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.

Solution : C'est un jeu de formulation et caractérisation !

1. Soit $x \in \ker f \cap \ker g$, alors $x \in \ker f$ donc $f(x) = \vec{0}$ (reformulation) et de même $x \in \ker g$ donc $g(x) = \vec{0}$.
Mais alors

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

d'où (caractérisation) $x \in \ker(f + g)$.

2. Soit $y \in \text{Im}(f + g)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (reformulation). On a $f(x) \in \text{Im } f$ et $g(x) \in \text{Im } g$ (caractérisation). Ainsi y est la somme d'un élément de $\text{Im } f$ et d'un élément de $\text{Im } g$ donc (caractérisation) est dans $\text{Im } f + \text{Im } g$.
3. Si $x \in \ker f$ alors $f(x) = \vec{0}$ d'où $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ (car g est linéaire) d'où $x \in \ker(g \circ f)$.
4. Si $y \in \text{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x))$. Ainsi $y = g(z)$ où $z = f(x) \in E$ donc est dans $\text{Im } g$.

Exercice de khôlle 678

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, montrer que $g \circ f$ surjective $\iff \text{Im } g = G$ et $F = \text{Im } f + \ker g$.

Solution : Sens $\implies$: Hypothèse : $g \circ f$ surjective.

Montrons que $\text{Im } g = G$. On a $\text{Im } g \subset G$ (par définition). Réciproquement, soit $z \in G$, puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$ où $y = f(x) \in F$ donc $z \in \text{Im } g$. Ceci prouve que $G \subset \text{Im } g$ et par double inclusion $G = \text{Im } g$.

Remarque : En fait, $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$ est toujours vrai. Si $g \circ f$ est surjective, on a $G = \text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g \subset G$.

Montrons que $F = \text{Im } f + \ker g$. Puisque $\text{Im } f$ et $\ker g$ sont des sous-espaces vectoriels de F , on a $\text{Im } f + \ker g \subset F$. Réciproquement, soit $y \in F$, alors $z = g(y) \in G$. Mais puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que

$$z = g(y) = g \circ f(x)$$

d'où

$$g(y) - g(f(x)) = g(y - f(x)) = 0$$

Ainsi $y - f(x) \in \ker g$ et

$$y = \underbrace{f(x)}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{y - f(x)}_{\in \ker g} \in \text{Im } f + \ker g$$

ce qui prouve que $F \subset \text{Im } f + \ker g$ et par double inclusion, $F = \text{Im } f + \ker g$.

Sens $\impliedby$: Hypothèse : $\text{Im } g = G$ et $F = \text{Im } f + \ker g$. Il s'agit de prouver que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$, alors $z \in \text{Im } g$ donc il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Mais $y \in F$ donc puisque $F = \text{Im } f + \ker g$, il existe $y_1 \in \text{Im } f$ et $k \in \ker g$ tels que $y = y_1 + k$. Puisque $y_1 \in \text{Im } f$, il existe $x \in E$ tel que $y_1 = f(x)$. Ainsi

$$z = g(y), y = f(x) + k \text{ où } k \in \ker g$$

$$\text{d'où } z = g(f(x) + k) = g(f(x)) + g(k) = g(f(x)) + \vec{0} = g \circ f(x) \in \text{Im } g \circ f$$

ce qui prouve la surjectivité de $g \circ f$.

Exercice de khôlle 679

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Im } f$ soit une droite vectorielle. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \mu f$.

Solution : L'hypothèse est qu'il existe $a \in E$, $a \neq \vec{0}$ tel que $\text{Im } f = \text{Vect}(\vec{a})$. $\forall x \in E$, puisque $x \in \text{Vect}(a)$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x a$. Posons $\mu = \lambda_a$, on a alors $f^2(x) = f(\lambda_x a) = \lambda_x f(a) = \lambda_x \times \mu a = \mu(\lambda_x a) = \mu f(x)$. Ce qui prouve que $f^2 = \mu f$.

Exercice de khôlle 680

Soit E un espace vectoriel, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent, montrer que le noyau et l'image de l'un des deux endomorphismes f ou g est stable par l'autre.

Solution : Rappel : $A \subset E$ est stable par g si et seulement si, $\forall x \in A$, on a $g(x) \in A$. Par symétrie des rôles, montrons que $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g . Soit $x \in \ker f$ alors $f(x) = \vec{0}$ d'où $g(f(x)) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ (car g est linéaire). Mais $g \circ f = f \circ g$ donc

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \vec{0}$$

d'où $g(x) \in \ker f$. Ce qui prouve que $\ker f$ est stable par g .

Pour $\text{Im } f$, soit $y \in \text{Im } f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ainsi $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \text{Im } f$. Ce qui prouve que $\text{Im } f$ est stable par g .

Exercice de khôlle 681

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que

$$\ker f = \ker f^2 \iff \operatorname{Im} f \cap \ker f = \{\vec{0}\}$$

Solution : Sens $\implies$: On a $\{\vec{0}\} \subset \operatorname{Im} f \cap \ker f$ car $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont des SEV de E . Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$, alors $y \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a également $y \in \ker f$ donc $f(y) = \vec{0}$ d'où $f(f(x)) = f^2(x) = \vec{0}$, ainsi $x \in \ker f^2$. Par hypothèse, $\ker f^2 = \ker f$ d'où $y = f(x) = \vec{0}$. Conclusion $\operatorname{Im} f \cap \ker f \subset \{\vec{0}\}$ par double inclusion, $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{\vec{0}\}$.

Sens $\impliedby$: On a $\ker f \subset \ker f^2$ car si $x \in \ker f$ alors $f(x) = \vec{0}$ d'où $f^2(x) = f(f(x)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ (linéarité de f) ainsi $x \in \ker f^2$.

Réciproquement, soit $x \in \ker f^2$ alors $f(f(x)) = \vec{0}$ d'où $f(x) \in \ker f$. Mais $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \ker f = \{\vec{0}\}$, ce qui prouve que $f(x) = \vec{0}$ et ainsi $x \in \ker f$.

Exercice de khôlle 682

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $g \circ f$ injective $\iff \ker f = \{\vec{0}\}$ et $\operatorname{Im} f \cap \ker g = \{\vec{0}\}$.

Solution : Sens $\implies$: Hypothèse : $g \circ f$ injective.

On a $\{\vec{0}\} \subset \ker f$ et $\{\vec{0}\} \subset \operatorname{Im} f \cap \ker g$. Montrons les réciproques. Soit $x \in \ker f$ alors $f(x) = \vec{0}$ d'où $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ car g est linéaire, ainsi $x \in \ker(g \circ f)$. Mais $g \circ f$ injective donc $\ker(g \circ f) = \{\vec{0}\}$, d'où $x = \vec{0}$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$, alors $y \in \operatorname{Im} f$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $y \in \ker g$, on en déduit que $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = \vec{0}$ d'où $x \in \ker(g \circ f) = \{\vec{0}\}$. Ainsi $x = \vec{0}$, mais alors $y = f(\vec{0}) = \vec{0}$, qed.

Exercice de khôlle 683

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n$$

Solution : Il me semble qu'une récurrence s'impose. On définit donc $\mathcal{P}(n) = \ll f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n \gg$. Par hypothèse, $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang n fixé, on a (HR_n) $f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n$. D'où

$$f \circ (f^n \circ g - g \circ f^n) = f \circ (n f^n)$$

d'où

$$f \circ f^n \circ g - f \circ g \circ f^n = n f \circ f^n$$

Remarque : On a utilisé le fait que si f, g et h sont dans $\mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $f \circ (g - h) = f \circ g - f \circ h$ et $f \circ (\lambda g) = \lambda f \circ g$. Il faut bien comprendre que ces propriétés sont vraies car f est linéaire. En effet si $x \in E$

$$\begin{aligned} (f \circ (g - h))(x) &= f((g - h)(x)) = f(g(x) - h(x)) \\ &= f(g(x)) - f(h(x)) \text{ par linéarité} \\ &= f \circ g(x) - f \circ h(x) \\ \text{et } f(\lambda g(x)) &= \lambda f(g(x)) \text{ par linéarité} \end{aligned}$$

Revenons à l'exercice, on a donc

$$f^{n+1} \circ g - (f \circ g) \circ f^n = n f^{n+1}$$

Mais par hypothèse, $f \circ g = g \circ f + f$ d'où

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ f^n &= (g \circ f + f) \circ f^n = g \circ f \circ f^n + f \circ f^n \\ &= g \circ f^{n+1} + f^{n+1} \end{aligned}$$

(et ici la linéarité n'intervient pas). Pour conclure

$$f^{n+1} \circ g - (g \circ f^{n+1} + f^{n+1}) = n f^{n+1} \text{ ce qui donne } f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = (n+1) f^{n+1}$$

et prouve $\mathcal{P}(n+1)$. Ceci termine la récurrence.

Exercice de khôlle 684

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = I$ où $I = Id_E$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
2. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires. Il est judicieux de poser $p = g \circ f$ (ce qui est judicieux, c'est le choix de la lettre p).
3. On suppose f injective, en déduire que f est un automorphisme de E et identifier f^{-1} .

Solution : On commence par monter les deux inclusions suivantes qui sont toujours vraies (donc ne se déduisent pas de $f \circ g = I$)

$$\textcircled{1} \quad \ker f \subset \ker(g \circ f) \text{ et } \textcircled{2} \quad \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$$

$\textcircled{1}$: Soit $x \in \ker f$ alors $f(x) = \vec{0}$ d'où $g(f(x)) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ ainsi $g \circ f(x) = \vec{0}$ d'où $x \in \ker(g \circ f)$.

$\textcircled{2}$: Soit $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z)$ où $z = f(x) \in E$ donc $y \in \operatorname{Im} g$.

1. Il s'agit donc, sous l'hypothèse $f \circ g = I$, de prouver

$$\textcircled{3} \quad \ker(g \circ f) \subset \ker f \text{ et } \textcircled{4} \quad \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$$

$\textcircled{3}$: Soit $x \in \ker(g \circ f)$ alors $g(f(x)) = \vec{0}$ d'où $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(g(f(x))) = (f \circ g) \circ f(x) = I \circ f(x) = f(x)$.

On en déduit que $x \in \ker f$.

$\textcircled{4}$: Soit $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Mais puisque $f \circ g = I$, on peut écrire que $f(g(x)) = x$ d'où $y = g(f(g(x))) = (g \circ f)(f(x)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

2. Cela revient à prouver que $\ker(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f)$ le sont. Posons $p = g \circ f$ (car **p**rojecteur commence par la lettre **p**), par associativité de la composition d'endomorphismes on a

$$p \circ p = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ I \circ f = g \circ f = p$$

Ainsi p est un projecteur et on sait alors que $\ker p \oplus \operatorname{Im} p = E$, c'est gagné!

3. Si f est injective alors $\ker f = \ker p = \left\{ \vec{0} \right\}$, mais alors $p = I$ (cf. remarque infra pour s'en convaincre). On a donc $f \circ g = g \circ f = I$ d'où f est un automorphisme avec $f^{-1} = g$.

Remarque : Soit $x \in E$, puisque $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$, il existe $a \in \ker p$ et $b \in \operatorname{Im} p$ tels que $x = a + b$. Si $\ker p = \left\{ \vec{0} \right\}$, on a donc $a = \vec{0}$ et $b = x \in \operatorname{Im} p$ donc $p(x) = x$ (car $p|_{\operatorname{Im} p} = Id_{\operatorname{Im} p}$). Donc $p = I$ (et $\operatorname{Im} p = E$).

Exercice de khôlle 685

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, montrer que $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

Solution : Par double inclusion :

Sens $\subset$: Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$, il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$. Puisque $y = f(x)$ on a $y \in \operatorname{Im} f$. Reste à montrer que $y \in \ker g$. On a $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$, mais $x \in \ker(g \circ f)$ donc $g(y) = g \circ f(x) = \vec{0}$. Ainsi $y \in \ker g \cap \operatorname{Im} f$.

Sens $\supset$: Soit $y \in \ker g \cap \operatorname{Im} f$ alors $y \in \operatorname{Im} f$ et $y \in \ker g$. Puisque $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puis $y \in \ker g$ donc $g(y) = g \circ f(x) = \vec{0}$. Mais alors $x \in \ker(g \circ f)$ et ainsi $y = f(x) \in f(\ker(g \circ f))$ (l'élément y est l'image par f d'un élément de $\ker(g \circ f)$).

Exercice de khôlle 686

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, montrer que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im}(f + g)$.

Solution : Par double inclusion.

Sens $\subset$: Soit $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, il existe $u \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \operatorname{Im} g$ tel que $x = u + v$. Puisque $u \in \operatorname{Im} f$, il existe $a \in E$ tel que $u = f(a)$ et de même, il existe $b \in E$ tel que $v = g(b)$. Mais alors

$$\begin{aligned} x &= f(a) + g(b) = f(a) - f(b) + f(b) + g(b) \\ &= f(a - b) + (f + g)(b) \quad (\text{linéarité de } f) \end{aligned}$$

Puisque $f(a - b) \in \operatorname{Im} f$ et $(f + g)(b) \in \operatorname{Im}(f + g)$ on a bien $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im}(f + g)$.

Sens $\supset$: C'est plus simple, si $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im}(f + g)$ alors il existe $(a, b) \in E^2$ tels que

$$x = f(a) + (f + g)(b) = f(a) + f(b) + g(b) = f(a + b) + g(b)$$

d'où $x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

Exercice de khôlle 687

Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ qui commutent.

On suppose que $E = \ker f + \ker g$, montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker g$ et $\operatorname{Im} g \subset \ker f$.

Solution : Par symétrie des rôles, on ne montre que $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On cherche à prouver que $y \in \ker g$, i.e. que $g(y) = \vec{0}$.

Puisque $E = \ker f + \ker g$, il existe $a \in \ker f$ et $b \in \ker g$ tels que $x = a + b$. Mais alors

$$\begin{aligned} y &= f(a + b) \underset{f \text{ linéaire}}{=} f(a) + f(b) \underset{a \in \ker f}{=} f(b) \\ g(y) &= g(f(b)) = (g \circ f)(b) \underset{g \circ f = f \circ g}{=} (f \circ g)(b) = f(g(b)) \underset{b \in \ker g}{=} f(\vec{0}) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \vec{0} \end{aligned}$$

Conclusion $\forall y \in \operatorname{Im} f$, on a $g(y) = \vec{0}$ ce qui se traduit par $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Exercice de khôlle 688

(★) Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

On suppose que $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$, montrer que $E = \ker f + \ker g$.

Solution : **Solution longue où l'on décortique la démarche :**

Sous les hypothèses, on cherche à montrer que tout vecteur $u \in E$ se décompose en une somme d'un vecteur de $\ker f$ et d'un vecteur de $\ker g$. L'hypothèse signifie que ① $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et que ② $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\vec{0}\}$.

Que peut bien signifier ①? Si $y \in \text{Im}(f+g)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{g(x)}_{\in \text{Im } g}$, ainsi $y \in$

$\text{Im } f + \text{Im } g$. Ainsi, $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ n'est pas une hypothèse du problème, car c'est toujours vérifié! Donc ① doit se lire $\text{Im } f + \text{Im } g \subset \text{Im}(f+g)$. Soit $z \in \text{Im } f + \text{Im } g$, alors il existe $y_1 \in \text{Im } f$ et $y_2 \in \text{Im } g$ tels que $z = y_1 + y_2$. Puis, il existe $(a, b) \in E^2$ tels que $y_1 = f(a)$ et $y_2 = g(b)$. Et ① signifie que si $z = f(a) + g(b)$ alors $z \in \text{Im}(f+g)$ donc il existe $x \in E$ tel que $z = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Au final $z = f(a) + g(b) = f(x) + g(x)$ ce qui donne $f(a) - f(x) = g(x) - g(b)$ i.e

$$f(a-x) = g(x-b)$$

Mais puisque $f(a-x) \in \text{Im } f$ et $g(x-b) \in \text{Im } g$, on en déduit que ces deux éléments sont dans $\text{Im } f \cap \text{Im } g$. Et voici à quoi sert ②, à en déduire que $f(a-x) = g(x-b) = \vec{0}$ donc que $a-x \in \ker f$ et $x-b \in \ker g$.

Reste à bien choisir a et b pour «fabriquer» u à l'aide de $a-x$ et $x-b$, sachant que l'on peut choisir a et b , mais pas x ! Le plus simplement du monde, $a = 2u$ et $b = u$, pour avoir $u = (2u-x) + (x-u)$!

Solution mathématique sortie d'un chapeau :

Soit $u \in E$, et $z = f(2u) + g(u)$ alors $z \in \text{Im } f + \text{Im } g$ donc, d'après ①, $z \in \text{Im}(f+g)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Mais alors $z = f(2u) + g(u) = f(x) + g(x)$ donne $f(2u-x) = g(x-u)$. On en déduit que $f(2u-x)$ et $g(x-u)$ sont dans $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \{\vec{0}\}$ donc sont nuls. Ceci permet d'affirmer que $2u-x \in \ker f$ et $x-u \in \ker g$. Enfin

$$u = (2u-x) + (x-u) \in \ker f + \ker g$$

Remarque : Bien sûr le choix proposé pour a et b n'est pas unique.

Exercice de khôlle 689

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^7 = f$, montrer que $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

Solution : La somme est directe. Soit $y \in \text{Im } f \cap \ker f$.

$$\begin{aligned} y &\in \text{Im } f \iff \exists x \in E, y = f(x) \\ y &\in \ker f \iff f(y) = \vec{0} \end{aligned}$$

On en déduit que $f(f(x)) = f^2(x) = \vec{0}$ puis que $y = f(x) = f^7(x) = f^5(f^2(x)) = f^5(\vec{0}) = \vec{0}$ (car $f^5 \in \mathcal{L}(E)$). Ainsi $\text{Im } f \cap \ker f \subset \{\vec{0}\}$, la réciproque étant évidente, la somme est directe.

La somme remplit l'espace. Soit $x \in E$ alors $f - f^7 = f \circ (Id - f^6) = 0$ d'où $\text{Im}(Id - f^6) \subset \ker f$ (on peut aussi écrire que $f(x - f^6(x)) = f(x) - f^7(x) = \vec{0}$). Ainsi

$$x - f^6(x) \in \ker f$$

Mais $f^6(x) = f(f^5(x)) \in \text{Im } f$ et ainsi

$$x = \underbrace{(x - f^6(x))}_{\in \ker f} + \underbrace{f^6(x)}_{\in \text{Im } f} \in \ker f + \text{Im } f$$

D'où $E \subset \ker f + \text{Im } f$, l'inclusion réciproque est évidente d'où $E = \ker f + \text{Im } f$ et enfin

$$E = \ker f \oplus \text{Im } f$$

Exercice de khôlle 690

(★) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. Pour $f \in \mathcal{L}(F, G)$, on définit $V_f = \{x + f(x), x \in F\}$.

1. Montrer que V_f est un sous-espace vectoriel de $F + G$.
2. On suppose que F et G sont en somme directe.
 - (a) Montrer que V_f et G sont en somme directe.
 - (b) Montrer que $\varphi : F \longrightarrow V_f$ défini par $\varphi(x) = x + f(x)$ est un isomorphisme.
3. On suppose désormais que F et G sont supplémentaires.
 - (a) Montrer que V_f et G sont supplémentaires.
 - (b) Soit p la projection sur V_f et de direction G et p_F la projection sur F et de direction G . Pour $u \in E$, exprimer $p(u)$ à l'aide de p_F, φ et u .

Solution : Avant tout, rien, a priori, ne permet d'affirmer qu'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E admet un supplémentaire. C'est le cas si E est de dimension finie (c.f. chapitre 22) et dans ce cas le résultat démontré à la fin de cet exercice est évident. En revanche, en dimension infinie, l'existence de supplémentaire est lié à l'axiome du choix. Cet exercice prend donc sens uniquement en dimension infinie.

1. Un élément de V_f est de la forme $x + f(x)$ où $x \in F$ et $f(x) \in G$ car $f \in \mathcal{L}(F, G)$ donc est dans $F + G$. Ainsi $V_f \subset F + G$. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E , on a $\vec{0} \in F$. La linéarité de f permet d'assurer que $f(\vec{0}) = \vec{0}$ et ainsi $\vec{0} = \vec{0} + f(\vec{0}) \in V_f$. Ceci prouve que $V_f \neq \emptyset$. Puis soient $(y_1, y_2) \in V_f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On reformule, $y_1 \in V_f \iff \exists x_1 \in F$ tel que $y_1 = x_1 + f(x_1)$ et de même $\exists x_2 \in F$ tel que $y_2 = x_2 + f(x_2)$. Mais alors

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + y_2 &= \lambda x_1 + x_2 + \lambda f(x_1) + f(x_2) \underset{f \text{ linéaire}}{=} (\lambda x_1 + x_2) + f(\lambda x_1 + x_2) \\ &= x + f(x) \text{ où } x = \lambda x_1 + x_2 \in F \text{ car } (x_1, x_2) \in F, \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } F \text{ SEV} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda y_1 + y_2 \in V_f$. Conclusion V_f est un SEV de $F + G$.

2.

- (a) Soit $y \in V_f \cap G$, puisque $y \in V_f$, il existe $x \in F$ tel que $y = x + f(x)$. Mais alors

$$x = y - f(x) \in G \text{ car } y \in G \text{ et } f(x) \in G$$

d'où $x \in F \cap G = \{\vec{0}\}$ ce qui donne $x = \vec{0}$ puis $y = x + f(x) = \vec{0} + f(\vec{0}) = \vec{0}$. On a donc $V_f \cap G \subset \{\vec{0}\}$, l'inclusion réciproque étant évidente, la somme est directe.

- (b) On montre que φ est bien linéaire. C'est immédiat car si $(x_1, x_2) \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1 + x_2) &= (\lambda x_1 + x_2) + f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda x_1 + x_2 + \lambda f(x_1) + f(x_2) \\ &= \lambda \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \end{aligned}$$

Par construction même φ est surjective (un élément de V_f est de la forme $\varphi(x)$). Reste à prouver l'injectivité de φ . Soit $x \in F$ tel que $\varphi(x) = \vec{0}$ alors $x + f(x) = \vec{0}$ d'où $x = f(-x)$. Mais alors $x \in F$ et $x \in G$ (car $f(-x) \in G$) donc $x \in F \cap G = \{\vec{0}\}$ par hypothèse. Conclusion $\varphi(x) = \vec{0} \implies x = \vec{0}$, ce qui signifie que φ est injective. Au final φ est un isomorphisme.

3.

- (a) On a déjà montré que la somme $V_f + G$ est directe. Reste à prouver $E \subset V_f + G$ (car $V_f + G \subset E$ est évident). Bien sûr, il faut utiliser le fait que $E = F + G$! Soit $u \in E$, il existe $x \in F$ et $g \in G$ tel que $u = x + g$. Mais alors $x \in F$ donc $f(x)$ est bien défini

$$u = \underbrace{x + f(x)}_{\in V_f} + \underbrace{g - f(x)}_{\in G}$$

d'où $u \in V_f + G$. Conclusion $V_f \oplus G = E$.

- (b) Compte tenu de ce qui précède, $x = p_F(u)$ et $p(u) = \varphi(p_F(u))$.

Remarque : Attention $\varphi \circ p_F \neq p$ car $p : E \longrightarrow E$ alors que $\varphi \circ p_F : E \longrightarrow V_f$.

19.3 Hyperplans

Exercice de khôlle 691

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner un supplémentaire.

Solution : Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$, par linéarité de l'intégration $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ (φ est une forme linéaire). On constate que $F = \ker \varphi$ est donc un hyperplan de E , donc un sous-espace vectoriel de E . On sait (cours) que si $g \notin F$ alors

$$F \oplus \text{Vect}(g) = E$$

Par exemple $g = 1$ convient.

19.4 Projecteurs : cas pratiques

Exercice de khôlle 692

Soit $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit $f = 2p + q$ où $q = Id - p$, exprimer f^n à l'aide de p et q puis à l'aide de f et Id .

Solution :

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ainsi $p(X) = AX$ où $A = \frac{J}{3}$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ceci permet de prouver que p est bien linéaire par linéarité du produit matriciel. Puis $p(p(X)) = A^2X = AX$ car $J^2 = 3J$, d'où $p \circ p = p$. Conclusion, p est un projecteur.
2. La base du projecteur (l'espace sur lequel on projette) est $\text{Im } p$, la direction est $\ker p$. Si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\text{Im } p = \text{Vect}(p(\mathcal{B}_c)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{car } p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Puis}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker p \iff p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0$$

La direction est donc le plan (l'hyperplan) d'équation $x + y + z$, que l'on peut noter $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

3. Classique, on sait que $p \circ q = q \circ p = 0$ donc avec le binôme, si $n \geq 1$

$$f^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k p^k \circ q^{n-k} = 2^0 q^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k p^k \circ q^{n-k} + 2^n p^n$$

Mais si $k \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket$, $p^k \circ q^{n-k} = p^{k-1} \circ p \circ q \circ q^{n-k-1} = 0$ et puisque $p^2 = p$, $q^2 = q$, par récurrence immédiate, on a pour $n \geq 1$, $p^n = p$ et $q^n = q$. Conclusion

$$\forall n \geq 1, f^n = 2^n p + q$$

ce qui est encore vraie si $n = 0$ car $f^0 = I$. Enfin

$$\begin{aligned} f &= 2p + q = p + p + q = p + I \text{ d'où } p = f - I \text{ et } q = 2I - f \\ \text{ce qui donne } f^n &= 2^n (f - I) + 2I - f = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)I \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 693

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f définie sur E par

$$f(P(X)) = \frac{P(1) + P'(1)}{4} (X^2 + 1) - \frac{P(1) - P'(1)}{4} (X^2 - 3)$$

- Justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que $\text{Im } f \subset \text{Vect}(X^2 + 1, X^2 - 3)$.
- Calculer $f(X^2 + 1)$ et $f(X^2 - 3)$.
- En déduire que ① $\text{Im } f = \text{Vect}(X^2 + 1, X^2 - 3)$ et ② f est un projecteur de E .
- Déterminer la direction de f .

Solution :

- Pour $P \in E$, $\frac{P(1) + P'(1)}{4}$ et $-\frac{P(1) - P'(1)}{4}$ sont des réels, ainsi $f(P(X))$ est une combinaison linéaire de $(X^2 + 1)$ et de $(X^2 - 3)$. Ceci permet d'affirmer que $\text{Im } f \subset \text{Vect}(X^2 + 1, X^2 - 3) \subset E$. Reste à montrer la linéarité qui est immédiate en utilisant la linéarité de la dérivation. En effet, si $(P, Q) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \frac{(\lambda P + Q)(1) + (\lambda P + Q)'(1)}{4} (X^2 + 1) - \frac{(\lambda P + Q)(1) - (\lambda P + Q)'(1)}{4} (X^2 - 3) \\ &= \frac{\lambda P(1) + Q(1) + \lambda P'(1) + Q'(1)}{4} (X^2 + 1) - \frac{\lambda P(1) + Q(1) - \lambda P'(1) - Q'(1)}{4} (X^2 - 3) \\ &= \lambda \left(\frac{P(1) + P'(1)}{4} (X^2 + 1) - \frac{P(1) - P'(1)}{4} (X^2 - 3) \right) + \left(\frac{Q(1) + Q'(1)}{4} (X^2 + 1) - \frac{Q(1) - Q'(1)}{4} (X^2 - 3) \right) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

- Un simple calcul qui donne $f(X^2 + 1) = \frac{2+2}{4} (X^2 + 1) - \frac{2-2}{4} (X^2 - 3) = X^2 + 1$ et $f(X^2 - 3) = \frac{-2+2}{4} (X^2 + 1) - \frac{-2-2}{4} (X^2 - 3) = (X^2 - 3)$.

On en déduit que $X^2 + 1 \in \text{Im } f$ et $X^2 - 3 \in \text{Im } f$ donc $\text{Vect}(X^2 + 1, X^2 - 3) \subset \text{Im } f$ et par double inclusion, $\text{Vect}(X^2 + 1, X^2 - 3) = \text{Im } f$.

Enfin, si $P = \lambda(X^2 + 1) + \mu(X^2 - 3)$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(P) = \lambda f(X^2 + 1) + \mu f(X^2 - 3) = P$. Puisque

$$f(P) = \lambda(X^2 + 1) + \mu(X^2 - 3) \text{ où } \lambda = \frac{P(1) + P'(1)}{4} \text{ et } \mu = -\frac{P(1) - P'(1)}{4}$$

on a $\forall P \in E$, $f(f(P)) = f(P)$ d'où $f^2 = f$ et f est bien un projecteur.

3. Pour finir (la direction étant $\ker f$) en écrivant que

$$\begin{aligned} \frac{P(1) + P'(1)}{4} (X^2 + 1) - \frac{P(1) - P'(1)}{4} (X^2 - 3) &= \frac{P'(1)}{2} X^2 + \frac{4P(1) - 3P'(1)}{4} \\ P \in \ker f &\iff f(P) = 0 \iff \frac{P'(1)}{2} = \frac{4P(1) - 3P'(1)}{4} = 0 \iff P(1) = P'(1) = 0 \\ &\iff 1 \text{ est racine double de } P \end{aligned}$$

Mais $\deg P \leq 3$ donc 1 est racine double de P si et seulement s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P = (aX + b)(X - 1)^2$. On en déduit que

$$\ker f = \text{Vect} \left((X - 1)^2, X(X - 1) \right)$$

Exercice de khôlle 694

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \geq 3$ et $f : P \mapsto \frac{X^2 - 1}{2} P'' - XP' + P$.

- Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$. Que vaut $\ker f$? L'endomorphisme f est-il injectif?
- On suppose, dans cette question que $n = 3$ et on pose $h = f + 2I$ où $I = Id_E$.
 - Montrer que f est un projecteur. Préciser ses éléments caractéristiques.
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer h^n en fonction de f et de I .
 - Justifier que h est un automorphisme et préciser h^{-1} .

Solution :

- Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ d'où

$$\deg \left(\frac{X^2 - 1}{2} P'' \right) \leq n, \quad \deg(XP') \leq n$$

et ainsi

$$\deg(f(P)) \leq \max \left(\deg \left(\frac{X^2 - 1}{2} P'' \right), \deg(XP'), \deg P \right) \leq n$$

D'où le «endo» de endomorphisme. Puis la linéarité est simple car si $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \frac{X^2 - 1}{2} (\lambda P + Q)'' - X(\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q) \\ &= \frac{X^2 - 1}{2} (\lambda P'' + Q'') - X(\lambda P' + Q') + (\lambda P + Q) \quad (\text{linéarité de la dérivation}) \\ &= \lambda \left(\frac{X^2 - 1}{2} P'' - XP' + P \right) + \left(\frac{X^2 - 1}{2} Q'' - XQ' + Q \right) \quad (\text{distributivité ou ...}) \end{aligned}$$

Pour l'injectivité, on sait que cela équivaut à $\ker f = \{0\}$. Déterminer les éléments de $\ker f$ revient à résoudre

$$\frac{X^2 - 1}{2} P'' - XP' + P = 0$$

ce qui, a priori, n'est pas simple.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P \neq 0$ tel que $f(P) = 0$, soit d son degré alors

$$P = a_d X^d + Q \text{ où } Q \in \mathbb{R}_{d-1}[X] \quad (\text{avec la convention que } \mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\})$$

d'où

$$\begin{aligned} f(P) &= a_d f(X^d) + f(Q) = a_d \left(\frac{X^2-1}{2} d(d-1) X^{d-2} - X d X^{d-1} + X^d \right) + f(Q) \\ &= a_d \left(\frac{d(d-1)}{2} - d + 1 \right) X^d + f(Q) - d(d-1) a_d X^{d-2} \\ &= \frac{(d-1)(d-2)}{2} a_d X^d + R \text{ où } R = f(Q) - d(d-1) a_d X^{d-2} \end{aligned}$$

Puisque $f(Q) \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ et $d(d-1)a_d X^{d-2} \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, on a $\deg R < d$.

Conclusion, si $d \notin \{1, 2\}$, on a $\deg f(P) = \deg P$ donc $f(P) \neq 0$.

Si $\deg d \in \{1, 2\}$, on écrit $P = aX^2 + bX + c$ (avec $a \neq 0$ si $d = 2$, $a = 0$ et $b \neq 0$ si $d = 1$, mais cela ne sert à rien). Ainsi

$$f(P) = \frac{X^2-1}{2} \times 2a - X(2aX + b) + (aX^2 + bX + c) = c - a$$

d'où $f(P) = 0 \iff P = a(X^2 + 1) + bX$. Conclusion (puisque $n \geq 3$)

$$\ker f = \text{Vect}(X^2 + 1, X)$$

et ainsi f n'est pas injective.

2.

(a) On sait que

$$f \text{ projecteur} \iff f \circ f = f$$

Méthode ① : Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on calcule $f(f(P))$. On pose

$$Q = f(P) = \frac{X^2-1}{2} P'' - X P' + P$$

alors

$$f(Q) = \frac{X^2-1}{2} Q'' - X Q' + Q$$

avec

$$\begin{aligned} Q' &= X P'' + \frac{X^2-1}{2} P^{(3)} - P' - X P'' + P' = \frac{X^2-1}{2} P^{(3)} \\ Q'' &= X P^{(3)} + \frac{X^2-1}{2} P^{(4)} = X P^{(3)} \text{ car } \deg P \leq 3 \text{ d'où } P^{(4)} = 0 \end{aligned}$$

on a

$$f(Q) = \frac{X^2-1}{2} \times X P^{(3)} - X \times \frac{X^2-1}{2} P^{(3)} + Q = Q$$

Méthode ② : On pose $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ ainsi

$$\begin{aligned} f(P) &= \frac{X^2-1}{2} \times (6dX + 2c) - X(b + 2cX + 3dX^2) + (a + bX + cX^2 + dX^3) \\ &= (a - c) - 3dX + dX^3 \end{aligned}$$

Ainsi en posant $f(P) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$ où $\alpha = a - c$, $\beta = -3d$, $\gamma = 0$ et $\delta = d$ on a

$$f(f(P)) = (\alpha - \gamma) - 3\gamma X + \gamma X^3 = P$$

Méthode ③ (la méthode ② mais améliorée) : On sait que l'image d'une base définit un unique endomorphisme, ainsi pour montrer que $f \circ f = f$, il suffit de vérifier que c'est vrai sur une base.

Mais un calcul simple donne

$$f(1) = 1, f(X) = 0, f(X^2) = -1 \text{ et } f(X^3) = X^3 - 3X$$

d'où

$$\begin{aligned} f \circ f(1) &= f(1) = 1, f \circ f(X) = f(0) = 0, f \circ f(X^2) = f(-1) = -1 \\ \text{et } f \circ f(X^3) &= f(X^3 - 3X) = f(X^3) - 3f(X) = f(X^3) = X^3 - 3X \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ f(P) = f(P)$ pour $P \in \{1, X, X^2, X^3\}$ qui est une base d'om $f \circ f = f$.

Méthode ④ (la méthode ③ dans laquelle on découvre le cours Matrice II) : Si $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ et si base canonique $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(P)) = \begin{pmatrix} a-c \\ -3d \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P)$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mais alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f \circ f(P)) = A^2 \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P)$, un simple calcul donne

$A^2 = A$ et c'est fini.

Pour finir, on sait que l'on projette dans la direction de $\ker f = \text{Vect}(X^2 + 1, X)$ sur

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \text{Vect}(1, X^3 - 3X).$$

(b) Soit $g = I - f$ le projecteur associé à f , on sait que $f \circ g = g \circ f$ et ainsi (avec $I = f + g$)

$$h = f + 2I = 3f + 2g$$

d'où par le binôme (on peut !)

$$h^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \times 2^{n-k} \times f^k \circ g^{n-k} = 2^n g^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k \times 2^{n-k} f^k \circ g^{n-k} + 3^n f^n$$

Mais si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f^k \circ g^{n-k} = f^{k-1} \circ f \circ g \circ g^{n-k-1} = 0$ et puisque $f^2 = f$, $g^2 = g$, par récurrence immédiate, on a pour $n \geq 1$, $f^n = f$ et $g^n = g$. Conclusion

$$\forall n \geq 1, h^n = 3^n f + 2^n g = (3^n - 2^n) f + 2^n I$$

ce qui est encore vrai si $n = 0$ car $I = h^0$.

(c) Tentons de faire $n = -1$ dans la formule précédente ! Si $u = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) f + \frac{1}{2} I = -\frac{1}{6} f + \frac{1}{2} I$ alors

$$u \circ h = h \circ u = \left(-\frac{1}{6} f + \frac{1}{2} I\right) \circ (f + 2I) = -\frac{1}{6} f^2 - \frac{2}{6} f + \frac{1}{2} f + I = I \quad (f^2 = f)$$

Ce qui prouve que h est un automorphisme et que $u = h^{-1} = -\frac{1}{6} f + \frac{1}{2} I$.

Exercice de khôlle 695

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - 2y - 2z \\ 6x - 3y - 2z \\ 6x - 2y - 3z \end{pmatrix}$. Montrer que f est une symétrie vectorielle et donner ses éléments caractéristiques.

Solution : On écrit que $f(X) = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. La linéarité à droite du produit matriciel montre que f est linéaire (eh oui une symétrie vectorielle est, avant tout une application linéaire). Puis un calcul (simple) donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $f^2(X) = f(f(X)) = A(AX) = A^2X = X$, ce qui finit d'établir que f est une symétrie vectorielle. La base de la symétrie est $\ker(f - I)$ où $I = Id_{\mathbb{R}^3}$ et la direction est $\ker(f + I)$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f - I) \iff (A - I_3)X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 2y - 2z \\ 6x - 4y - 2z \\ 6x - 2y - 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résout donc le système $\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 0 \\ 6x - 4y - 2z = 0 \\ 6x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$. On a

$$\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 0 \\ 6x - 4y - 2z = 0 \\ 6x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Ainsi, la base est $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour la direction, on résout $(A + I_3)X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y - 2z \\ 6x - 2y - 2z \\ 6x - 2y - 2z \end{pmatrix}$ ce qui montre que la direction est

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 3x - y - z = 0 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Remarque : On a aussi $\ker(f - I) = \text{Im}(f + I)$. Si on pose $g = f + I$ alors $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y - 2z \\ 6x - 2y - 2z \\ 6x - 2y - 2z \end{pmatrix}$, on en déduit que

$$\text{Im}(f + I) = \text{Vect} \left(g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice de khôlle 696

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ -3x + 2y + z \\ -3x + y + 2z \end{pmatrix}$. Montrer que f est une projection vectorielle et donner ses éléments caractéristiques.

Solution : On écrit que $f(X) = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La linéarité à droite du produit matriciel montre que f est linéaire (eh oui une symétrie vectorielle est, avant tout une application linéaire). Puis un

calcul (simple) donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où $f^2(X) = f(f(X)) = A(AX) = A^2X = AX$, ce qui finit d'établir que f est une projection vectorielle. La base de la symétrie est $\text{Im } f = \ker(f - I)$ où $I = Id_{\mathbb{R}^3}$ et la direction est $\ker(f)$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f - I) \iff (A - I_3)X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + y + z \\ -3x + y + z \\ -3x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, -3x + y + z = 0 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base de la projection. De même

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff AX = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ -3x + 2y + z \\ -3x + y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 - L_2} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 - L_2} \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ y = z \end{cases} \iff x = y = z$$

Ainsi la direction de la projection est $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice de khôlle 697

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $A = X^2 + X + 1$. On définit f sur E par $f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par A .

1. Montrer que f est un projecteur de E .
2. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Solution : On peut avoir une double approche de cet exercice : simples calculs ou en pensant à généraliser. On remarque que dès que l'on écrit

$$P = A \times Q + R \text{ où } \deg R < \deg A \text{ alors (par définition de } f) \text{ on a } R = f(P)$$

1. Avant tout $f(P)$ est bien défini car le reste est unique et est un bien un polynôme de degré au plus 1 (car le reste a un degré strictement plus petit que le diviseur B). Reste à montrer la linéarité et ensuite $f \circ f = f$.

Méthode ① (du calcul) : Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on pose la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} aX^3 + bX^2 + cX + d & X^2 + X + 1 \\ - \underline{aX^3 + aX^2 + aX} & \\ (b-a)X^2 + (c-a)X + d & \\ - \underline{[(b-a)X^2 + (b-a)X + (b-a)]} & \\ (c-b)X + a - b + d & = f(P) \end{array}$$

Ainsi f est définie par

$$f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = (c-b)X + a - b + d$$

Soient $P = a_1X^3 + b_1X^2 + c_1X + d_1$, $Q = a_2X^3 + b_2X^2 + c_2X + d_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= f((\lambda a_1 + a_2)X^3 + (\lambda b_1 + b_2)X^2 + (\lambda c_1 + c_2)X + (\lambda d_1 + d_2)) \\ &= ((\lambda c_1 + c_2) - (\lambda b_1 + b_2))X + (\lambda a_1 + a_2) - (\lambda b_1 + b_2) + (\lambda d_1 + d_2) \\ &= \lambda((c_1 - b_1)X + a_1 - b_1 + d_1) + ((c_2 - b_2)X + a_2 - b_2 + d_2) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que f est linéaire. Puis si on écrit

$$\begin{aligned} f(aX^3 + bX^2 + cX + d) &= (c-b)X + a - b + d = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta \\ \text{où } \alpha &= \beta = 0, \gamma = c - b \text{ et } \delta = a - b + d \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(f(P)) &= f(\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta) = (\gamma - \beta)X + \alpha - \beta + \delta \\ &= (c - b)X + a - b + d = f(P) \end{aligned}$$

Ainsi f est bien un projecteur.

Méthode ② (on a en tête une généralisation) : Soient $(P, Q) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les divisions euclidiennes de P et Q par A s'écrivent

$$\begin{aligned} P &= A \times Q_1 + f(P) \text{ où } \deg f(P) < \deg A \\ Q &= A \times Q_2 + f(Q) \text{ où } \deg f(Q) < \deg A \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda P + Q = A \times (\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda f(P) + f(Q))$. Puisque $\deg f(P) < \deg A$ et $\deg f(Q) < \deg A$, on a $\deg(\lambda f(P) + f(Q)) < \deg A$. Ainsi

$$\lambda P + Q = A \times (\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda f(P) + f(Q))$$

est la (unicité) division euclidienne de $\lambda P + Q$ par A . Par définition même de f , on en déduit que $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. Puis

$$f(P) = A \times 0 + f(P) \text{ avec } f(P) < \deg A$$

est la division euclidienne de $f(P)$ par A . Par définition de f , on a $f(f(P)) = f(P)$.

2. Méthode ① : On a montré que $f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = (c-b)X + a - b + d$ ainsi

$$\begin{aligned} P &= aX^3 + bX^2 + cX + d \in \ker f \iff f(P) = 0 \\ &\iff (c-b)X + (a-b+d) = 0 \text{ (le polynôme nul)} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{a} - b + d = 0 \\ \boxed{b} - c = 0 \end{cases} \iff b = c \text{ et } a = b - d = c - d \\ &\iff P = (c-d)X^3 + cX^2 + cX + d = c(X^3 + X^2 + X) + d(1 - X^3) \text{ où } (c, d) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff P \in \text{Vect}(X^3 + X^2 + X, 1 - X^3) \end{aligned}$$

Remarque : on est heureux de trouver des générateurs qui sont bien multiples de A (pourquoi?).

Pour l'image, on a pléthore de méthodes.

M-1 : On écrit que

$$\begin{aligned} Q &= \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta \in \text{Im } f \iff P = X^3 + bX^2 + cX + d \in E, f(P) = Q \\ &\iff \begin{cases} \boxed{a} - b + d = \delta \\ \boxed{b} - c = \gamma \\ 0 = \beta \\ 0 = \alpha \end{cases} \text{ a au moins une solution } \iff \alpha = \beta = 0 \\ &\iff Q = \gamma X + \delta \text{ où } (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 \iff Q \in \mathbb{R}_1[X] \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Im } f = \mathbb{R}_1[X]$.

M-2 : On sait que $\text{Im } f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$, un calcul simple donne $f(1) = 1$, $f(X) = X$, $f(X^2) = -X - 1$ et $f(X^3) = 1$. Ainsi $\text{Im } f = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.

M-3 : On sait que $\forall P \in E$, $f(P) \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $\text{Im } f \subset \mathbb{R}_1[X]$, mais puisque $1 = f(1)$ et $X = f(X)$, on a $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X) \subset \text{Im } f$. Par double inclusion, c'est fini.

Méthode ② : On a $f(P) = 0$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par A est nul, donc si et seulement si A divise P . Il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = A \times Q$. Puisque $\deg P \leq 3$ et $\deg A = 2$, on a $\deg Q \leq 1$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q = aX + b$ et ainsi

$$P(X) = a \times XA(X) + bA(X) = a(X^3 + X^2 + X) + b(X^2 + X + 1)$$

conclusion $\ker f = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X, X^2 + X + 1)$. Pour l'image, on fait comme avec M-3 (qui se généralise).

Exercice de khôlle 698

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $A \in E$ non nul, on définit f par $\forall P \in E, f(P) = A \times P'' - P$.

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que f est une symétrie de E si et seulement si A est unitaire et de degré 2.
3. Lorsque f est une symétrie, on pose $g = f + 2I$ où $I = Id_E$.
 - (a) Déterminer les éléments caractéristiques de f .
 - (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer g^n .
 - (c) Montrer que $g \in GL(E)$ et déterminer g^{-1} .
4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^2 + 1)y'' + y = 2x^2 + x + 4$$

Déterminer une solution particulière de (E) .

Solution :

1. Puisque $\deg P \leq 2$, on a $\deg P'' \leq \deg P - 2 \leq 0$ donc $\deg AP'' \leq 2$. Par stabilité de $\mathbb{R}_2[X]$ par combinaisons linéaires, $f(P) \in E$. Pour la linéarité, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= A(\lambda P + Q)'' - (\lambda P + Q) = A(\lambda P'' + Q'') - (\lambda P + Q) \\ &= \lambda(AP'' - P) + (AQ'' - Q) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation.

2. On a $f(f(P)) = A(f(P))'' - f(P)$, ainsi

$$\begin{aligned} f \text{ est une symétrie} &\iff \forall P \in E, f(f(P)) = P \\ &\iff \forall P \in E, A \times (f(P))'' = f(P) + P = A \times P'' \end{aligned}$$

Par intégrité de $\mathbb{R}_2[X]$, puisque $A \neq 0$, on a donc

$$f \text{ est une symétrie} \iff \forall P \in E, (f(P))'' - P'' = 0$$

Mais

$$\begin{aligned} f(P)' &= (AP'' - P)' = A'P'' + AP^{(3)} - P' = A'P'' - P' \quad (\text{car } \deg P \leq 2) \\ (f(P))'' &= (A'P'' - P')' = A''P'' + A'P^{(3)} - P'' = (A'' - 1)P'' \end{aligned}$$

Conclusion

$$f \text{ est une symétrie} \iff \forall P \in E, (A'' - 2)P'' = 0$$

Puisque P'' n'est pas toujours nul, cela équivaut à $A'' = 2$ donc $A = X^2 + \alpha X + \beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ i.e. A est unitaire et de degré 2.

3.

- (a) La direction de la symétrie est $\ker(f + I)$. On a $P \in \ker(f + I) \iff f(P) + P = 0 \iff AP'' = 0 \iff P'' = 0$ (intégrité car $A \neq 0$). La direction de la symétrie est donc $\mathbb{R}_1[X]$.

Pour la base, on sait qu'il s'agit de $\ker(f - I)$. On a $P \in \ker(f - I) \iff f(P) - P = 0 \iff AP'' = 2P$.

Il faut bien comprendre que P'' est un scalaire, donc si $P \in \ker(f - I)$, on a $P = \frac{P''}{2}A = \lambda A$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ donc $P \in \text{Vect}(A)$. Ceci prouve que $\ker(f - I) \subset \text{Vect } A$. Réciproquement, si $P = \lambda A$ alors $P'' = 2\lambda$ et $f(P) = 2\lambda A - \lambda A = P$, donc $\text{Vect}(A) \subset \ker(f - I)$ et par double inclusion $\ker(f - I) = \text{Vect}(A)$.

Remarque : On peut aussi écrire que $\ker(f - I) = \text{Im}(f + I)$ et que $f(P) + P = AP'' \in \text{Vect}(A)$ (toujours parce que $P'' \in \mathbb{R}$). Enfin, avec la théorie de la dimension, la conclusion sera plus rapide.

(b) On a deux méthodes :

Méthode ① : On écrit $g = f + 2I$ et on applique le binôme (on peut car $f \circ I = I \circ f = f$) en utilisant $f^2 = I$ donc

$$f^{2j} = I \text{ et } f^{2j+1} = f \text{ si } j \in \mathbb{N}$$

On a donc

$$\begin{aligned} g^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} f^k = \sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} 2^{n-2j} f^{2j} + \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} 2^{n-(2j+1)} f^{2j+1} \\ &= \left(\sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} 2^{n-2j} \right) I + \left(\sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} 2^{n-(2j+1)} \right) f \end{aligned}$$

Si on pose $A = \sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} 2^{n-2j}$ et $B = \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} 2^{n-(2j+1)}$ alors

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 1^k = (1+2)^n = 3^n \\ A - B &= \sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} 2^{n-2j} - \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} 2^{n-(2j+1)} \\ &= \sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} 2^{n-2j} (-1)^{2j} + \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} 2^{n-(2j+1)} (-1)^{2j+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k = (-1+2)^n = 1^n \end{aligned}$$

d'où $A = \frac{3^n + 1}{2}$ et $B = \frac{3^n - 1}{2}$. On obtient alors

$$g^n = \frac{3^n + 1}{2} I + \frac{3^n - 1}{2} f$$

Mais cela demande un peu de dextérité avec le binôme.

Méthode ② : On se souvient du cours qui, pour résumer, dit que tout est affaire de projections. On pose donc $p = \frac{f+I}{2}$ (pour que $f = 2p - I$) et $q = I - p = \frac{I-f}{2}$. On sait que $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p \circ q = q \circ p = 0$, $p + q = I$ et ainsi

$$g = f + 2I = 2p - I + 2I = p + I = 2p + p + q = 3p + q$$

Le binôme (possible) donne alors

$$g^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k p^k \circ q^{n-k}$$

Mais si $k \geq 1$ et $k \leq n-1$, on a

$$p^k \circ q^{n-k} = p^{k-1} \circ (p \circ q) \circ q^{n-1-k} = 0 \text{ car } p \circ q = 0$$

d'où

$$g^n = \binom{n}{0} 3^0 p^0 \circ q^{n-0} + \binom{n}{n} 3^n p^n \circ q^{n-n} = q^n + 3^n p^n$$

Pour $n \geq 1$, on a $p^n = p$ et $q^n = q$ d'où

$$\begin{aligned} g^n &= 3^n p + q \text{ qui s'avère encore valable si } n = 0 \\ &= 3^n \left(\frac{f+I}{2} \right) + \frac{I-f}{2} = \frac{3^n + 1}{2} I + \frac{3^n - 1}{2} f \end{aligned}$$

(c) Méthode ① : On a $g^2 = (f + 2I)^2 = f^2 + 4f + 4I = 4f + 5I = 4(f + 2I) - 3I = 4g - 3I$ d'où

$$g \circ \left(\frac{g - 4I}{-3} \right) = \left(\frac{g - 4I}{-3} \right) \circ g = I$$

ce qui permet d'affirmer que g est bijective (donc est un automorphisme de E , ce qui s'écrit $g \in GL(E)$) et que

$$g^{-1} = \frac{4I - g}{3} = \frac{2I - f}{3}$$

Méthode ② : On a vu que $g^n = \frac{3^n + 1}{2}I + \frac{3^n - 1}{2}f$, soyons fou et posons $n = -1$. Plus précisément, on pose

$$h = \frac{3^{-1} + 1}{2}I + \frac{3^{-1} - 1}{2}f = -\frac{f - 2I}{3}$$

On vérifie que $g \circ h = (f + 2I) \circ \left(-\frac{f - 2I}{3} \right) = -\frac{1}{3}(f^2 - 4I) = I = h \circ g$, ce qui permet d'affirmer que g est bijective et que $h = g^{-1}$.

4. On pose $A = X^2 + 1$, avec ce qui précède, si on cherche une solution particulière polynomiale de degré 2, cela revient à déterminer $P \in E$ tel que $g(P) = B$ où $B = 2X^2 + X + 4$, ce qui équivaut à

$$P = g^{-1}(B) = \frac{1}{3}(2B - f(B))$$

Un simple calcul donne $f(B) = (X^2 + 1) \times 4 - (2X^2 + X + 4) = 2X^2 - X$. Ainsi

$$g^{-1}(B) = \frac{1}{3}(2 \times (2X^2 + X + 4) - (2X^2 - X)) = \frac{2}{3}X^2 + X + \frac{8}{3}$$

et

$$y_p(x) = \frac{2}{3}x^2 + x + \frac{8}{3} \text{ est une solution particulière de } (E)$$

Exercice de khôlle 699

Soit $E = \{f \in D^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f^{(4)} = f\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Soit Δ définie sur E par $\Delta(f) = f'$.
 - (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
 - (b) Montrer que $S = \Delta^2$ est une symétrie de E .
 - (c) Déterminer ses éléments caractéristiques.

Solution :

1. On a bien $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, si $f = 0$ (la fonction nulle) alors f est dérivable 4 fois et $f^{(4)} = 0 = f$. Ainsi $f = 0$ est un élément de E qui n'est donc pas vide. Si $(f, g) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $h = \lambda f + g$. Puisque g et h sont dérivables 4 fois, il en est de même de h et par linéarité de la dérivation on a

$$h^{(4)} = (\lambda f + g)^{(4)} = \lambda f^{(4)} + g^{(4)} = \lambda f + g = h$$

car f et g sont dans E donc $f^{(4)} = f$ et $g^{(4)} = g$. Ceci prouve la stabilité par combinaisons linéaires et permet d'affirmer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- 2.

- (a) Si $f \in E$ alors f est dérivable et $f^{(4)} = f$, ceci permet d'affirmer que $f^{(4)}$ est dérivable donc que $f \in D^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ainsi $f' \in D^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f^{(5)} = (f')^{(4)} = (f^{(4)})' = f'$, ce qui prouve que $f' = \Delta(f) \in E$ (c'est le «endo» que l'on vient de prouver). Puis si $(f, g) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda f + g) = \lambda f' + g' = \lambda \Delta(f) + \Delta(g)$, ce qui prouve la linéarité de Δ .

En fait Δ est la restriction à E de la dérivation, la dérivation étant linéaire, il en est de même de Δ .

- (b) Soit $f \in E$ alors $\Delta(f) = f'$ d'où $\Delta(\Delta(f)) = f''$, mais alors

$$S^2(f) = S(S(f)) = (f'')' = f^{(4)} = f \text{ car } f \in E$$

On a donc $S^2 = Id_E$, ce qui caractérise les symétries.

- (c) La base de la symétrie est $\ker(S - Id_E)$ et la direction est $\ker(S + Id_E)$. On a

$$f \in S - Id_E \iff f'' = f$$

On connaît les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ (d'équation caractéristique $r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1) = 0$), ce sont les combinaisons linéaires de $\exp$ et $\frac{1}{\exp}$ (ou de $\cosh$ et $\sinh$). Ainsi

$$\ker(S - Id_E) = \text{Vect}\left(\exp, \frac{1}{\exp}\right) = \text{Vect}(\cosh, \sinh)$$

De même $f \in S + Id_E \iff f'' + f = 0$ (oscillateur harmonique) donc

$$\ker(S + Id_E) = \text{Vect}(\cos, \sin)$$

19.5 Projecteurs : cas théoriques

Exercice de khôlle 700

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . On note s_1 la symétrie de base F et de direction G et s_2 la symétrie de base G et de direction F . Que valent $s_1 + s_2$, $s_1 \circ s_2$?

Solution : Méthode ① : Soit p la projection sur F et de direction G et $q = I - p$ (où $I = Id_E$) la projection sur G et de direction F alors

$$s_1 = 2p - I \text{ et } s_2 = 2q - I$$

Ainsi

$$s_1 + s_2 = 2(p + q) - 2I = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

car $p + q = I$. Puis

$$s_1 \circ s_2 = (2p - I) \circ (2q - I) = 4p \circ q - 2p - 2q + I = I - 2(p + q) = -I$$

car $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Méthode ② : Soit $x \in E$ que l'on décompose, de manière unique, $x = x_F + x_G$ où $(x_F, x_G) \in F \times G$ alors

$$s_1(x) = x_F - x_G \text{ et } s_2(x) = -x_F + x_G \text{ d'où } s_1(x) + s_2(x) = \vec{0}$$

Ainsi $\forall x \in E$, $(s_1 + s_2)(x) = \vec{0}$ ce qui prouve que $s_1 + s_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Puis $s_1 \circ s_2(x) = s_1(-x_F + x_G) = -x_F - x_G = -x$, d'où $s_1 \circ s_2 = -I$.

Exercice de khôlle 701

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E qui commutent et $f = p \circ q$.

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Montrer que $\ker f = \ker p + \ker q$ et que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Solution : Avant tout, remarquons que $f = p \circ q = q \circ p$ car p et q commutent.

1. On a

$$\begin{aligned} f^2 &= f \circ f = (p \circ q) \circ (p \circ q) && \stackrel{\text{associativité de } \circ}{=} p \circ (q \circ p) \circ q \\ &\stackrel{p \circ q = q \circ p}{=} p \circ (p \circ q) \circ q && \stackrel{\text{associativité de } \circ}{=} (p \circ p) \circ (q \circ q) \\ &\stackrel{p^2=p \text{ et } q^2=q}{=} p \circ q = f \end{aligned}$$

Ainsi $f^2 = f$ donc f est bien un projecteur de E .

2. Pour le noyau : On montre que $\ker p + \ker q \subset \ker f$.
Soit $x \in \ker p + \ker q$, il existe $x_p \in \ker p$ et $x_q \in \ker q$ tel que

$$x = x_p + x_q$$

Ainsi, par linéarité de f ,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_p) + f(x_q) = q \circ p(x_p) + p \circ q(x_q) \\ &= q(\vec{0}) + p(\vec{0}) \text{ car } x_p \in \ker p \text{ et } x_q \in \ker q \\ &= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \text{ (car } p \text{ et } q \text{ sont linéaires donc } q(\vec{0}) = p(\vec{0}) = \vec{0}) \end{aligned}$$

d'où $x \in \ker f$. Ceci prouve que $\ker p + \ker q \subset \ker f$.

Réciproquement : Soit $x \in \ker f$ alors

$$f(x) = p(q(x)) = q(p(x)) = \vec{0}$$

donc $q(x) \in \ker p$ et $p(x) \in \ker q$. Mais on sait que

$$x - p(x) \in \ker p \text{ et } x - q(x) \in \ker q$$

car c'est la décomposition associée aux projecteurs

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker p} \text{ et de même avec } q$$

(on peut aussi écrire que $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = \vec{0}$ et $q(x - q(x)) = q(x) - q(q(x)) = \vec{0}$).
D'où

$$\begin{aligned} p(q(x) + x - p(x)) &= p(q(x)) + p(x - p(x)) = \vec{0} \\ \text{et } q(p(x) + x - q(x)) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ainsi $x_p = q(x) + x - p(x) \in \ker p$ et $x_q = p(x) + x - q(x) \in \ker q$. Enfin $x = \frac{x_p}{2} + \frac{x_q}{2} \in \ker p + \ker q$, ce qui prouve l'inclusion réciproque et par double inclusion que

$$\ker f = \ker p + \ker q$$

Pour l'image : Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ d'où avec $f = p \circ q = q \circ p$

$$y = p(q(x)) \in \operatorname{Im} p \text{ et } y = q(p(x)) \in \operatorname{Im} q$$

Ce qui prouve que $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors il existe $(a, b) \in E^2$ tels que $y = p(a) = q(b)$. On a alors

$$p(y) = p(p(a)) = p(a) = y \text{ et } p(y) = p \circ q(b) = f(b)$$

d'où $y = f(b) \in \operatorname{Im} f$. Ce qui termine l'inclusion réciproque et montre que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Exercice de khôlle 702

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E et p un projecteur de E . Montrer que

$$\ker(f \circ p) = \ker(p) \oplus (\ker f \cap \operatorname{Im} p)$$

Solution : Il y a deux choses à prouver. La somme $\ker p + (\ker f \cap \operatorname{Im} p)$ est directe et la somme $\ker p + (\ker f \cap \operatorname{Im} p)$ est égale à $\ker(f \circ p)$.

La somme est directe : On a $\ker p \cap (\ker f \cap \operatorname{Im} p) = (\ker p \cap \operatorname{Im} p) \cap \ker f$. Mais on sait (cours !) que

$$\ker p \cap \operatorname{Im} p = \left\{ \vec{0} \right\} \quad (\text{car } E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p)$$

d'où

$$\ker p \cap (\ker f \cap \operatorname{Im} p) = \left\{ \vec{0} \right\} \cap \ker f = \left\{ \vec{0} \right\} \quad \text{car } \left\{ \vec{0} \right\} \subset \ker f$$

La somme $\ker p + (\ker f \cap \operatorname{Im} p)$ est égale à $\ker(f \circ p)$: Par double inclusion.

Sens $\supset$: Soit $x \in \ker(p) \oplus (\ker f \cap \operatorname{Im} p)$ il existe $x_p \in \ker f$ et $y_p \in \ker f \cap \operatorname{Im} p$ tel que

$$x = x_p + y_p$$

Par linéarité de $f \circ$, on a

$$\begin{aligned} f \circ p(x) &= f \circ p(x_p) + f \circ p(y_p) \\ &= f(p(x_p)) + f(p(y_p)) \end{aligned}$$

Puisque $x_p \in \ker p$, on a $p(x_p) = \vec{0}$ et par linéarité de f , $f(p(x_p)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Puis $y_p \in \operatorname{Im} p$, il existe donc $z \in E$ tel que $y_p = p(z)$ d'où $p(y_p) = p^2(z) = p(z) = y_p$ (En fait il est bien connu que si $y \in \operatorname{Im} p$ alors $p(y) = y$). D'où

$$f(p(y_p)) = f(y_p) = \vec{0} \quad \text{car } y_p \in \ker f$$

Sens $\subset$: Soit $x \in \ker(f \circ p)$ alors $f(p(x)) = \vec{0}$. On a donc

$$p(x) \in \ker f \text{ or } p(x) \in \operatorname{Im} p \text{ donc } p(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} p$$

Enfin, on sait que l'on peut décomposer x sous la forme

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker p}$$

On pose $x_p = x - p(x) \in \ker f$ et $y_p = p(x) \in \ker f \cap \operatorname{Im} p$, ainsi $x \in \ker p + (\ker f \cap \operatorname{Im} p)$. Ce qui termine la preuve.

Exercice de khôlle 703

Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E . Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $(I + p)^n$ où $I = Id_E$?

Solution : Si q est le projecteur associé à p ($q = I - p$) alors $I + p = 2p + q$. Puisque $p \circ q = q \circ p = 0$, on peut appliquer le binôme. On a alors

$$(I + p)^n = (2p + q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2p)^k \circ (q)^{n-k}$$

Classiquement, si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a $p^k \circ q^{n-k} = p^{k-1} \circ (p \circ q) \circ q^{n-k-1} = 0$ d'où si $n \geq 1$

$$\begin{aligned}(I+p)^n &= \binom{n}{0} (2p)^0 \circ (q)^{n-0} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2p)^k \circ (q)^{n-k} + \binom{n}{n} (2p)^n \circ (q)^{n-n} \\ &= q^n + 2^n p^n = 2^n p + q \text{ car si } n \geq 1, p^n = p \text{ et } q^n = q \\ &= 2^n p + (I-p) = I + (2^n - 1)p\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 704

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E . On définit l'application Φ sur $\mathcal{L}(E, F)$ par

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \Phi(f) = f \circ s$$

1. Montrer que Φ est une symétrie de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. Soit F la base de la symétrie s et G sa direction. Que dire de la base et la direction de Φ ?

Solution :

1. Avant tout, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, puisque $s \in \mathcal{L}(E)$, on a $f \circ s \in \mathcal{L}(E, F)$ (en tant que composée d'applications linéaires). Puis on prouve que Φ est linéaire (i.e que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, F))$!). Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\Phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g) \circ s = \lambda f \circ s + g \circ s = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$$

ce qui montre la linéarité annoncée.

Puis pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\Phi(\Phi(f)) = \Phi(f) \circ s = (f \circ s) \circ s = f \circ (s \circ s) = f \circ Id_E = f \text{ car } s \circ s = id_E$$

Ce qui prouve que Φ est bien une symétrie de $\mathcal{L}(E, F)$.

2. On sait que

$$F = \ker(s - Id_E) = \text{Im}(s + Id_E) \text{ et } G = \ker(s + Id_E) = \text{Im}(s - Id_E)$$

La base de Φ est $\ker(\Phi + Id_{\mathcal{L}(E, F)})$, mais

$$\begin{aligned}f &\in \ker(\Phi - Id_{\mathcal{L}(E, F)}) \iff \Phi(f) - f = 0_{\mathcal{L}(E, F)} \iff f \circ s - f \circ Id_E = f \circ (s - Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E, F)} \\ &\iff \text{Im}(s - Id_E) \subset \ker f \iff G \subset \ker f\end{aligned}$$

La direction de Φ est $\ker(\Phi + Id_{\mathcal{L}(E, F)})$, mais

$$\begin{aligned}f &\in \ker(\Phi + Id_{\mathcal{L}(E, F)}) \iff \Phi(f) + f = 0_{\mathcal{L}(E, F)} \iff f \circ s + f \circ Id_E = f \circ (s + Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E, F)} \\ &\iff \text{Im}(s + Id_E) \subset \ker f \iff F \subset \ker f\end{aligned}$$

La base (resp. la direction) de Φ est donc constituée des applications linéaires de $\mathcal{L}(E, F)$ donc le noyau contient la direction (resp. la base) de s .

Exercice de khôlle 705

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . On note p la projection sur F de direction G et $q = I - p$ où $I = Id_E$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit l'affinité de base F et de direction λ , que l'on note f_λ par

$$f_\lambda = p + \lambda q$$

1. Reconnaître f_1 et f_{-1} .
2. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, simplifier $f_\lambda \circ f_\mu$ et $f_\mu \circ f_\lambda$. Que valent $f_\lambda \circ p$ et $p \circ f_\lambda$?
3. A quelle condition sur λ a-t-on $f_\lambda \in GL(E)$? (i.e. f_λ automorphisme de E). Préciser alors f_λ^{-1} .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer f_λ^n en fonction de p, q, λ et n .

Solution :

1. On a $f_1 = p + q = I$ et $f_{-1} = p - q$ est la symétrie de base F et de direction G (faites un dessin!).
2. On obtient

$$\begin{aligned} f_\lambda \circ f_\mu &= (p + \lambda q) \circ (p + \mu q) = p^2 + \lambda q \circ p + \mu p \circ q + \lambda \mu q^2 \\ &= p + \lambda \mu q = f_{\lambda \mu} \text{ car } p^2 = p, q^2 = q, p \circ q = q \circ p = 0 \end{aligned}$$

On ne refait surtout pas le calcul pour $f_\mu \circ f_\lambda$, mais on écrit que $f_{\lambda \mu} = f_{\mu \lambda}$ (commutativité du produit de réels!) et que $f_\mu \circ f_\lambda = f_{\mu \lambda}$ d'après le calcul précédent. Puis avec $p = f_0$ on a $f_\lambda \circ p = p \circ f_\lambda = f_0 = p$.

3. Si $\lambda \neq 0$, on constate que $f_\lambda \circ f_{\frac{1}{\lambda}} = f_{\frac{1}{\lambda}} \circ f_\lambda = I$ donc f_λ est bijective (donc est un automorphisme de E) et que $f_\lambda^{-1} = f_{\frac{1}{\lambda}}$. Mais attention, en aucun cas cela ne dit que si $\lambda = 0$, f_0 n'est pas bijective! Mais $f_0 = p$ et on est donc amené à se poser la question fondamentale : une projection (ou un projecteur) est-elle bijective? La réponse (qui n'est pas 42) est donnée par $\ker p = G$. Si $G \neq \{\vec{0}\}$ alors p n'est pas injective donc pas bijective. Si $G = \{\vec{0}\}$ alors $F = E$, en effet si $x \in E$, puisque $E = F \oplus G$, on sait que x se décompose (de manière unique) sous la forme $x = f + g$ où $f \in F$ et $g \in G$. Mais alors $g = \vec{0}$ et $x = f \in F$ donc $E \subset F$ (et comme $F \subset E$ est évident), on a $E = F$.

Conclusion :

Le seul projecteur bijectif est l'identité!

Pour résumer : f_λ est un automorphisme si $\lambda \neq 0$ d'inverse $f_\lambda^{-1} = f_{\frac{1}{\lambda}}$. Pour f_0 , si $G \neq \{\vec{0}\}$ alors f_0 n'est pas un automorphisme et si $G = \{\vec{0}\}$ (et $F = E$) alors $f_0 = I$ est un automorphisme avec $f_0^{-1} = f_0 = I$.

4. Surtout pas le binôme, eh oui! On a $f_\lambda \circ f_\lambda = f_{\lambda^2}$ (faire $\lambda = \mu$) et par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) = \ll f_\lambda^n = f_{\lambda^n} \gg$. C'est vrai si $n = 0$ car $f_\lambda^0 = I = f_1 = f_{\lambda^0}$ (valable même si $\lambda = 0$ car $0^0 = 1$), puis

$$f_\lambda^{n+1} = f_\lambda \circ f_\lambda^n \underset{H R_n}{=} f_\lambda \circ f_{\lambda^n} \underset{\ll \mu = \lambda^n \gg}{=} f_{\lambda \times \lambda^n} = f_{\lambda^{n+1}}$$

Exercice de khôlle 706

Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\vec{0}\}$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de E . On définit une relation $\vdash$ sur

$\mathcal{P}$ de la façon suivante : pour tous projecteurs $(p, q) \in \mathcal{P}^2$, $p \vdash q \iff p \circ q = q \circ p = p$. On note $I = Id_E$ et $\tilde{0}$ représente l'application qui à tout $x \in E$ associe le vecteur nul de E . On remarquera que I et $\tilde{0}$ sont dans $\mathcal{P}$.

Attention : p et q ne désignent pas (sauf si c'est précisé) des projecteurs associés !

1. Montrer que $\vdash$ vérifie les propriétés suivantes (on dit alors que $\vdash$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$) : $\forall (p, q, r) \in \mathcal{P}^3$

①	$p \vdash p$	(réflexivité)
②	$(p \vdash q \text{ et } q \vdash p) \iff p = q$	(antisymétrie)
③	$(p \vdash q \text{ et } q \vdash r) \implies p \vdash r$	(transitivité)

2. Pour $(p, q) \in \mathcal{P}^2$,

- (a) A-t-on toujours $p \vdash q$ ou $q \vdash p$?
 (b) Si $p \vdash q$, montrer que $q - p \in \mathcal{P}$.

3. Soit $(p, q) \in \mathcal{P}^2$, tels que $p \vdash q$.

- (a) Montrer que $\text{Im } p \subset \text{Im } q$ et $\ker q \subset \ker p$.
 (b) Etudier la réciproque (i.e. si les deux inclusions sont vraies, a-t-on $p \vdash q$?).

4. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$, on dit que $m \in \mathcal{P}$ (resp. $M \in \mathcal{P}$) minore (resp. majore) $\mathcal{A}$ si $\forall p \in \mathcal{A}$, $m \vdash p$ (resp. $p \vdash M$). Si m minore $\mathcal{A}$, on dit que m est un minorant de $\mathcal{A}$ et si de plus $m \in \mathcal{A}$, on dit que m est le minimum de $\mathcal{A}$. On définit de même la notion de majorant et de maximum.

Le minimum et le maximum de $\mathcal{A} = \mathcal{P}$ existent-ils ? Si oui, que valent-ils ?

5. Soient $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ tels que $p \circ q = q \circ p$.

- (a) Montrer que $p \circ q$ minore $\{p, q\}$ et que pour tout minorant m de $\{p, q\}$ on a $m \vdash p \circ q$ (Ainsi $p \circ q$ est le plus grand des minorants de p et q , on écrit alors $p \circ q = \inf \{p, q\}$).
 (b) Montrer que $p + q - p \circ q = \sup \{p, q\}$ (i.e. c'est le plus petit des majorants de $\{p, q\}$).

6. Montrer que $\text{Im}(\inf \{p, q\}) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$ et $\text{Im}(\sup \{p, q\}) = \text{Im } p + \text{Im } q$.

Solution :

1. ① Puisque p est un projecteur $p \circ p = p \circ p = p^2 = p$ d'où $p \vdash p$.
 ② Si $p = q$ on a bien (cf. ①) $p \vdash q$ et $q \vdash p$. Réciproquement si $p \vdash q$ et $q \vdash p$ alors

$$\begin{aligned} p &\vdash q \text{ d'où } p \circ q = q \circ p = p \\ q &\vdash p \text{ d'où } q \circ p = p \end{aligned}$$

ainsi $p = q$.

- ③ Si $p \vdash q$ et $q \vdash r$ alors $p \circ q = q \circ p = p$ et $q \circ r = r \circ q = q$. Mais alors

$$\begin{aligned} p \circ r &\stackrel{p=p \circ q}{=} (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) \stackrel{q \circ r = q}{=} p \circ q = p \\ \text{et } r \circ p &\stackrel{p=q \circ p}{=} r \circ (q \circ p) = (r \circ q) \circ p \stackrel{r \circ q = q}{=} q \circ p = p \end{aligned}$$

d'où $p \vdash r$.

2. (a) Non, par exemple si $p = Id$ alors $I \vdash q \iff I \circ q = q \circ I = I \iff q = I$ alors que $q \vdash I \iff q \circ I = I \circ q = q$ est toujours vrai. Ainsi $\tilde{0} \vdash I$ vrai alors que $I \vdash \tilde{0}$ faux. On dit que l'ordre n'est pas total (on ne peut pas toujours comparer deux éléments de $\mathcal{P}$).

Remarque : Est-ce bien sûr que $I \vdash \tilde{0}$ faux ? Pour cela, il faut et il suffit que $\tilde{0} \neq I$, donc que $E \neq \{\vec{0}\}$ (il existe alors au moins un vecteur $x \neq \vec{0}$ dans E et $I(x) = x \neq \tilde{0}(x) = \vec{0}$).

- (b) Si $p \vdash q$ alors p et q commutent donc $(q - p)^2 = q^2 - 2p \circ q + p^2$ (binôme). Avec $q^2 = q$, $p^2 = p$ et $p \circ q = p$ (car $p \vdash q$) on en déduit que $(q - p)^2 = q - p$ donc $q - p \in \mathcal{P}$ (c'est un projecteur).

3. (a) Si $p \vdash q$ alors $p \circ q = q \circ p = p$. Soit $y \in \text{Im } p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Mais $p = q \circ p$ donc $y = q(p(x)) \in \text{Im } q$.

Soit $x \in \ker q$ alors $q(x) = \vec{0}$ d'où $\vec{0} = p(\vec{0}) = p(q(x)) = p \circ q(x) = p(x)$, ainsi $x \in \ker p$.

Remarque : De manière générale, on a le résultat classique suivant sur les AL (et qu'il faut connaître) : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, où E, F, G sont trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors

$$\textcircled{1} \quad \ker f \subset \ker(g \circ f) \quad \text{et} \quad \textcircled{2} \quad \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$$

En effet :

$\textcircled{1}$: Soit $x \in \ker f$ alors $f(x) = \vec{0}$ d'où $g(f(x)) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ ainsi $g \circ f(x) = \vec{0}$ d'où $x \in \ker(g \circ f)$.

$\textcircled{2}$: Soit $y \in \text{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z)$ où $z = f(x) \in F$ donc $y \in \text{Im } g$.

- (b) Réciproquement : Si $\text{Im } p \subset \text{Im } q$. Quel que soit $x \in E$, on a $q(p(x)) = p(x)$ car $p(x) \in \text{Im } q$ (et $q|_{\text{Im } q} = \text{Id}_{\text{Im } q}$). Donc $q \circ p = p$.

Si $\ker q \subset \ker p$. Quel que soit $x \in E$, on dispose de la décomposition

$$x = q(x) + \underbrace{(x - q(x))}_{\in \ker q}$$

Par linéarité de p , on en déduit que $p(x) = p(q(x)) + p(x - q(x)) = p \circ q(x)$ car $x - q(x) \in \ker q \subset \ker p$ donc est dans $\ker p$. Ainsi $p \circ q = p$.

4. Il semble que oui et que $\min \mathcal{A} = \tilde{0}$ et $\max \mathcal{A} = \text{Id}$. En effet (on l'a déjà montré), $\forall q \in \mathcal{P}$, $\tilde{0} \vdash q$ est vrai car $\tilde{0} \circ q = q \circ \tilde{0} = \tilde{0}$ (pour se convaincre, si $x \in E$, $\tilde{0} \circ q(x) = \tilde{0}(q(x)) = \vec{0}$ et $q \circ \tilde{0}(x) = q(\tilde{0}(x)) = q(\vec{0}) = \vec{0}$ par linéarité).

Et $\forall p \in \mathcal{P}$, on a $p \vdash I$ est vrai car $p \circ I = I \circ p = p$.

5. (a) Posons $r = p \circ q = q \circ p$, il s'agit de montrer que $r \vdash p$ et $r \vdash q$. On a

$$r \circ p = q \circ p \circ p = q \circ p^2 = q \circ p = r \quad \text{et} \quad p \circ r = p \circ p \circ q = p^2 \circ q = p \circ q = r$$

Puis par symétrie des rôles de p et q , on a aussi $r \vdash q$. Soit m un minorant de $\{p, q\}$, donc $m \in \mathcal{P}$ tel que $m \vdash p$ et $m \vdash q$. On a

$$\begin{aligned} m \circ r &= (m \circ p) \circ q \underset{\text{car } m \vdash p}{=} m \circ q \underset{\text{car } m \vdash q}{=} m \\ r \circ m &= p \circ (q \circ m) \underset{\text{car } m \vdash q}{=} p \circ m \underset{\text{car } m \vdash p}{=} m \end{aligned}$$

Et c'est pas fini ! Eh oui, il n'est jamais dit que r est un projecteur ! Il faut (avant tout) le prouver. C'est simple car

$$r \circ r = (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q \underset{p \circ q = q \circ p}{=} p \circ (p \circ q) \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q = r$$

- (b) On ne se fait pas avoir deux fois. On montre déjà que $s = p + q - q \circ p$ est bien un projecteur. Simple car

$$\begin{aligned} s \circ s &= (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p) \\ &= p^2 + p \circ q - p \circ q \circ p + q \circ p + q^2 - q^2 \circ p - q \circ p^2 - q \circ p \circ q + (q \circ p) \circ (q \circ p) \end{aligned}$$

En utilisant $p \circ q = q \circ p$ (ce qui revient à commuter à loisir) puis $p^2 = p$ et $q^2 = q$, on obtient

$$\begin{aligned} s^2 &= p^2 + p \circ q - p^2 \circ q + p \circ q + q^2 - p \circ q^2 - q \circ p^2 - p \circ q^2 + q^2 \circ p^2 \\ &= p + q - q \circ p = s \end{aligned}$$

Puis on vérifie que

$$\begin{aligned} p \circ s &= p \circ (p + q - q \circ p) = p^2 + p \circ q - p \circ q \circ p = p \\ s \circ p &= (p + q - q \circ p) \circ p = \dots = p \end{aligned}$$

d'où $p \vdash s$ et par symétrie des rôles $q \vdash s$. Enfin si $p \vdash m$ et $q \vdash m$ alors

$$\begin{aligned} m \circ s &= m \circ (p + q - q \circ p) = \underbrace{m \circ p}_{=p} - \underbrace{m \circ q}_{=q} - \underbrace{m \circ q \circ p}_{=q} = p + q - q \circ p = s \\ s \circ m &= (p + q - q \circ p) \circ m = \underbrace{p \circ m}_{=p} - \underbrace{q \circ m}_{=q} - \underbrace{q \circ p \circ m}_{=p} = p + q - q \circ p = s \end{aligned}$$

d'où $s \vdash m$, ce qui prouve que s est bien le plus petit des majorants de $\{p, q\}$.

6. Il s'agit de prouver que, sous l'hypothèse $p \circ q = q \circ p$,

$$\begin{aligned} \text{Im}(q \circ p) &= \text{Im } p \cap \text{Im } q \\ \text{Im}(p + q - q \circ p) &= \text{Im } p + \text{Im } q \end{aligned}$$

Il y a toujours des inclusions évidentes. Ici ce sont $\text{Im}(q \circ p) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$ et $\text{Im}(p + q - q \circ p) \subset \text{Im } p + \text{Im } q$. En effet si $y \in \text{Im}(q \circ p)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = q \circ p(x) = q(p(x))$ d'où $y \in \text{Im } q$ et par symétrie des rôles (ou parce que $q(p(x)) = p(q(x))$) on a aussi $y \in \text{Im } p$. Conclusion $y \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$. Pour l'autre inclusion, si $y \in \text{Im}(p + q - q \circ p)$ alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = p(x) + q(x) - q(p(x)) = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{q(x - p(x))}_{\in \text{Im } q} \in \text{Im } p + \text{Im } q$$

Réciproquement : Si $y \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, alors $y \in \text{Im } p$ et $y \in \text{Im } q$. Il existe donc $(a, b) \in E^2$ tels que

$$y = p(a) \text{ et } y = q(b)$$

mais alors $q(y) = q(p(a)) = q(q(b)) = q^2(b) = q(b) = y$ d'où $y = q \circ p(a) \in \text{Im}(q \circ p)$. On a donc $\text{Im } p \cap \text{Im } q \subset \text{Im}(q \circ p)$ et par double inclusion $\text{Im}(q \circ p) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Si $z \in \text{Im } p + \text{Im } q$, alors z se décompose en une somme d'un élément de $\text{Im } p$ et d'un élément de $\text{Im } q$. Il existe donc $(a, b) \in E^2$ tels que

$$y = p(a) + q(b)$$

On voudrait pouvoir l'écrire sous la forme $s(x)$ où $x \in E$ et $s = p + q - q \circ p$.

Analyse : Si c'est possible, alors $y = s(x)$ donc $s(y) = s^2(x) = s(x) = y$ et on peut donc choisir $x = y$!

Synthèse : On calcule $s(y) = s(p(a) + q(b)) = p(p(a) + q(b)) + q(p(a) + q(b)) - q(p(p(a) + q(b)))$. Par linéarité, on a

$$\begin{aligned} p(p(a) + q(b)) &= p^2(a) + p \circ q(b) = p(a) + p \circ q(b) \stackrel{p \circ q = q \circ p}{=} p(a) + q \circ p(b) \\ q(p(a) + q(b)) &= q \circ p(a) + q(b) \\ q(p(p(a) + q(b))) &= q(p(a) + p \circ q(b)) \stackrel{p \circ q = q \circ p}{=} q(p(a) + q \circ p(b)) \\ &= q \circ p(a) + q \circ p(b) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} s(y) &= p(a) + q \circ p(b) + q \circ p(a) + q(b) - (q \circ p(a) + q \circ p(b)) \\ &= p(a) + q(b) = y \end{aligned}$$

ainsi $y \in \text{Im } s$ d'où $\text{Im } p + \text{Im } q \subset \text{Im } s$ et par double inclusion, $\text{Im } p + \text{Im } q = \text{Im } s$.

Remarque : On peut aussi prouver que $\ker(\inf\{p, q\}) = \ker p + \ker q$ et $\ker(\sup\{p, q\}) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice de khôlle 707

Soit E un espace vectoriel et $f \in L(E)$ telle que $\ker f \subset \text{Im } f$. Soit p un projecteur tel que $f \circ p = p \circ f = f$.

1. Montrer que $\ker p \subset \ker f$.
2. Montrer que $\ker p$ et $\text{Im } f$ sont en somme directe.
3. Que vaut p ?

Solution :

1. Si $x \in \ker p$ alors $p(x) = \vec{0}$ d'où $f(p(x)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ (car $f \in L(E)$). On en déduit que $f(x) = f \circ p(x) = \vec{0}$ d'où $x \in \ker f$.

Remarque : On peut aussi écrire que (en notant $I = Id_E$), $f - f \circ p = f \circ (I - p) = 0$ d'où $\text{Im}(I - p) \subset \ker f$. Mais puisque p est un projecteur, on a $\text{Im}(I - p) = \ker p$.

2. On a $\{\vec{0}\} \subset \ker p \cap \text{Im } f$. Réciproquement soit $y \in \text{Im } f \cap \ker p$.

$$y \in \text{Im } f \iff \exists x \in E, y = f(x)$$

$$y \in \ker p \iff p(y) = \vec{0}$$

Mais alors $p(y) = p(f(x)) = (p \circ f)(x) = f(x) = y = \vec{0}$. Ceci prouve que $\ker p \cap \text{Im } f \subset \{\vec{0}\}$ et par double inclusion que $\ker p$ et $\text{Im } f$ sont en somme directe.

3. On a donc $\ker p \subset \ker f \subset \text{Im } f$ d'où $\ker p \cap \text{Im } f = \ker p = \{\vec{0}\}$. Ceci prouve que $p = I$.

Pour s'en convaincre, si $x \in E$ alors $x - p(x) \in \ker p$ (car $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = \vec{0}$) donc

$$x - p(x) = \vec{0} \text{ ce qui donne } p(x) = x$$

20.1 Des inégalités

Exercice de khôlle 708

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ où $a < b$.

1. Pour $x \in [a, b]$, que valent $f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ et $f(b) - \int_x^b f'(t) dt$?
2. On pose $M_0 = \sup_{[a,b]} |f|$ et $M_1 = \sup_{[a,b]} |f'|$, montrer que

$$M_0 \leq \frac{1}{2} (|f(a)| + |f(b)| + (b-a) M_1)$$

Solution :

1. Cela vaut $f(x)$, dans les deux cas.
2. On a donc pour $x \in [a, b]$

$$|f(x)| = \left| f(a) + \int_a^x f'(t) dt \right| \leq |f(a)| + \left| \int_a^x f'(t) dt \right| \stackrel{\text{IT (version } f)}{\leq} |f(a)| + \int_a^x |f'(t)| dt \text{ car } a \leq x$$

Or $\forall t \in [a, x]$, $|f'(t)| \leq M_1$ donc par croissance de l'intégrale, on a $\int_a^x |f'(t)| dt \leq \int_a^x M_1 dt = (x-a) M_1$.

De même

$$f(x) = \left| f(b) - \int_x^b f'(t) dt \right| \leq |f(b)| + \left| \int_x^b f'(t) dt \right| \leq |f(b)| + \int_x^b |f'(t)| dt \leq |f(b)| + (b-x) M_1$$

en sommant on a

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq \frac{1}{2} (|f(a)| + |f(b)| + (b-a) M_1)$$

Ainsi $\frac{1}{2} (|f(a)| + |f(b)| + (b-a) M_1)$ majore f sur $[a, b]$ donc est plus grand que la borne supérieure de f .
Conclusion

$$\sup_{[a,b]} |f| = M_0 \leq \frac{1}{2} (|f(a)| + |f(b)| + (b-a) M_1)$$

Exercice de khôlle 709

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, continues sur $[0, 1]$ et monotones de même monotonie. On définit φ sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right) \left(\int_0^x g(t) dt \right) - x \int_0^x f(t) g(t) dt$$

1. Justifier que φ est dérivable et calculer $\varphi'(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
2. En écrivant $\varphi'(x)$ comme l'intégrale d'un produit, déterminer la monotonie de φ .
3. En déduire l'inégalité de Tchebychev

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 g(t) dt \right) \leq \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

Solution :

1. Si on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ et $H(x) = \int_0^x f(t) g(t) dt$, puisque f, g et $f \times g$ sont continues sur $[0, 1]$ et que $0 \in [0, 1]$, le TFA nous dit que F, G et H sont, respectivement, les primitives de f, g et $f \times g$ nulle en $x = 0$. En particulier elles sont dérivables et ainsi $\varphi = F \times G - H$ aussi avec

$$\forall x \in [0, 1], \varphi'(x) = f(x) G(x) + F(x) g(x) - H(x) - x f(x) g(x)$$

soit

$$\varphi'(x) = f(x) \int_0^x g(t) dt + g(x) \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) g(t) dt - x f(x) g(x)$$

2. On a donc

$$\varphi'(x) = \int_0^x (f(x) g(t) + g(x) f(t) - f(t) g(t)) dt - x f(x) g(x)$$

et l'idée c'est que $x f(x) g(x) = \int_0^x f(x) g(x) dt$ d'où

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_0^x (f(x) g(t) + g(x) f(t) - f(t) g(t) - f(x) g(x)) dt \\ &= \int_0^x (f(x) (g(t) - g(x)) + g(x) f(t) - f(t) g(t)) dt \\ &= \int_0^x (f(x) (g(t) - g(x)) + f(t) (g(x) - g(t))) dt \\ &= \int_0^x (f(x) - f(t)) (g(t) - g(x)) dt \end{aligned}$$

Puisque f et g sont monotones et de même monotonie, le produit $(f(x) - f(t))(g(t) - g(x))$ est négatif. Par croissance de l'intégrale, si $x \geq 0$, on a donc

$$\int_0^x (f(x) - f(t)) (g(t) - g(x)) dt \leq 0$$

3. On en déduit que φ est décroissante, et puisque $\varphi(0) = 0$ on a $\varphi(x) \leq 0$ pour $x \in [0, 1]$, en particulier $\varphi(1) \leq 0$ (mais on prouve mieux!).

20.2 Le TFA, encore et encore

Exercice de khôlle 710

Fonction de Green du laplacien unidimensionnel

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit pour $x \in [0, 1]$

$$G(x, t) = \begin{cases} t(x-1) & \text{si } 0 \leq t \leq x \\ x(t-1) & \text{si } x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Montrer que $y(x) = \int_0^1 G(x, t) f(t) dt$ est solution sur $[0, 1]$ de

$$\begin{cases} y'' = f \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Solution : Avant tout, $G(x, x)$ est bien défini (dans les deux cas, on obtient $x(x-1)$). A x fixé, $g(t) = G(x, t)$ est bien une fonction continue sur $[0, 1]$ car affine sur $[0, x]$ et $[x, 1]$ et prenant la même valeur en $t = x$. Ainsi $y : t \mapsto \int_0^1 G(x, t) f(t) dt$ existe. Par Chasles, on a, pour $x \in [0, 1]$ fixé

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^x t(x-1) f(t) dt + \int_x^1 x(t-1) f(t) dt = (x-1) \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 (t-1) f(t) dt \\ &= (x-1) \int_0^x t f(t) dt - x \int_1^x (t-1) f(t) dt \end{aligned}$$

On a donc $y(0) = - \int_0^0 t f(t) dt + 0 \times \int_1^1 (t-1) f(t) dt = 0$ et $y(1) = 0 \times \int_0^1 t f(t) dt + 1 \int_1^1 (t-1) f(t) dt = 0$. Puis, par le TFA, puisque

$$\varphi_1 : t \mapsto t f(t) \text{ et } \varphi_2 : t \mapsto (t-1) f(t)$$

sont continues sur $[0, 1]$, que 0 et 1 sont dans $[0, 1]$, on peut affirmer que $\Phi_1 : t \mapsto \int_0^t t f(t) dt$ et $\Phi_2 : t \mapsto \int_1^t (t-1) f(t) dt$ sont des primitives de φ_1 et φ_2 respectivement sur $[0, 1]$. Enfin

$$\forall x \in [0, 1], y(x) = (x-1) \Phi_1(x) - x \Phi_2(x)$$

Par produit et somme, y est dérivable sur $[0, 1]$ avec

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], y'(x) &= (x-1) \varphi_1(x) + \Phi_1(x) - x \varphi_2(x) - \Phi_2(x) \\ &= \Phi_1(x) - \Phi_2(x) \end{aligned}$$

d'où y' est dérivable et $y'' = \varphi_1 - \varphi_2 = f$. Ce qui termine la preuve.

Exercice de khôlle 711

Pour $x \geq 1$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

1. Justifier que f est bien définie sur $[1, +\infty[$. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
2. Etudier le signe et la monotonie de f . Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que $\forall x \geq 1$

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

Quelle précision cela apporte-t-il sur f ?

4. Simplifier pour $x \geq 2$, $f(x) + f(x+1)$ et justifier que

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$$

et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

5. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$f(n) = (-1)^{n-1} \ln 2 + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \ln \frac{1}{2}$ et donner un équivalent de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \ln \left(\frac{1}{2} \right) \right)$.

Solution : **Remarque :** J'entends déjà certains d'entre vous me dire, $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)}$ n'est pas définie en 0 ! Certes, mais si $x = 1$, $t^{x-1} = t^0 = 1$ et si $x > 1$, $(x-1)\ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} -\infty$, on prolonge donc $t \mapsto t^{x-1}$ en posant « $0^{x-1} = 0$ ». Dans toute la suite du sujet, on a donc prolongé ainsi.

1. Pour $x \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est bien définie, continue sur $[0, 1]$ d'où $f(x)$ existe. On a

$$f(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2 \text{ et } f(1) = \int_0^1 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 1 - \ln 2$$

2. Pour $x \geq 1$ et $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{t^x}{1+t}$ d'où (croissance de l'intégrale) $0 \leq f(x)$. Puis si $1 \leq x < y$ et $t \in [0, 1]$ on a $t^{x-1} \geq t^{y-1}$ en effet

$$\begin{aligned} 0 &\leq x-1 \leq y-1 \text{ et si } t \in]0, 1], \ln(t) \leq 0 \\ \text{d'où } (x-1)\ln t &\geq (y-1)\ln t \text{ et par croissance de } \exp \\ \exp((x-1)\ln t) &= t^{x-1} \geq t^{y-1} = \exp((y-1)\ln t) \end{aligned}$$

d'où $(1+t \geq 0)$, pour $t \in [0, 1]$ (car c'est encore vrai pour les prolongements en $t = 0$)

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \geq \frac{t^{y-1}}{1+t} \text{ et par croissance de l'intégrale } f(x) \geq f(y)$$

La fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$ minorée par 0 donc admet une limite en $+\infty$ (TLM).

3. Pour $t \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$, en multipliant par $t^{x-1} \geq 0$ et en intégrant on a

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2} dt = \frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

Par PAL, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. Simple calcul car $f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(1+t)}{1+t} dt = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$. La décroissance de f sur $[1, +\infty[$ donne

$$f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$$

inégalité à laquelle on ajoute $f(x)$ pour obtenir celle demandée. Enfin

$$f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1) = \frac{1}{x-1}$$

d'où

$$1 \leq \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} \leq \frac{x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

ce qui donne

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

5. Méthode ① : Par récurrence c'est facile !

Méthode ② : On évite la récurrence en posant $u_n = (-1)^{n-1} \ln 2 + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k+1}$ ainsi

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (-1)^n \ln 2 + (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = - \left((-1)^{n-1} \ln 2 + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right) \\ &= - \left(u_n + (-1)^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) = -u_n - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Or $f(n+1) + f(n) = \frac{1}{n}$ d'où

$$f(n+1) - u_{n+1} = \frac{1}{n} - f(n) + u_n - \frac{1}{n} = u_n - f(n)$$

La suite $(f(n) - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1 , mais $f(1) = \ln 2$ et $u_1 = (-1)^0 \ln 2 + (-1)^1 \sum_{k=0}^{-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$

d'où

$$f(1) - u_1 = 0 \text{ et ainsi } f(n) - u_n = 0$$

Pour finir, si on pose $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ alors

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} = - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j+1} \\ (-1)^n f(n+1) &= \ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + \alpha_n = \alpha_n - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Par le critère séquentiel, $f(n+1) \sim \frac{1}{2(n+1)} \sim \frac{1}{2n}$ d'où

$$\alpha_n - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \sim \frac{(-1)^n}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque : En fait, on a mieux car

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq f(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$$

d'où

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \left| \alpha_n - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Exercice de khôlle 712

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$.

1. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x t f'(t) dt - \int_x^1 (1-t) f'(t) dt$$

2. En déduire que $\forall x \in [0, 1]$

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \max(x, 1-x) \int_0^1 |f'(t)| dt$$

Solution :

1. Soit φ définie sur $[0, 1]$ par

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x t f'(t) dt - \int_x^1 (1-t) f'(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x t f'(t) dt + \int_1^x (1-t) f'(t) dt \end{aligned}$$

. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, les fonctions $t \mapsto t f'(t)$ et $t \mapsto (1-t) f'(t)$ sont continues sur $[0, 1]$. Par le TFA, $x \mapsto \int_0^x t f'(t) dt$ et $x \mapsto \int_1^x (1-t) f'(t) dt$ sont dérivables et ainsi φ l'est avec

$$\forall x \in [0, 1], \varphi'(x) = x f'(x) + (1-x) f'(x) = f'(x)$$

On en déduit que $\varphi - f$ est constante sur $[0, 1]$, mais

$$\varphi(1) = \int_0^1 (f(t) + t f'(t)) dt = [t f(t)]_0^1 = f(1)$$

d'où $f = \varphi$.

2. Par IT, on en déduit que (attention à l'ordre des bornes)

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \left| \int_0^x t f'(t) dt \right| + \left| \int_x^1 (1-t) f'(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^x |t f'(t)| dt + \int_x^1 |(1-t) f'(t)| dt \\ &\leq \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + x \int_0^x |f'(t)| dt + (1-x) \int_x^1 |f'(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 |f(t)| dt + \max(x, 1-x) \int_0^1 |f'(t)| dt \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 713

Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t+1-e^{-t}}$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Soit $\varphi : t \mapsto t+1-e^{-t}$, montrer que si $t > 0$ alors $\varphi(t) > 0$.
2. En déduire que f est bien définie et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et justifier que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que

$$\forall t > 0, \frac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$$

et en déduire la limite L de F en $+\infty$.

4. Variations de F .
 - (a) Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
 - (b) Etudier le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
 - (c) La fonction F admet-elle une limite en 0^+ ?

Solution :

1. φ est dérivable et a pour dérivée $\varphi'(t) = 1 + e^{-t} > 0$ donc est strictement croissante. Ainsi si $t > 0$, $\varphi(t) > \varphi(0) = 0$.
2. On en déduit que f est définie (on ne divise pas par 0), strictement positive (car $f = \frac{1}{\varphi}$) et continue sur $]0, +\infty[$.
Puis si $x > 0$ alors f est continue sur l'intervalle $[x, 2x]$ donc $\int_x^{2x} f(t) dt$ existe. Ainsi F est définie sur $]0, +\infty[$.
3. On a $\forall t > 0$,

$$0 < e^{-t} \leq 1 \text{ d'où } -1 \leq -e^t < 0 \text{ et } 0 < t \leq t+1-e^{-t} \leq t+1$$

et par décroissance sur $]0, +\infty[$ de la fonction inverse,

$$\forall t > 0, \frac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$$

Pour $x > 0$, on a $x < 2x$ et donc par croissance de l'intégrale (on a bien vérifié l'ordre des bornes), on déduit que

$$\forall x > 0, \int_x^{2x} \frac{dt}{t+1} \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$$

soit

$$\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leq F(x) \leq \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2).$$

Puisque $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{x+1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(2)$, on a par encadrement $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

Retenir que pour encadrer une intégrale, on encadre la fonction et on contrôle l'ordre des bornes.

4. (a) D'après le TFA, il existe des primitives de f sur $]0, +\infty[$ (car f est continue sur cet intervalle). Soit Φ une primitive de f sur $]0, +\infty[$ alors $F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$, ainsi F est dérivable (composée et différence de fonctions dérivables) et

$$\forall x > 0, F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

Puisque f est continue sur $]0, +\infty[$, on en déduit que F' est $\mathcal{C}^0$, donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(b) On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2}{2x+1-e^{-2x}} - \frac{1}{x+1-e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}-2e^{-x}}{(2x+1-e^{-2x})(x+1-e^{-x})} \\ &= \frac{(1-e^{-x})^2}{(2x+1-e^{-2x})(x+1-e^{-x})} = (1-e^{-x})^2 f(2x) f(x) > 0 \text{ et } F'(0) > 0 \end{aligned}$$

Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (on se souvient que $f > 0$ sur $]0, +\infty[$).

(c) Par le TLM, F a une limite en 0^+ si et seulement si elle est minorée sur $]0, +\infty[$. Mais puisque $f \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, par croissance de l'intégrale, on a $F \geq 0$. Donc oui, F a une limite en 0^+ .

Exercice de khôlle 714

Soit f et g définies et continues sur $[a, b]$ où $b > a$.

- Justifier que $\Phi : x \mapsto \int_a^x g(t) dt \times \int_x^b f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et calculer $\Phi'(x)$ pour $x \in [a, b]$.
- En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) \int_a^c g(t) dt = g(c) \int_c^b f(t) dt$$

Solution :

- Par le TFA, soit F et G des primitives de f et g (ainsi F dérivable et $F' = f$ donc $F \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et de même avec G). On a alors

$$\Phi(x) = (G(x) - G(a))(F(b) - F(x))$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que produit de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \Phi'(x) &= G'(x)(F(b) - F(x)) - F'(x)(G(x) - G(a)) \\ &= g(x) \int_x^b f(t) dt - f(x) \int_a^x g(t) dt \end{aligned}$$

Remarque : On peut même choisir F telle que $F(b) = 0$ et G telle que $G(a) = 0$ (en posant $F(x) = \int_b^x f(t) dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t) dt$).

- Un exo d'Rolle ? Bah oui, $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, Φ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ donc

$$\exists c \in]a, b[, \Phi'(c) = 0$$

on en déduit que $f(c) \int_a^c g(t) dt = g(c) \int_c^b f(t) dt$.

Exercice de khôlle 715

Soit f définie et continue sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f(t) dt = 0$ où $b > a$.

1. Justifier que $\Phi : x \mapsto e^{-x} \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et calculer $\Phi'(x)$ pour $x \in [a, b]$.

2. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^c f(t) dt = f(c)$$

3. En s'inspirant de ce qui précède, montrer que si $a > 0$, il existe $d \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^d f(t) dt = df(d)$$

Solution :

1. Par le TFA, f admet une unique primitive, notée F , sur $[a, b]$ telle que $F(a) = 0$ (et on peut même préciser que cette primitive est $F(x) = \int_a^x f(t) dt$). On a $F' = f$ donc $F \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On a alors, pour $x \in [a, b]$, $\Phi(x) = e^{-x} F(x)$ donc Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. De plus $\Phi'(x) = -e^{-x} F(x) + e^{-x} f(x)$.

2. On a $\Phi(a) = 0$ et $\Phi(b) = e^{-b} \int_a^b f(t) dt = 0$, puisque Φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, on applique Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$. En multipliant par e^c on a $e^c \Phi(c) = 0$ d'où

$$F(c) = \int_a^c f(t) dt = f(c)$$

3. Analyse : Même idée, il s'agit de «fabriquer» ψ . On pose $\psi(x) = g(x) \int_a^x f(t) dt = g(x) F(x)$ qui est dérivable si l'on suppose que g l'est avec

$$\psi'(x) = g'(x) F(x) + g(x) f(x)$$

On a $\psi(a) = \psi(b) = 0$ et on applique Rolle. Il existe $d \in]a, b[$ tel que $g'(d) F(d) + g(d) f(d) = 0$. Comme on souhaite obtenir $F(d) = df(d)$, il suffit de prendre g tel que $-\frac{g(d)}{g'(d)} = d$, ou mieux g solution de $xy' + y = 0$!

La résolution de $xy' + y = 0$ conduit à $g(x) = \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{x}$.

Synthèse : Si on pose $\psi(x) = \frac{F(x)}{x}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ (car $a > 0$, donc pas de division par 0), on peut appliquer Rolle et on a le résultat !

20.3 SDR (Sommes de Riemann)

Exercice de khôlle 716

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}$.

Solution : Ce n'est pas une somme de Riemann, car le domaine de sommation est $\llbracket 1 ; 2n \rrbracket$. Mais on peut couper la somme en deux ! On écrit donc que

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2} \text{ et } \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2} \underset{k=n+j}{=} \sum_{j=1}^n \frac{n+j}{n^2 + (n+j)^2}$$

Puis

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}, \text{ SDR pour } f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{n+j}{n^2 + (n+j)^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1 + \frac{j}{n}}{1 + \left(1 + \frac{j}{n}\right)^2}, \text{ SDR pour } g(x) = \frac{1+x}{1+(1+x)^2} = f(1+x)$$

Ainsi, on a bien deux sommes sur $[0, 1]$ pour deux fonctions **continues**. On en déduit que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_1(x) dx + \int_0^1 f(1+x) dx$$

Mais le changement de variable $u = 1 + x$ (qui est $\mathcal{C}^1$) dans la seconde intégrale donne

$$\int_0^1 f(1+x) dx \underset{u=1+x}{=} \int_1^2 f(u) du$$

Conclusion

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_0^2 = \frac{1}{2} \ln 5$$

Remarque : On peut aussi écrire que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1 + \frac{j}{n}}{1 + \left(1 + \frac{j}{n}\right)^2} = \frac{2-1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(1 + \frac{(2-1)j}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx$$

Autre méthode : Si on considère la somme

$$v_p = \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p \frac{\frac{2k}{p}}{1 + \left(\frac{2k}{p}\right)^2} = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^p f\left(\frac{k(b-a)}{p}\right) \text{ où } b=2, a=0, f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Alors

$$v_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 5$$

Donc

$$u_n = v_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 5 \text{ (suite extraite)}$$

Exercice de khôlle 717

Calculer la limite de $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 8n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 16n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 24n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 32n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9n^2}}$.

Solution : On commence par écrire que l'on cherche la limite de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 8kn}}$. Puis

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 \left(1 + 8\frac{k}{n}\right)}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 8\frac{k}{n}}}$$

C'est une somme de Riemann sur $[0, 1]$ pour $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+8x}}$ qui est bien continue sur $[0, 1]$. Ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+8x}}.$$

Enfin, $(\sqrt{1+8x})' = \frac{8}{2\sqrt{1+8x}}$ donc $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+8x}} = \left[\frac{1}{4} \sqrt{1+8x} \right]_0^1 = \frac{1}{4} (\sqrt{9} - 1) = \frac{1}{2}$.

Exercice de khôlle 718

On définit f et φ sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f : P \mapsto \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right]$ et $\varphi : P \mapsto P(1)$.

1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$.
3. En déduire que $\varphi(f^n(P)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P(t) dt$.

Solution :

1. Pour φ , on sait que l'évaluation est une forme linéaire, bref φ est bien linéaire (et son noyau est un hyperplan). Pour f , il y a le «endo» et le morphisme. Si $\deg P \leq 2$, alors $\deg P\left(\frac{X}{2}\right) \leq 2$ et $\deg P\left(\frac{X+1}{2}\right) \leq 2$ d'où $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. La linéarité est immédiate car si $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \frac{1}{2} \left[(\lambda P + Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + Q)\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X}{2}\right) \right) + \left(\lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \right) \right] \\ &= \lambda \times \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

2. On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$, on a $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^1-1} P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right] = f(P)$.

Supposons alors que $f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$ à $n \geq 1$ fixé. On a ainsi

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= f(f^n(P)) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X}{2} + \frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+1}{2} + \frac{k}{2^n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Si on considère la somme $\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right)$, on peut la couper en deux sommes. Celle où l'indice j est pair, et celle où j est impair. Si l'on pose $j = 2k$, on a alors $j = 2k \leq 2^{n+1} - 1 \Rightarrow 2k \leq 2^{n+1} - 2 \Rightarrow k \leq 2^n - 1$. La somme des indices pairs est donc $\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)$.

Si l'on pose $j = 2k + 1$, on a alors $2k + 1 \leq 2^{n+1} - 1 \Rightarrow k \leq 2^n - 1$, la somme des indices impairs est donc $\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)$.

Conclusion $\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right)$ et ceci prouve l'hérédité.

Remarque : On peut aussi (et c'est un peu plus simple) écrire que

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= f^n(f(P)) = f^n\left(\frac{1}{2} \left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right) \right]\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+1}{2^{n+1}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k+1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

3. On a donc

$$\varphi(f^n(P)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) \underset{j=k+1}{=} \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} P\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

Qui est la somme de Riemann de la fonction polynomiale (donc continue) P sur $[0, 1]$ pour une subdivision à 2^n éléments. On a donc

$$\varphi(f^n(P)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P(t) dt.$$

Pour être précis, si $u_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P\left(\frac{j}{n}\right)$, c'est une SDR pour P sur $[0, 1]$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P(t) dt$. Et $\varphi(f^n(P)) = u_{2^n}$ converge en tant que suite extraite.

Exercice de khôlle 719

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)(2n+k)}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)(2n+k)} &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{\left(n + \frac{k}{n} \times n\right) \left(2n + \frac{k}{n} \times n\right)} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(2 + \frac{k}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(2 + \frac{k}{n}\right)} \end{aligned}$$

c'est une SDR pour la fonction f , continue sur $[0, 1]$, définie par $f(x) = \frac{1}{(1+x)(2+x)}$, ainsi

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)(2n+k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$$

Une DES donne $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ d'où

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(2+x)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = [\ln|1+x| - \ln|x+2|]_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)(2n+k)} = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Exercice de khôlle 720

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$.

Solution : Il faut faire preuve d'initiative ! On pose $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$, on a un produit de nombres positifs, on passe donc au $\ln$ ainsi

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$$

Ce n'est pas une somme de Riemann (sacrée $\ln$, pour elle on va se battre!). Mais on sait que

$$\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

L'inégalité de droite est classique, c'est la convexité. Celle de gauche se prouve soit en étudiant $\varphi(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ que l'on dérive, soit (plus classe) avec Taylor. En effet $f(x) = \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$ donc pour $x > 0$ on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt$$

Avec $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ et $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ on a

$$f(x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt$$

Or si $t \in [0, x]$, on a $\frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \geq 0$ donc par croissance de l'intégrale ($0 \leq x$ pour que les bornes soient dans «le bon sens») on a

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt \geq 0 \text{ d'où } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

Bref, on a donc $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)^2 \leq \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) \leq \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

soit

$$\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{k(n-k)}{2n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) \leq \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

On somme les inégalités pour avoir

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k(n-k) \leq \ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

Et on est heureux car

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right)}$$

est une SDR pour la fonction continue sur $[0, 1]$ définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

Reste l'autre somme, on a deux méthodes.

Méthode ① :

$$\frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = \frac{1}{2n^2} \times \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right)$$

Or $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right)$ est une SDR pour $g(x) = x(1-x)$ (continue) donc a une limite finie en $+\infty$, en multipliant par $\frac{1}{2n^2}$, on a

$$\frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k(n-k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Méthode ② : Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq n-k \leq n$ donc $0 \leq k(n-k) \leq n^2$ et ainsi

$$0 \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k(n-k) \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n n^2 = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Bref, pour finir, par encadrement

$$\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

Reste à calculer la valeur de cette intégrale ! Mais il s'agit simplement de l'aire du demi disque de centre $\Omega : (0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$, en effet

$$y = \sqrt{x(1-x)} \iff y \geq 0 \text{ et } y^2 = x(1-x) \iff y^2 \text{ et } x^2 - x + y^2 = 0$$

Or $x^2 - x + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$ donc $x^2 - x + y^2 = 0$ est bien l'équation du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{2}$.

On a donc

$$I = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$$

Et par continuité de exp sur $\mathbb{R}$ donc en $\frac{\pi}{8}$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) = e^{\frac{\pi}{8}}$$

Remarque : On peut calculer $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ autrement, voici comment faire. On a

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - (2x-1)^2\right)$$

d'où

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - (2x-1)^2\right)} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - (2x-1)^2} dx$$

Si $x \in [0, 1]$, on a $2x-1 \in [-1, 1]$ et on pose alors $\sin t = 2x-1$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$\cos(t) dt = 2dx, \sqrt{1 - (2x-1)^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t|$$

Pour les bornes (on a $t = \arcsin(2x-1)$), on choisit

$x =$	0	1
$t =$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

d'où $\cos t \geq 0$ et

$$I = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{8}$$

Exercice de khôlle 721

Soit $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ pour $n \geq 1$, quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Solution : Une partie entière ! On encadre, pour $k \geq 1$

$$\sqrt{k} - 1 < \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \sqrt{k}$$

d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - 1) < u_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$$

Mais $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$ est une SDR sur $[0, 1]$ pour $f(x) = \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0, 1]$ donc $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{x} dx =$

$$\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \text{ d'où, par encadrement}$$

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$$

Exercice de khôlle 722

Retrouver la valeur de $\int_0^1 x dx$ à l'aide des sommes de Riemann.

Solution : On sait que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x dx$, mais

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

d'où l'on retrouve que $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ ouf!

Exercice de khôlle 723

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$.

- Déterminer $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq y \leq x$, on a

$$e^y (x - y) \leq e^x - e^y \leq e^x (x - y)$$

En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, un encadrement de $I_{k,n} = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (e^x - e^{\frac{k}{n}}) dx$.

- Déduire de ce qui précède un équivalent de $\ell - u_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ell - u_n)^{\frac{1}{n}}$.

Solution :

- Immédiat car u_n est une SDR sur $[0, 1]$ pour $f(x) = e^x$ qui est continue, ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^x dx = e - 1$.
- Si on pose $f(t) = e^t$ (dérivable sur $\mathbb{R}$) alors $\forall t \in [y, x]$, $e^y \leq f'(t) \leq e^x$. Par l'IAF on en déduit que

$$e^y (x - y) \leq f(x) - f(y) \leq e^x (x - y)$$

Puis avec $y = \frac{k}{n}$ où $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a pour $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $0 \leq \frac{k}{n} = y \leq x$ d'où

$$e^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n} \right) \leq e^x - e^{\frac{k}{n}} \leq e^x \left(x - \frac{k}{n} \right)$$

par croissance de l'intégrale (les bornes sont «dans le bon sens»)

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n} \right) dx \leq I_{k,n} = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (e^x - e^{\frac{k}{n}}) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^x \left(x - \frac{k}{n} \right) dx$$

On a immédiatement

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n} \right) dx = e^{\frac{k}{n}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(x - \frac{k}{n} \right) dx = e^{\frac{k}{n}} \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} = \frac{e^{\frac{k}{n}}}{2n^2}$$

On est alors tenté de calculer l'intégrale de droite, à savoir $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^x \left(x - \frac{k}{n} \right) dx$ par une IPP. Mais à quoi bon, puisque si $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ on a $e^x \leq e^{\frac{k+1}{n}}$ donc $e^x \left(x - \frac{k}{n} \right) \leq e^{\frac{k+1}{n}} \left(x - \frac{k}{n} \right)$ et ainsi

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^x \left(x - \frac{k}{n} \right) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{\frac{k+1}{n}} \left(x - \frac{k}{n} \right) dx = e^{\frac{k+1}{n}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(x - \frac{k}{n} \right) dx = \frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{2n^2}$$

Conclusion

$$\frac{e^{\frac{k}{n}}}{2n^2} \leq I_{n,k} \leq \frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{2n^2}$$

3. On somme pour $k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$ pour avoir

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{k}{n}}}{2n^2} = \frac{u_n}{2n} \leq \sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} \sum_{j=k+1}^n e^{\frac{j}{n}} = \frac{1}{2n^2} \left(-1 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{j}{n}} \right) + e \right) = \frac{u_n}{2n} + \frac{e-1}{2n^2}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(e^x - e^{\frac{k}{n}} \right) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^x dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{\frac{k}{n}} dx \\ &= \int_0^1 e^x dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} = e - 1 - u_n = \ell - u_n \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u_n}{2n} \leq \ell - u_n \leq \frac{u_n}{2n} + \frac{e-1}{2n^2}$$

On a $\frac{u_n}{2n} \sim \frac{e-1}{2n}$ et $\frac{u_n}{2n} + \frac{e-1}{2n^2} = \frac{u_n}{2n} \left(1 + \frac{e-1}{2nu_n} \right) \sim \frac{e-1}{2n} \times 1$ on a

$$\ell - u_n \sim \frac{e-1}{2n} = \frac{\ell}{2n}$$

Enfin $(\ell - u_n)^{\frac{1}{n}} = \exp \left(\frac{1}{n} \ln(\ell - u_n) \right)$, or $\ln(\ell - u_n) \sim \ln \left(\frac{e-1}{2n} \right) = \ln \left(\frac{e-1}{2} \right) - \ln n \sim -\ln n$, d'où

$$\frac{1}{n} \ln(\ell - u_n) \sim -\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et par continuité de $\exp$ en 0, on a $(\ell - u_n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$.

Remarque : En fait $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{k}{n}} \right)^k = \frac{1}{n} \times \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} \right)^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{e-1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)}$. En posant $u = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{e^u - 1}{u} = 1 + \frac{u}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u) = 1 + \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

d'où

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell} + \frac{1}{2n\ell} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

Ceci permet de retrouver que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e-1$, puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n} - \frac{1}{e-1} &= \frac{\ell - u_n}{\ell u_n} \sim \frac{\ell - u_n}{\ell^2} \\ \text{mais } \frac{1}{u_n} - \frac{1}{e-1} &= \frac{1}{2n\ell} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{2n\ell} \end{aligned}$$

d'où

$$\ell - u_n \sim \frac{\ell^2}{2n\ell} = \frac{\ell}{2n}$$

Ce qui est un chouia plus rapide ...

Exercice de khôlle 724

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty[$, pour lesquelles il existe $a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) f(2x) \cdots f(nx) \leq a n^p$$

Solution : La condition sur f signifie que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\prod_{k=1}^n f(kx) = \mathcal{O}(n^p)$ (un grand « $\mathcal{O}$ »).

Analyse : Puisque f est à valeurs dans $[1, +\infty[$, on peut affirmer que $a > 0$, passer au logarithme (en remarquant que $\ln(f(kx)) \geq \ln 1 = 0$) pour avoir

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \ln(f(kx)) \leq \ln a + p \ln(n)$$

soit, en posant $S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(f(kx))$

$$0 \leq S_n(x) \leq \frac{\ln a + p \ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'où } S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $S_n(b-a)$ est une SDR pour la fonction continue $\ln(f)$ sur $[a, b]$ donc $S_n(b-a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$$\int_a^b \ln(f(t)) dt \text{ d'où}$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, \int_a^b \ln(f(t)) dt = 0$$

. Enfin, $\ln f \geq 0$ et est continue sur $[a, b]$, d'intégrale nulle donc est identiquement nulle sur $[a, b]$. On a donc $\ln f = 0$ d'où f est constante égale à 1.

Synthèse : Si $f = 1$ alors $f(x) f(2x) \cdots f(nx) = 1 \leq a \times n^p$ où $a = 1$ et $p = 1$ (par exemple).

Conclusion, la seule solution est la fonction constante égale à 1 sur $[a, b]$.

Exercice de khôlle 725

Déterminer un équivalent de

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n+k) e^{\frac{k}{n}}$$

Solution : On cherche la somme de Riemann en écrivant que

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(n + n \times \frac{k}{n} \right) e^{\frac{k}{n}} = n^2 \times \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 \times \frac{k}{n} \right) e^{\frac{k}{n}} \right)$$

Si on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 \times \frac{k}{n} \right) e^{\frac{k}{n}}$, alors S_n est une SDR pour f définie continue sur $[0, 1]$ par $f(t) = (1+t)e^t$. Ainsi

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (e^t + te^t) dt = [te^t]_0^1 = e$$

d'où $S_n \sim e$ et $u_n \sim en^2$.

Exercice de khôlle 726

Déterminer la limite de

$$u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$$

Solution : On a $u_n = \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^n (n+k) \right)^{\frac{1}{n}}$ d'où (tous les termes sont positifs)

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= -\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) = -\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(n \times \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right) \\ &= -\ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\ln(n) + \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \end{aligned}$$

qui est une SDR pour $f(x) = \ln(1+x)$ continue sur $[0, 1]$. Ainsi $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x) dx$. Une IPP donne $(u'(x) = 1, u(x) = x+1, v(x) = \ln(1+x), v'(x) = \frac{1}{1+x})$

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = [(x+1) \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 dx = 2 \ln(2) - 1$$

Puis par continuité de $\exp$ en $2 \ln 2 - 1$ on a

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(2 \ln 2 - 1) = \frac{4}{e}$$

Exercice de khôlle 727

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, déterminer, lorsque n tend vers $+\infty$, les limites de :

- $C_n = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right).$
- $T_n = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right).$

Solution :

- C'est une somme double sur un carré, on peut l'écrire

$$C_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \times \sum_{\ell=1}^n f\left(\frac{\ell}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \times \left(\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n f\left(\frac{\ell}{n}\right) \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2$$

Puisque f est continue sur $[0, 1]$, on a $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$ et ainsi $C_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f \right)^2$.

- C'est une somme triangulaire stricte. On peut décomposer le carré $\square_n = \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ comme réunion disjointe de

$$\begin{aligned} T^s &= \{(k, \ell) \in \square_n, 1 \leq k < \ell \leq n\} \\ T_i &= \{(k, \ell) \in \square_n, 1 \leq \ell < k \leq n\} \\ D &= \{(k, \ell) \in \square_n, 1 \leq \ell = k \leq n\} \end{aligned}$$

(à savoir le triangle strictement supérieur, celui strictement inférieur et la diagonale). Par échange des indices k et ℓ on a

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) = \sum_{(k, \ell) \in T^s} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) = \sum_{(k, \ell) \in T_i} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) = \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)$$

Et en sommant par paquets, on a

$$\begin{aligned} \sum_{(k, \ell) \in \square_n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) &= \sum_{(k, \ell) \in T^s} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) + \sum_{(k, \ell) \in T_i} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) + \sum_{(k, \ell) \in D} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \\ &= 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) + \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$C_n = 2T_n + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

Puisque f^2 est continue sur $[0, 1]$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2$ et ainsi $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Conclusion

$$T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f \right)^2$$

Exercice de khôlle 728

(★) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\ln(k^k) - \ln(n^k))$.

Solution : On écrit que

$$R_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\ln k^k - \ln n^k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k \ln k - k \ln n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

pour voir une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto x \ln(x)$ qui est bien ... ah non elle est pas définie en $x = 0$!

par grave, on pose $f(x) = x \ln(x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ ainsi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0)$ (CC) donc f est bien définie et continue sur $[0, 1]$. On en déduit que

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Avec une IPP, $\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$ ($u'(x) = x$, $v(x) = \ln x$, $u(x) = \frac{x^2}{2}$, $v'(x) = \frac{1}{x}$, u

et $v \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$). Une primitive, sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto x \ln x$ est donc $x \mapsto \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$.

Pour conclure :

Méthode ① : Soit F définie par $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$ si $x > 0$ et $F(0) = 0$ alors $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = F(0)$ (par les CC) donc F est continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée égale à f . Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, par le théorème limite de la dérivée, F est dérivable en 0 avec $F'(0) = 0 = f(0)$. Donc F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$ et ainsi

$$\int_0^1 f(t) dt = F(1) - F(0) = -\frac{1}{4}$$

Méthode ② : Soit $F(x) = \int_x^1 f(t) dt = - \int_1^x f(t) dt$, par le TFA, F est dérivable sur $[0, +\infty[$ (car f est continue sur $[0, +\infty[$) donc continue. En particulier $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(t) dt = F(0)$. Mais

$$F(x) = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{t^2}{4} \right]_x^1 = -\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4}$$

d'où $\int_0^1 f(t) dt = -\frac{1}{4}$. Et au final

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\ln(k^k) - \ln(n^k)) = -\frac{1}{4}$$

Exercice de khôlle 729

Un résultat de Srinivasa Ramanujan.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.
2. Montrer l'égalité de Ramanujan

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{n}{2n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^3 - 2k}$$

En déduire la limite de $v_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^3 - 2k}$.

Solution :

1. Sans problème, puisque $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$, il s'agit d'une somme de Riemann, sur $[0, 1]$, pour la fonction continue f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln |1+t|]_0^1 = \ln 2$.
2. On pose $w_n = \frac{n}{2n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^3 - 2k}$ et on montre, par récurrence $\mathcal{P}(n) = \ll u_n = w_n \gg$. C'est vrai si $n = 1$ car

$$u_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}, w_1 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{(2k)^3 - 2k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8-2} = \frac{1}{2}$$

Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \sum_{j=k+1}^{n+2} \frac{1}{n+j} = u_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= u_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = u_n + \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \frac{n+1}{2(n+1)+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k)^3 - 2k} \\
&= \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} + \left(\frac{n}{2n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^3 - 2k} \right) + \frac{1}{(2n+2)^3 - (2n+2)} \\
&= w_n + \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+1)} \text{ car } x^3 - x = x(x-1)(x+1)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver

$$\frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

Mais $\frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} = \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ d'où

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+1)} &= \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+1)} \\
&= \frac{2n+2+1}{(2n+2)(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie! Par passage, à la limite, on a $v_n = u_n - \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

Remarque : En 1879, Mionnet, dans les Nouvelles Annales Mathématiques, pose la question de déterminer la valeur de $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k)^3 - 4k}$. La même question sera posée par Ramanujan dans le Journal of the Indian Mathematical Society (vers 1913)

260. (S. RAMANUJAM communicated by MR. P. V. SESHU AYYAR) :—
Show without using calculus, that

$$\frac{3}{2} \log 2 = 1 + \frac{2}{4^2-4} + \frac{2}{8^2-8} + \frac{2}{12^2-12} + \dots \dots ad \text{ inf.}$$

Plus généralement, Ramanujan, s'intéresse ensuite à la fonction $\phi(a, n) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(ak)^3 - ak}$ et à $\phi(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(a, n)$. Il s'agit ici de calculer $\phi(2)$.

Exercice de khôlle 730

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n k \ln(k)$, donner un équivalent de u_n .

Solution : On écrit que

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^n n \frac{k}{n} \ln \left(n \frac{k}{n} \right) = n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) + \sum_{k=1}^n k \ln(n) \\
&= n^2 \times \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right) + \frac{n(n+1)}{2} \ln(n)
\end{aligned}$$

On a une SDR pour la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x \ln(x)$... **Définie sur** $[0, 1]$? Problème en 0! Faux problème, on définit f par $f(x) = x \ln x$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 0$. Par les CC, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ donc f est continue en 0 et l'est sur $]0, 1]$ par produit de fonctions continues. Et on a bien une SDR pour la fonction f définie et continue sur $[0, 1]$. Ainsi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

et $\frac{n(n+1)}{2} \ln(n) \sim \frac{n^2 \ln(n)}{2}$. On a $n^2 \times \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{n^2 \ln(n)}{2} \right)$ d'où

$$u_n \sim \frac{n^2 \ln(n)}{2}$$

Remarque : Si vous avez un doute, $\frac{u_n}{n^2 \ln n} = \frac{1}{\ln(n)} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right) + \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

20.4 Comparaison série-intégrale

Exercice de khôlle 731

Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ en utilisant $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Solution : La fonction f est définie, dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Ainsi $f'(x) \leq 0$ si $x \geq 3$. Pour $k \geq 3$, on a donc

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

d'où par croissance de l'intégrale

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dt = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt = f(k)$$

En sommant (attention à partir de $k = 3$), on a pour $n \geq 4$

$$\sum_{k=3}^{n-1} f(k+1) \leq \int_3^n \frac{\ln t}{t} dt \leq \sum_{k=3}^{n-1} f(k)$$

mais $u_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=2}^n f(k)$ car $f(1) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{n-1} f(k+1) &= \sum_{i=k+1}^n f(i) = u_n - f(2) - f(3) \\ \int_3^n \frac{\ln t}{t} dt &= \left[\frac{1}{2} \ln^2(t) \right]_3^n = \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} \\ \sum_{k=3}^{n-1} f(k) &= u_n - f(2) - f(n) \end{aligned}$$

d'où

$$u_n - f(2) - f(3) \leq \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} \leq u_n - f(2) - f(n)$$

ce qui donne

$$\frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} + f(2) + f(n) \leq u_n \leq \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} + f(2) + f(3)$$

On a $\frac{\ln^2 n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} + f(2) + f(3) \sim \frac{\ln^2 n}{2}$. Puis $f(n) = \frac{\ln n}{n} = o\left(\frac{\ln^2 n}{2}\right)$ (car $\frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{\ln^2 n}{2}} =$

$\frac{2}{n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) donc $\frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} + f(2) + f(n) \sim \frac{\ln^2 n}{2}$. Par encadrement

$$u_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$$

20.5 Suites définies par une intégrale

Exercice de khôlle 732

Déterminer la limite de :

$$1. u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt.$$

$$2. v_n = \int_0^e (\ln(1+t^2))^n dt.$$

Solution :

1. Si $t \in [0, 1]$, on a $1 \leq 1+t^2 \leq 2$ et par croissance de $\ln$, de $x \mapsto x^n$ et de l'intégrale,

$$0 \leq \ln(1+t^2) \leq \ln 2, \text{ puis } 0 \leq (\ln(1+t^2))^n \leq (\ln 2)^n$$

et enfin

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 (\ln 2)^n dt = (\ln 2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (car } 0 \leq \ln 2 < 1 \text{)}$$

2. Pour v_n la même idée ne fonctionne pas (car $\ln(1+e) > 1$!). On coupe v_n en deux intégrales

$$v_n = \int_0^2 (\ln(1+t^2))^n dt + \int_2^e (\ln(1+t^2))^n dt$$

Puisque $\int_0^2 (\ln(1+t^2))^n dt \geq 0$ (on intègre une fonction positive), on a $v_n \geq \int_2^e (\ln(1+t^2))^n dt \geq (e-2) (\ln(1+2^2))^n$ (car $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est croissante et $x \mapsto x^n$ aussi). Puisque $\ln(5) > 1$ (car $5 > e$) on a $(e-2) (\ln(1+2^2))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par minoration.

Exercice de khôlle 733

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{f(t)}{n+t} dt$.

1. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On suppose que $\int_0^1 f(t) dt \neq 0$. Déterminer un équivalent de u_n .

Solution :

1. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc borné. Soit $M = \sup_{[0,1]} |f|$ alors

$$\forall t \in [0, 1], \left| \frac{f(t)}{n+t} \right| \leq \frac{M}{n+t} \leq \frac{M}{n}$$

d'où par inégalité triangulaire puis croissance de l'intégrale, $0 \leq |u_n| \leq \int_0^1 \left| \frac{f(t)}{n+t} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{M}{n} dt = \frac{M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(a) On écrit que

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{n} dt - u_n = \int_0^1 \frac{tf(t)}{n(n+t)} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{tf(t)}{n+t} dt$$

Mais avec la question 1 appliquée à $t \mapsto tf(t)$ au lieu de f on a $\int_0^1 \frac{tf(t)}{n+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{tf(t)}{n+t} dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et ainsi

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt$$

Exercice de khôlle 734

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$u_n = \int_0^n t^n e^{-nt} dt$$

- Montrer que la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(t) = te^{-t}$ admet un maximum.
- Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. La fonction φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $\varphi'(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$. On en déduit que φ est croissante sur $[0, 1]$ puis décroissante. On a $\varphi(0) = 0$ et par les CC, $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi φ a un maximum en $t = 1$ qui vaut $\varphi(1) = \frac{1}{e}$.

2. Pour $t \in [0, n]$ on a donc

$$0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{e} \text{ d'où (croissance de } x \mapsto x^n \text{ sur } [0, +\infty[), 0 \leq t^n e^{-nt} = \varphi(t)^n \leq \frac{1}{e^n}$$

puis par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens)

$$0 \leq u_n \leq \int_0^n \frac{dt}{e^n} = ne^{-n} = \varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Conclusion $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice de khôlle 735

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx$$

1. Simplifier $u_0 + u_1$, puis calculer u_1 et en déduire u_0 .
2. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Exprimer $u_{n+1} + u_n$ en fonction de n (sans signe $\int$).
4. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et retrouver ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Solution : Avant tout la continuité de f_n définie par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$ nous assure de l'existence de u_n .

1. On a $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 dx = 1$. Puis $u_1 = - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = - [\ln |1 + e^{-x}|]_0^1 = - \ln \left(1 + \frac{1}{e}\right) + \ln 2 = 1 + \ln 2 - \ln(e + 1)$ (type $\frac{u'}{u}$). D'où

$$u_0 = 1 - u_1 = \ln \left(\frac{e + 1}{2} \right)$$

2. Pour $n \geq 0$ et $x \in [0, 1]$ on a $1 \leq 1 + e^{-x}$ d'où $0 \leq \frac{1}{1 + e^{-x}} \leq 1$ puis ($e^{-nx} \geq 0$)

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \leq e^{-nx}$$

Par croissance de l'intégrale (bornes ok !) on en déduit que $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx} dx = \frac{-1}{n} [e^{-nx}]_0^1 = \frac{1 - e^{-n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. On a $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n}}{n}$. Puis

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x} - 1)}{1 + e^{-x}} dx$$

Mais si $x \in [0, 1]$ on a $e^{-x} - 1 \leq 0$ d'où (positivité des deux termes) $\frac{e^{-nx}(e^{-x} - 1)}{1 + e^{-x}} \leq 0$ et par croissance de l'intégrale $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. Mais alors

$$0 \leq 2u_{n+1} \leq u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

d'où $u_{n+1} \leq \frac{1 - e^{-n}}{2n}$ et pour $n \geq 1$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1 - e^{-n-1}}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui donne bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice de khôlle 736

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^n}$.

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
3. Majorer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle converge.
4. Montrer que

$$\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)} dx$$

et en déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$.

5. Calculer u_2 (révision!).

Solution :

$$1. \text{ On a } u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{2+x} = [\ln |2+x|]_0^1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \text{ et } u_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \left[\frac{1}{2} \ln |1+2x|\right]_0^1 = \ln \sqrt{3}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^{n+1}} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^n} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x+x^n} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x+x^{n+1})(1+x+x^n)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x+x^{n+1})(1+x+x^n)} dx \end{aligned}$$

Pour $x \in [0, 1]$, on a $\frac{x^n(1-x)}{(1+x+x^{n+1})(1+x+x^n)} \geq 0$ donc par croissance de l'intégrale $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est croissante.

3. Pour majorer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on majore la fonction intégrée (après avoir vérifié que les bornes sont «dans le bon sens»). Pour $x \geq 0$ on a

$$0 \leq 1+x \leq 1+x+x^n$$

d'où $\frac{1}{1+x+x^n} \leq \frac{1}{1+x}$ et par croissance de l'intégrale

$$u_n \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$$

4. Compte tenu de ce qui précède,

$$\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)} dx$$

On majore ensuite brutalement

$$\frac{1}{(1+x+x^n)(1+x)} \leq 1$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x+x^n)(1+x)} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Pour finir $0 \leq \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$.

5. On a

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int_0^1 \frac{4}{3} \times \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

20.6 Taylor avec un reste intégral(e)

Rappel : Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $(a, b) \in I^2$ alors la formule de Taylor reste intégral s'écrit

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On en déduit l'inégalité de Taylor-Lagrange :

Soit M tel que $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Exercice de khôlle 737

Soit f définie par

$$f(x) = \int_0^\pi \tan(x \sin(t)) dt$$

- Justifier que f est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- Justifier que $M = \sup_{u \in [-1, 1]} |\tan^{(3)}(u)|$ existe.
- A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction tangente, déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{x}$.
- La fonction f est-elle continue en 0 ?

Solution :

- Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ fixé, pour $t \in [0, \pi]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$ d'où $-\frac{\pi}{2} \leq x \sin(t) \leq \frac{\pi}{2}$. Par composition, $t \mapsto \tan(x \sin(t))$ est donc définie et continue sur $[0, \pi]$. Ceci justifie l'existence de f sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- La fonction $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[-1, 1]$ donc $\tan^{(3)}$ est continue sur le **segment** $[-1, 1]$ elle y est bornée. Ceci justifie l'existence de $M = \sup_{u \in [-1, 1]} |\tan^{(3)}(u)|$.
- L'inégalité de Taylor-Lagrange donne pour $u \in [-1, 1]$

$$\left| \tan(u) - \left(\tan(0) + \tan'(0)u + \frac{\tan''(0)}{2}u^2 \right) \right| \leq \frac{M}{6} |u|^3$$

Par imparité de $\tan$, on a $\tan(0) = \tan''(0) = 0$ d'où

$$|\tan u - u| \leq \frac{M}{6} |u|^3$$

Si $x \in [-1, 1]$ et $t \in [0, \pi]$, pour $u = x \sin(t) \in [-1, 1]$ on en déduit que

$$|\tan(x \sin t) - x \sin t| \leq \frac{M}{6} |x|^3 |\sin^3 t| \leq \frac{M}{6} |x|^3$$

d'où

$$\left| \int_0^\pi \tan(x \sin(t)) dt - \int_0^\pi x \sin(t) dt \right| \leq \int_0^\pi |\tan(x \sin t) - x \sin t| dt \leq \int_0^\pi \frac{M}{6} |x|^3 = \frac{M\pi}{6} |x|^3$$

Avec $\int_0^\pi x \sin(t) dt = 2x$, on obtient

$$\frac{1}{|x|} |f(x) - 2x| = \left| \frac{f(x)}{x} - 2 \right| \leq \frac{M\pi}{6} |x|^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Conclusion,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{x} = 2$$

4. Puisque $f(0) = 0$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, ainsi f est dérivable en $x = 0$ donc y est continue.

Exercice de khôlle 738

Rappel : Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $(a, b) \in I^2$ alors la formule de Taylor reste intégral s'écrit

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

1. Ecrire la formule de Taylor pour $f(x) = x \ln(x)$, $a = 1$ et $b = 2$ et $n \geq 2$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k(k-1)}$ converge et donner sa limite.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

Solution : On peut appliquer Taylor à tout ordre car $x \mapsto x \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, 2]$.

1. On a $f'(x) = 1 + \ln x$, puis $f''(x) = \frac{1}{x}$, $f^{(3)}(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(5)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ et par récurrence, pour $n \geq 2$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$$

Ainsi pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \ln 2 = \sum_{k=0}^n \frac{(2-1)^k}{k!} f^{(k)}(1) + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= f(1) + f'(1) + \sum_{k=2}^n \frac{(2-1)^k}{k!} f^{(k)}(1) + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \times \frac{(-1)^k (k-2)!}{1^{k-1}} + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} \frac{(-1)^{n+1} (n+1-2)!}{t^{n+1-1}} dt \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k(k-1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_1^2 \left(\frac{2-t}{t} \right)^n dt \end{aligned}$$

2. On a $u_n = 2 \ln 2 - 1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_1^2 \left(\frac{2-t}{t}\right)^n dt$. On pose $I_n = \int_1^2 \left(\frac{2-t}{t}\right)^n dt$. Pour $t \in [1, 2]$, on a

$$0 \leq 2-t \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{t} \leq 1 \text{ d'où } 0 \leq \left(\frac{2-t}{t}\right)^n \leq 1$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale

$$0 \leq I_n \leq \int_1^2 dt = 1$$

d'où $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_1^2 \left(\frac{2-t}{t}\right)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui prouve que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(2) - 1$$

3. On a $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} \stackrel{i=k-1}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} \\ &= - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} \right) = - \left(2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^1}{1} \right) \\ &= -2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^n}{n} - 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2} \left(-1 - u_n + \frac{(-1)^n}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (-1 + 1 - 2 \ln 2) = -\ln 2$$

Exercice de khôlle 739

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([1, 2], \mathbb{R})$ définie par $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$. Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+1} H_k$. On rappelle

que $H_n \sim \ln(n)$.

1. Pour $x \in [1, 2]$, calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ de réels telles que pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} (u_n - v_n \ln(x))$$

et préciser les relations entre u_{n+1} , v_{n+1} , u_n et v_n .

3. Déterminer v_n en fonction de n . En posant $w_n = \frac{u_n}{(n-1)!}$, exprimer, pour $n \geq 2$, u_n en fonction de H_{n-1} et une factorielle.
4. A l'aide de la formule de Taylor, justifier que

$$a_{n-1} + \frac{1}{2} \ln^2(2) = (-1)^{n+1} \int_1^2 \left(\frac{2-t}{t} \right)^n \frac{H_n - \ln(t)}{t} dt$$

5. Montrer que

$$\left| a_{n-1} + \frac{1}{2} \ln^2(2) \right| \leq \frac{H_n + \ln 2}{n+1}$$

et en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.

Solution :

1. Simple calcul qui donne $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f''(x) = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$ et $f^{(3)}(x) = -\frac{1}{x^3} (3 - 2 \ln x)$.
2. Par récurrence sur n , on montre $\mathcal{P}(n) \equiv \langle \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [1, 2], f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^n} (u_n - v_n \ln(x)) \rangle$. C'est vrai au rang $n = 1$ en posant $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$. Puis si $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)} \right)'(x) = (-1)^n \times \left(\frac{-n}{x^{n+1}} (u_n - v_n \ln(x)) + \frac{1}{x^n} \times \left(-\frac{v_n}{x} \right) \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} \times (nu_n + v_n - nv_n \ln(x)) = \frac{(-1)^n}{x^n} (u_{n+1} - v_{n+1} \ln(x)) \end{aligned}$$

si on pose $u_{n+1} = nu_n + v_n$ et $v_{n+1} = nv_n$.

3. On regarde les premiers termes de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$, ce qui donne 1, 1, 2, 6, 24... et par récurrence $v_n = (n-1)!$ (ou mieux, si on pose $z_n = \frac{v_n}{(n-1)!}$ alors $z_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{n!} = \frac{nv_n}{n!} = \frac{v_n}{(n-1)!} = z_n$, ainsi $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à $z_1 = 1$). Puis en posant $w_n = \frac{u_n}{(n-1)!}$, on a

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n!} = \frac{nu_n + v_n}{n!} = \frac{u_n}{(n-1)!} + \frac{1}{n} = w_n + \frac{1}{n}$$

ce qui donne, pour $n \geq 2$, $w_n - w_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1}$. Avec $w_1 = 0$, on obtient, pour $n \geq 2$

$$u_n = (n-1)! w_n = (n-1)! H_{n-1}$$

et on n'oublie pas que $u_1 = 0$.

4. On applique la formule de Taylor entre $a = 1$ et $b = 2$ pour avoir, avec $n \geq 2$

$$f(2) = \frac{1}{2} \ln^2(2) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Avec $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ et pour $k \geq 2$

$$f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^k}{1^k} (u_k - v_k \ln 1) = (-1)^k (k-1)! H_{k-1}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln^2(2) &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k (k-1)! H_{k-1}}{k!} + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} H_{k-1} + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Mais, avec $i = k-1$, $\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k} H_{k-1} = -a_{n-1}$ d'où

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -\frac{1}{2} \ln^2(2) + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln^2(2) + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} \frac{(-1)^{n+1}}{t^{n+1}} (u_{n+1} - v_{n+1} \ln(t)) dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln^2(2) + \int_1^2 \frac{(2-t)^n}{n!} \frac{1}{t^{n+1}} (n! H_n - n! \ln(t)) dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln^2(2) + (-1)^{n+1} \int_1^2 \left(\frac{2-t}{t} \right)^n \frac{H_n - \ln(t)}{t} dt \end{aligned}$$

5. Par l'IT, on a

$$\begin{aligned} \left| a_{n-1} + \frac{1}{2} \ln^2(2) \right| &= \left| (-1)^{n+1} \int_1^2 \left(\frac{2-t}{t} \right)^n \frac{H_n - \ln(t)}{t} dt \right| \leq \int_1^2 \left| \left(\frac{2-t}{t} \right)^n \frac{H_n - \ln(t)}{t} \right| dt \\ &\leq \int_1^2 \left| \frac{2-t}{t} \right|^n \frac{H_n + |\ln(t)|}{|t|} dt \text{ car } H_n \geq 0 \end{aligned}$$

Mais si $t \in [1, 2]$, on a

$$0 \leq \frac{2-t}{t} \leq \frac{2-t}{1} \text{ et } \frac{H_n + |\ln(t)|}{|t|} = \frac{H_n + \ln(t)}{t} \leq \frac{H_n + \ln 2}{1}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| a_{n-1} + \frac{1}{2} \ln^2(2) \right| &\leq (H_n + \ln 2) \int_1^2 (2-t)^n dt = (H_n + \ln 2) \times \left[-\frac{(2-t)^{n+1}}{n+1} \right] = \frac{H_n + \ln 2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{car } \frac{H_n}{n+1} &\sim \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par les CC.} \end{aligned}$$

Conclusion

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \ln^2(2)$$

ce que l'on écrit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} H_k = -\frac{1}{2} \ln^2(2)$$

Ce genre de somme porte le nom de somme d'Euler (encore lui!).

20.7 Un peu d'analyse fonctionnelle

Exercice de khôlle 740

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour $f \in E$ on définit $T(f)$ par, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$T(f)(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. A l'aide du TAF appliquée à $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(0)$.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E .
3. Déterminer $\ker T$.

Solution :

1. D'après le TFA, F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F' = f$. Pour $x \in \mathbb{R}$, le TAF donne

$$\exists c(x) \in [0, x] \cup [x, 0] \text{ tel que } F(x) - F(0) = xF'(c(x))$$

ce qui donne $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(c(x))$ où $-|x| \leq c(x) \leq |x|$. Par encadrement $\lim_{x \rightarrow 0} c(x)$ et par continuité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(c(x)) = f(0)$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(0)$.

2. Puisque F est continue sur $\mathbb{R}$, par quotient $T(f)$ est également continue sur $\mathbb{R}^*$. Mais d'après la question précédente, $T(f)$ est continue en 0. Ainsi $T(f) \in E$ (c'est le «endo»).
Puis si $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$T(\lambda f + g)(x) = \begin{cases} (\lambda f + g)(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda f + g)(t) dt & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Puisque

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(0) &= \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(0) + T(g)(0) \\ \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda f + g)(t) dt &= \lambda \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right) + \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) \text{ si } x \neq 0 \end{aligned}$$

on a bien $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$, ce qui prouve la linéarité. Conclusion, $T \in L(E)$.

3. Soit $f \in \ker T$ alors

$$T(f)(0) = 0 \text{ donc } f(0) = 0$$

Puis $\forall x \neq 0$, $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0$ d'où $\int_0^x f(t) dt = 0$. Puisque $\int_0^0 f(t) dt = 0$, on en déduit que F définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est la fonction nulle. Puisque F est dérivable avec $F' = f$, on en déduit que $f = 0$. Ainsi $\ker T \subset \{0\}$, la réciproque étant vraie, on en déduit que $\ker T = 0$ donc que T est injective.

Exercice de khôlle 741

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, pour $f \in E$ on définit $T(f)$ par

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
2. Soit $f \in E$, montrer que $T(f) \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ et calculer $T(f)'(x)$ et $T(f)''(x)$.
3. L'endomorphisme T est-il injectif? surjectif?
4. (★) Déterminer $\text{Im } T$.

Solution :

1. Soit $x \in [0, 1]$ fixé et $t \in [0, 1]$, alors $\inf(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } t \geq x \\ t & \text{si } t \leq x \end{cases}$. Avec Chasles on obtient

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \underbrace{\int_0^x \inf(x, t) f(t) dt}_{\text{ici } t \leq x} + \underbrace{\int_x^1 \inf(x, t) f(t) dt}_{\text{ici } t \geq x} \\ &= \int_0^x t f(t) dt + \int_x^1 x f(t) dt = \int_0^x t f(t) dt - x \int_1^x f(t) dt \end{aligned}$$

ceci permet d'affirmer que $T(f)$ est bien définie sur $[0, 1]$. De plus d'après le TFA, $H(x) = \int_0^x t f(t) dt$ et

$F(x) = \int_1^x f(t) dt$ sont des primitives de $t \mapsto t f(t)$ et de f sur $[0, 1]$ donc sont dérivables donc continue. Par somme et produit $T(f)$ est continue (et même dérivable) sur $[0, 1]$. Ceci règle le «endo»!

Enfin, si $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale, $\forall x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} T(\lambda f + g)(x) &= \int_0^1 \inf(x, t) (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt + \int_0^1 \inf(x, t) g(t) dt \\ &= \lambda T(f)(x) + T(g)(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$ d'où la linéarité de T . Conclusion $T \in \mathcal{L}(E)$.

2. On a $T(f)(x) = H(x) - xF(x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ avec

$$T(f)'(x) = H'(x) - F(x) - xF'(x) = x f(x) - F(x) - x f(x) = -F(x)$$

Puisque F est $\mathcal{C}^1$, on en déduit que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ avec $T(f)''(x) = -f(x)$.

3. On vient de montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$. Puisque $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \neq \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ (par exemple $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ est continue sur $[0, 1]$ mais n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ donc n'est sûrement pas dans $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$), on peut affirmer que T n'est pas surjective.

Pour l'injectivité, si $f \in \ker T$ alors $T(f) = 0$ d'où $T(f)'' = -f = \tilde{0}$ ($\tilde{0}$ est la fonction $\tilde{0} : x \mapsto 0$) d'où $\ker T \subset \{\tilde{0}\}$. La réciproque est évident d'où $\ker T = \{\tilde{0}\}$ et T est injective.

4. Soit $h \in \text{Im } T$, il existe $f \in E$ tel que $T(f) = h$. Ainsi h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ avec

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x t f(t) dt - x \int_1^x f(t) dt \text{ donc } h(0) = 0 \\ h'(x) &= - \int_1^x f(t) dt \text{ donc } h'(1) = 0 \\ h''(x) &= -f(x) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\text{Im } T \subset \{h \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), h(0) = h'(1) = 0\}$. Réciproquement si $h \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ vérifie $h(0) = h'(1) = 0$. On pose $f = -h'' \in E$ (car h est de classe $\mathcal{C}^2$) alors

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= -\int_0^x t \times h''(t) dt + x \int_1^x h''(t) dt \\ &= -\int_0^x t \times h''(t) dt + x[h'(t)]_1^x = -\int_0^x t \times h''(t) dt + x(h'(x) - h'(1)) \\ &= xh'(x) - \int_0^x t \times h''(t) dt \text{ car } h'(1) = 0 \end{aligned}$$

Une IPP (valide) dans la première intégrale, avec $u(t) = t$, $v'(t) = h''(t)$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^x t \times h''(t) dt &= [t \times h'(t)]_0^x - \int_0^x h'(t) dt \\ &= xh'(x) - 0 - [h(x)]_0^x = xh'(x) - h(x) \text{ car } h(0) = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$T(f)(x) = -(xh'(x) - h(x)) + xh'(x) = h(x)$$

ce qui prouve que $-h''$ est un antécédent (et même le seul, par injectivité) de h . Conclusion

$$\text{Im } T = \{h \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), h(0) = h'(1) = 0\}$$

De plus T est un isomorphisme de E sur $\text{Im } T$.

Remarque : Au passage on a montré que

$$T(f)(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) dt \right) du$$

En effet, si on pose $h(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t) dt \right) du$ alors $h(0) = 0$, h est dérivable avec $h'(x) = \int_x^1 f(t) dt = -\int_1^x f(t) dt$ donc $h'(1) = 0$ et $h''(x) = -f(x)$. Donc $h \in \text{Im } T$ et l'antécédent de h est $-h'' = f$, en d'autres termes $T(f)(x) = h(x)$.

CHAPITRE 21

THÉORIE DE LA DIMENSION

21.1 Application directe du cours (un beau mélange)

Exercice de khôlle 742

Montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Solution : Par l'absurde, si $\mathbb{R}[X]$ est de dimension finie, il existe une base $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}[X]$. Soit $M = \max \{\deg P, P \in \mathcal{B}\} = \max \{\deg P_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$. Alors $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}_M[X]$ donc

$$\text{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}_M[X]$$

absurde car $X^{M+1} \in \mathbb{R}[X]$ et $X^{M+1} \notin \mathbb{R}_M[X]$.

Exercice de khôlle 743

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ des vecteurs de E . On suppose que la famille $\mathcal{G} = (x_i + y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre. Montrer que $\dim E \geq n$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) \geq n$.

Solution : La famille $\mathcal{G}$ est une famille libre de n vecteurs de E donc $\dim E \geq |\mathcal{G}| = n$ ($|\mathcal{G}|$ est le cardinal de $\mathcal{G}$). Soit $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ et $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$ alors $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i + y_i \in F$ donc $G \subset F$. Mais $\dim G \underset{\text{déf du rang}}{=} \underset{\mathcal{G} \text{ libre}}{\text{rg}(\mathcal{G})} = n$ d'où $\dim F \geq \dim G = n$.

Exercice de khôlle 744

Soit E un espace vectoriel.

1. Soient P_1 et P_2 deux plans vectoriels de E , que pensez vous de l'affirmation suivante : « $P_1 \cap P_2 = \{\vec{0}\}$ implique $\dim E \geq 4$ ».
2. Soient F, G et H trois SEV de E , que pensez vous de l'affirmation suivante : « $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{\vec{0}\}$ implique $\dim E \geq \dim F + \dim G + \dim H$ ».

Solution :

1. C'est vrai par Grassmann car $P_1 + P_2 \subset E$ donc

$$\dim E \geq \dim(P_1 + P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2) = 4$$

2. C'est faux ! Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \right)$, $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} j \\ j \end{pmatrix} \right)$ et $H = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j \\ j \end{pmatrix} \right)$ où $\left(\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ j \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de E . On a $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mais $\dim E = 2 \leq 3$!

Remarque : Avec Grassmann, on a

$$\begin{aligned} \dim((F+G)+H) &= \dim(F+G) + \dim H - \dim((F+G) \cap H) \\ &= \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F \cap G) - \dim((F+G) \cap H) \end{aligned}$$

le problème vient que $(F+G) \cap H \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ même si $F \cap H = G \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice de khôlle 745

Soit $E = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique.

- Déterminer la dimension de $F = \{(x, y, z, t) \in E, x + 2y = z + t = x - t\}$.
- Soit $G = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 + 2e_3)$. Quelle est la dimension de G ? A-t-on $F \oplus G = E$?

Solution :

1. On écrit que $(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} z + t = x - t \\ x + 2y = x - t \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z - t = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z - 2t = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases}$ d'où

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Puisque $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre (échelonnée) et génératrice de F , c'en est une base et ainsi $\dim F = 2$.

2. Puisque $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre et génératrice de G , on a $\dim G = 2$. Puis $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset F \cap G$. Réciproquement,

soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ 2\beta \\ 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\vec{u} \in F \iff \begin{cases} x - z - 2t = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta - 2\beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

Ainsi

$$\dim F + \dim G = \dim E \text{ et } F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ d'où (via Grassmann) } E = F \oplus G$$

Exercice de khôlle 746

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \geq 2$, $F = \{P \in E, P(-1) = P'(-1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

- Donner les dimensions de F et de G .
- A-t-on $E = F \oplus G$?
- Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(P) = P(-1)(X^2 + 1) + P'(-1)(X^2 - 1)$
 - Justifier que φ un endomorphisme de E , quel est son noyau?
 - Que vaut $\text{rg}(\varphi)$? Déterminer $\text{Im } \varphi$
 - Que vaut $\text{rg}(\varphi^2)$? Déterminer $\ker \varphi^2$.

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} P \in F &\iff -1 \text{ racine double de } P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], P = (X+1)^2 Q \\ &\iff \exists (a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}, P = (X+1)^2 (a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-2} X^{n-2}) \end{aligned}$$

Ainsi

$$F = \text{Vect} \left((X+1)^2, X(X+1)^2, \dots, X^{n-2}(X+1)^2 \right)$$

Puisque $\mathcal{B}_F = \left((X+1)^2, X(X+1)^2, \dots, X^{n-2}(X+1)^2 \right)$ est libre (échelonnée en degré) et génératrice de F , c'en est une base et $\dim F = n+1-2 = n-1$. Puis le cours dit que $\dim G = 2$.

2. On a $\dim E = n+1 = \dim F + \dim G$, pour avoir $E = F \oplus G$, il reste à prouver (via Grassmann), au choix, que :
- ① Que $F \cap G = \{ \vec{0} \}$, soit $F \cap G \subset \{ \vec{0} \}$ (l'autre inclusion est évidente). Mais soit $P = aX + b \in G$ alors $P \in F \iff P(-1) = P'(-1) = 0 \iff a = b = 0$ (soit car cela donne $-a + b = 0$ et $a = 0$, soit car -1 est racine double, on a plus de racines que le degré).
- ou ② Que $F + G = E$, soit $E = F + G$. Mais si $P \in E$, la division euclidienne de P par $X^2 + 1$ assure qu'il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \times G$ tels que $P = (X+1)^2 Q + R$. On a donc la décomposition

$$P = \underbrace{(X+1)^2 Q}_{\in F} + \underbrace{R}_{\in G}$$

Ce qui prouve que $P \in F + G$.

Remarque : La méthode ② montre que l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$ est linéaire, puisqu'il s'agit de la projection sur G de direction F !

3.

- (a) La linéarité est banale et comme $n \geq 2$ on a bien $\varphi(P) \in E$ (ne pas l'oublier). Puisque $(X^2 + 1, X^2 - 1)$ est libre (non colinéaires), on a

$$\varphi(P) = 0 \iff P(-1) = P'(-1) = 0 \iff P \in F$$

Conclusion $\ker \varphi = F$.

- (b) Ainsi $\dim \ker \varphi = n-1$ et par la FDR (formule du rang) $\dim \text{Im } \varphi = \dim E - \dim F = 2$. Puis

$$\varphi(1) = 2X^2 \text{ et } \varphi(X) = -2$$

donc $\text{Im } \varphi \subset \text{Vect}(1, X^2)$ et par égalité des dimensions, on a $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(1, X^2)$.

- (c) Le plus simple est de passer par $\ker \varphi^2$, en effet

$$\begin{aligned} \varphi^2(P) &= \varphi(\varphi(P)) = \varphi(P(-1)(X^2 + 1) + P'(-1)(X^2 - 1)) \\ &= P(-1)\varphi(X^2 + 1) + P'(-1)\varphi(X^2 - 1) \text{ par linéarité} \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \varphi(X^2 + 1) &= 2(X^2 + 1) - 2(X^2 - 1) = 4 \\ \varphi(X^2 - 1) &= -2(X^2 - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi^2(P) = 4P(-1) - 2P'(-1)(X^2 - 1)$$

On en déduit que $\ker \varphi^2 = \ker \varphi$ (car $(4, -2(X^2 - 1))$ est libre. Puis $\operatorname{Im} \varphi^2 \subset \operatorname{Im} \varphi$ (car si $Q = \varphi^2(P)$ alors $Q = \varphi(\varphi(P)) \in \operatorname{Im} \varphi$) et par égalité des dimensions $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \varphi^2$.

Exercice de khôlle 747

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$. Montrer que φ est un automorphisme de E .

Solution : On sait que $D : P \longmapsto P'$ est un endomorphisme de E . On a $\varphi = \sum_{k=0}^n D^k$ est donc un endomorphisme de E (somme des composées d'endomorphismes de E). Pour montrer que φ est bijective, il suffit de montrer que $\ker \varphi = \{0\}$. Mais si $P \in \ker \varphi$ alors

$$P + P' + \dots + P^{(n)} = 0$$

Si $P \neq 0$ alors $\deg(P' + \dots + P^{(n)}) < \deg P$ et ainsi

$$\deg(P + P' + \dots + P^{(n)}) = \deg P$$

absurde! Conclusion $P = 0$ et $\ker \varphi \subset \{0\}$, l'autre inclusion est évidente d'où $\ker \varphi = \{0\}$.

Exercice de khôlle 748

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, on définit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^4$ par

$$\forall P \in E, \varphi(P) = (P(0), P'(0), P(1), P'(1))$$

On admet (c'est simple à prouver) que φ est linéaire. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

- Déterminer $\ker \varphi$, en déduire que φ est un isomorphisme.
- Déterminer, pour $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, $P_i = \varphi^{-1}(e_i)$.
- Soit $f : x \longmapsto \sin(\pi x)$, déterminer $P \in E$ tel que les graphes de P et f se coupent en $x = 0$ et $x = 1$ en ayant la même tangente.

Solution :

- On a $P \in \ker \varphi$ si et seulement si 0 et 1 sont racines doubles de P . Puisque $\deg P \leq 3$ on en déduit que $P = 0$ (plus de racines que le degré). Ainsi $\ker \varphi = \{0\}$. Puis $\dim E = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, donc (théorie de la dimension), φ est un isomorphisme.
- On commence par P_2 et P_4 (plus facile). On a $\varphi(P_2) = (0, 1, 0, 0)$ donc 0 est racine de P_2 et 1 est racine double. Puisque $\deg P_2 \leq 3$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_2 = \alpha X(X-1)^2$$

Enfin, $P_2' = \alpha(X-1)^2 + 2\alpha X(X-1)$ d'où $P_2'(0) = \alpha$, mais $P_2'(0) = 1$ donne $P_2 = X(X-1)^2$. Par la même méthode, $P_4 = \beta X^2(X-1)$ et $P_4'(1) = 1$ donne $\beta = 1$. Conclusion

$$P_2 = X(X-1)^2 \text{ et } P_4 = X^2(X-1)$$

Puis $\varphi(P_1) = (1, 0, 0, 0)$ donc 1 est racine double de P_1 , il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P_1 = (aX + b)(X - 1)^2$ d'où

$$P_1' = a(X - 1)^2 + 2(aX + b)(X - 1)$$

Or $P_1'(0) = a - 2b = 0$ d'où $a = 2b$ et enfin $P_1(0) = 1 = b$. Conclusion

$$P_1 = (2X + 1)(X - 1)^2$$

Enfin $P_3 = (cX + d)X^2 = cX^3 + dX^2$ d'où $P_3'(1) = 3c + 2d = 0$ et $P_3(1) = c + d = 1$ donne $c = -2$ et $d = 3$ d'où

$$P_4 = (-2X + 3)X^2$$

3. On a $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = \pi$, $f'(1) = -\pi$ donc $P = \varphi^{-1}(0, \pi, 0, -\pi) = \pi\varphi^{-1}(0, 1, 0, -1) = \pi(P_2 - P_4) = \pi(X - X^2)$.

Exercice de khôlle 749

Soit $E = \mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (1, 1, 1, 3), v_3 = (1, 1, 0, 1), v_4 = (3, 3, -1, 3) \text{ et } v_5 = (2, 3, 0, 1)$$

On pose alors $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \text{Vect}(v_4, v_5)$.

1. La famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est-elle libre ? La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
2. Justifier que $\max(\dim F, \dim G) \leq \dim(F + G) \leq 4$ puis déterminer les dimensions de F et de G .
3. La somme $F + G$ est-elle directe ? Montrer que $1 \leq \dim(F \cap G) \leq 2$.
4. Simplifier $2v_2 - v_1$ et $v_4 - v_5$, que peut-on en déduire sur $F \cap G$?
5. Que vaut $F + G$? Déterminer la dimension, puis une base, de $F \cap G$.

Solution :

1. La famille $(v_1, \dots, v_5)$ est une famille de 5 vecteurs en dimension 4, elle n'est pas libre (cours !). Puis, si $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_c}(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{C_4 - 3C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\ominus}{=} -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\ominus}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. On a $F \subset F + G \subset \mathbb{R}^4$ et $G \subset F + G \subset \mathbb{R}^4$, donc $\dim F \leq \dim(F + G) \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$ et $\dim G \leq \dim(F + G)$ d'où $\max(\dim F, \dim G) \leq \dim(F + G)$.

La famille (v_3, v_4) est génératrice de G , libre (deux vecteurs non colinéaires) donc est une base de G , ainsi $\dim G = 2$. La famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice de F , libre (sous famille d'une base) donc est une base de F , ainsi $\dim F = 3$.

3. Si la somme $F \oplus G$ est directe alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 5$, impossible car $F \oplus G \subset \mathbb{R}^4$ donc est de dimension au plus 4. On peut aussi dire que si $F \oplus G$ est directe alors $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ est une base de $F \oplus G$ donc est libre, absurde.

Par Grassmann, on a

$$\dim(F \cap G) = 4 = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 5 - \dim(F + G)$$

Mais on a vu que $\max(\dim F, \dim G) = 3 \leq \dim(F + G) \leq 4$ d'où $5 - 4 = 1 \leq \dim(F \cap G) \leq 5 - 3 = 2$.

4. On a $2v_2 - v_1 = (1, 0, -1, 2)$ et $v_4 - v_5 = (1, 0, -1, 2)$. Ainsi

$$(1, 0, -1, 2) \in F \cap G$$

(il est combinaison linéaire de (v_1, v_2, v_3) et de (v_4, v_5)). En particulier

$$v_4 - v_5 \in F \cap G$$

5. On sait que $F + G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ donc $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset F + G$ ce qui donne $\mathbb{R}^4 \subset F + G \subset \mathbb{R}^4$ donc

$$F + G = \mathbb{R}^4$$

puis par Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ d'où $\dim(F \cap G) = 1$. Puisque $v_4 - v_5$ est un vecteur libre (car non nul) de $F \cap G$, de dimension 1, c'en est une base.

Exercice de khôlle 750

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E, P(0) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(1) = P'(0) = 0\}$. On ne demande pas de montrer que F et G sont des SEV de E .

- Justifier que F et G sont en somme directe.
- Que vaut $\dim F$. (On admet que $\dim F = \dim G$).
- Montrer que $E = F \oplus G$.

Solution : Il est clair que F et G sont des SEV de E .

- Soit $P \in F \cap G$ alors $P(0) = P'(0) = 0$ et $P(1) = P'(1) = 0$, ainsi 0 et 1 sont racines doubles de P . Puisque $\deg P \leq 3$ on en déduit que $P = 0$ (car P a 4 racines, i.e. strictement plus que son degré). On a donc $F \cap G \subset \left\{ \vec{0} \right\}$, la réciproque est évidente.
- Pour F (et pour G) : Méthode ① : Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, alors

$$P \in F \iff \begin{cases} a = 0 \\ b + 2c + 3d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -2c - 3d \end{cases} \iff P = c(X^2 - 2X) + d(X^3 - 3X)$$

Ainsi $F = \text{Vect}(X^2 - 2X, X^3 - 3X)$. Puisque $(X^2 - 2X, X^3 - 3X)$ est libre (échelonnée) et génératrice de F , c'en est une base et on en tire $\dim F = 2$.

Méthode ② : $P \in F$ si et seulement si $P(0) = 0$ et $(X - 1)$ divise P' . On a $\deg P' \leq 2$ donc $(X - 1)$ divise P' si et seulement si $P' = (X - 1)(aX + b)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a donc

$$P \in F \iff \begin{cases} P(0) = 0 \\ P' = a(X^2 - X) + b(X - 1) \end{cases} \iff P = P(0) + a\left(\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2}\right) + b\left(\frac{X^2}{2} - X\right)$$

(on intègre et on ajoute la «valeur initiale»). Ainsi

$$F = \text{Vect}\left(\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2}, \frac{X^2}{2} - X\right)$$

et avec le même raisonnement, on a $\dim F = 2$.

Remarque : On a bien $\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} = \frac{1}{3}\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2\right) = \frac{1}{3}\left(X^3 - 3X - \frac{3}{2}(X^2 - 2X)\right)$ ouf!

- On a bien $4 = 2 + 2$ (lire $\dim E = \dim F + \dim G$) et $F \cap G = \left\{ \vec{0} \right\}$ d'où (corollaire de Grassmann) $E = F \oplus G$.

21.2 Le théorème du rang en action

Exercice de khôlle 751

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x - y + z \\ 2x + 2z \end{pmatrix}$.

1. Donner une famille génératrice de $\text{Im } f$, en déduire $\text{rg}(f)$, $\text{Im}(f)$ puis $\ker f$.
2. Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + \alpha z = 0\}$, pour quelles valeurs de α a-t-on $P \oplus \ker f = \mathbb{R}^3$?

Solution : On note $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On a $\text{Im } f = \text{Vect} \left(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}) \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. On constate que $f(\vec{k}) = f(\vec{i}) + f(\vec{j})$, ainsi

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Puisque $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre (non colinéaires) et génératrice de $\text{Im } f$, c'est une base de $\text{Im } f$. Conclusion

$\dim \text{Im } f = 2 = \text{rg } f$ et par la FDR, $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$. Or $f(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \vec{0}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker f$.

On a donc un vecteur libre (à savoir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$) de $\ker f$, $\dim \ker f = 1$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker f$ et

$$\ker f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

2. On a $\dim P = 2$ (ou bien on écrit que $P = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, ou bien P est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$) donc

$$\dim P + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3$$

On sait (Grassmann) que $P \oplus \ker f = \mathbb{R}^3 \iff P \cap \ker f = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in P \cap \ker f$ alors

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} &= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ car } \vec{u} \in \ker f \\ \lambda - \lambda + \alpha(-\lambda) &= \alpha\lambda = 0 \text{ car } \vec{u} \in P \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 0$ on a $\lambda = 0$ et ainsi $\vec{u} = \vec{0}$, ce qui donne $P \cap \ker f = \{\vec{0}\}$ et ainsi $P \oplus \ker f = \mathbb{R}^3$.

Si $\alpha = 0$ alors $\vec{u} \in \ker f \implies \vec{u} \in P$ donc $\ker f \subset P$, la somme n'est pas directe!

Exercice de khôlle 752

Soit φ définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 - X - 1)P' - (2X - 1)P$.

1. Justifier que φ est bien un endomorphisme de E .
2. Déterminer son rang, puis son noyau.

Solution :

1. On commence par prouver que si $(P, Q) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$$

ce qui est banal et simple (laissé au lecteur). Puis

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= -2X + 1, \varphi(X) = -X^2 - 1, \varphi(X^2) = -2X - X^2 \\ \text{donc } \varphi(1), \varphi(X) \text{ et } \varphi(X^2) &\text{ sont dans } E \end{aligned}$$

donc si $P = a + bX + cX^2$, on a $\varphi(P) = a\varphi(1) + b\varphi(X) + c\varphi(X^2) \in E$ en tant que combinaison linéaire de vecteurs de E . Ce qui prouve le «endo»!

2. On sait que

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)))$$

où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de E . Le calcul de $\varphi(1), \varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ donne

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On constate que $C_3 = C_1 + C_2$ donc

$$\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Par la FDR, $\dim \ker \varphi = 3 - 2 = 1$, or $\varphi(X^2 - X - 1) = 0$ (car $C_3 = C_1 + C_2$) donc $X^2 - X - 1$ est un vecteur libre de $\ker \varphi$ qui est de dimension 1 donc en est une base. Conclusion

$$\ker \varphi = \operatorname{Vect}(X^2 - X - 1)$$

Exercice de khôlle 753

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : P \mapsto \frac{X^2 - 1}{2}P'' - XP' + P$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E . Est-il injectif? surjectif?
2. On prend $n = 3$, montrer que f est un projecteur. Décrire précisément sa base et sa direction.
3. On suppose que $n \geq 4$.
 - (a) Montrer que $\dim \ker f \leq 2$ puis que $\ker f = \operatorname{Vect}(X, 1 + X^2)$.
 - (b) Montrer que $(f(1), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
 - (c) Montrer que si $Q \in \operatorname{Im} f$ alors $Q'(1) = Q'(-1) = 0$. En déduire que $\operatorname{Im} f = \{Q \in E, Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$.

Solution : Cet exercice a déjà été abordé, sans la théorie de la dimension, page 592.

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ d'où

$$\deg\left(\frac{X^2-1}{2}P''\right) \leq n, \deg(XP') \leq n$$

et ainsi

$$\deg(f(P)) \leq \max\left(\deg\left(\frac{X^2-1}{2}P''\right), \deg(XP'), \deg P\right) \leq n$$

D'où le «endo» de endomorphisme. Puis la linéarité est simple car si $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \frac{X^2-1}{2}(\lambda P + Q)'' - X(\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q) \\ &= \frac{X^2-1}{2}(\lambda P'' + Q'') - X(\lambda P' + Q') + (\lambda P + Q) \quad (\text{linéarité de la dérivation}) \\ &= \lambda\left(\frac{X^2-1}{2}P'' - XP' + P\right) + \left(\frac{X^2-1}{2}Q'' - XQ' + Q\right) \quad (\text{distributivité ou ...}) \end{aligned}$$

Pour l'injectivité, il suffit de lire tout le sujet (c'est souvent une bonne idée!) pour se dire que $f(X) = 0$ donc que $\ker f \neq \{0\}$. Ainsi f n'est pas injective et donc n'est pas surjective (relire le cours ou bien le retrouver avec la FDR qui donne $\dim \operatorname{Im} f = n + 1 - \dim \ker f \leq n$ car $\dim \ker f \geq 1$).

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} f(X^k) &= \frac{X^2-1}{2} \times k(k-1)X^{k-2} - X \times kX^{k-1} + X^k \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{2}X^k - \frac{k(k-1)}{2}X^{k-2} \end{aligned}$$

On en déduit que (ou on fait le calcul)

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \text{ d'où } f^2(1) = f(1) = 1 \\ f(X) &= 0 \text{ d'où } f^2(X) = f(X) = 0 \\ f(X^2) &= -1 \text{ d'où } f^2(X^2) = f(-1) = -1 = f(X^2) \text{ et au passage } f(X^2 + 1) = 0 \\ f(X^3) &= X^3 - 3X \text{ d'où } f^2(X^3) = f(X^3 - 3X) = f(X^3) - 3f(X) = f^2(X^3) \end{aligned}$$

Ainsi $f^2 = f$ sur la base canonique. Puisque l'image d'une base définit une unique AL, on en déduit que $f^2 = f$. Puis

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \operatorname{Vect}(1, 0, -1, X^3 - 3X) \\ &= \operatorname{Vect}(1, X^3 - 3X) \quad (\text{cohérent avec la suite}) \end{aligned}$$

donc $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Par la FDR, on a $\dim \ker f = 4 - 2$. Or $f(1) = f(X^2 - 1) = 0$ donc $\operatorname{Vect}(1, X^2 - 1) \subset \ker f$. Puisque $(1, X^2 - 1)$ est libre car échelonnée en degré, on a $\dim \operatorname{Vect}(1, X^2 - 1) = 2 = \dim \ker f$, d'où $\operatorname{Vect}(1, X^2 - 1) = \ker f$. Au final, f est la projection sur $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(1, X^3 - 3X)$ dans la direction de $\ker f = \operatorname{Vect}(1, X^2 - 1)$.

- 3.

- (a) On a calculé $f(X^k) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}X^k - \frac{k(k-1)}{2}X^{k-2}$ donc pour $k \notin \{1, 2\}$, on a $\deg f(X^k) = k$. La famille $(f(1), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n))$ est donc échelonnée en degré donc libre donc

$$\dim \operatorname{Vect}(f(1), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n)) = n - 1$$

or

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n))$$

donc

$$\operatorname{Vect}(f(1), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n)) \subset \operatorname{Im} f$$

ce qui prouve que $\dim \operatorname{Im} f \geq n - 1$ et par la FDR on a $\dim \ker f \leq 2$. Enfin, $f(1) = f(X^2 - 1) = 0$ donc $\operatorname{Vect}(1, X^2 - 1) \subset \ker f$ d'où $\dim \ker f \geq 2$ et pour finir $\ker f = \operatorname{Vect}(1, X^2 - 1)$.

- (b) On récupère alors $\dim \operatorname{Im} f = n - 1$ et ainsi $(f(1), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$ et de cardinal égal à $\dim \operatorname{Im} f$ donc est une base de $\operatorname{Im} f$.

Remarque : Il me semble plus rapide d'écrire directement que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n)) \\ &= \operatorname{Vect}(1, 0, -1, f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n)) \\ &= \operatorname{Vect}(1, f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n)) = \operatorname{Vect}(f(1), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n)) \end{aligned}$$

Puis $(f(1), f(X^3), f(X^4), \dots, f(X^n))$ est libre car échelonnée donc est une base de $\operatorname{Im} f$. On en déduit $\dim \operatorname{Im} f$, puis (FDR) $\dim \ker f$ et enfin $\ker f$. Mais il faut suivre l'énoncé....

- (c) Si $Q \in \operatorname{Im} f$ alors $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$. Ainsi

$$\frac{X^2 - 1}{2} P'' - XP' + P = Q$$

En dérivant, on obtient

$$XP'' + \frac{X^2 - 1}{2} P^{(3)} - P' - XP'' + P' = \frac{X^2 - 1}{2} P^{(3)} = Q$$

d'où $Q'(1) = Q'(-1) = 0$. Ceci permet d'affirmer que, en posant $F = \{Q \in E, Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$

$$\operatorname{Im} f \subset F$$

Pour conclure à l'égalité, il suffit de prouver que ① F est un SEV de E et ② $\dim F = \dim \operatorname{Im} f$. Le plus simple est de considérer $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(Q) = \begin{pmatrix} Q'(1) \\ Q'(-1) \end{pmatrix}$ qui est linéaire (car la dérivation et l'évaluation le sont). On a alors $F = \ker \varphi$. On a $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi(X^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc

$$\operatorname{Vect}(\varphi(X), \varphi(X^2)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \subset \operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R}^2$$

Mais $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (le déterminant dans la base canonique vaut $-4 \neq 0$) donc $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$. Tout cela donne $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^2$ et par la FDR, $\dim \ker \varphi = n + 1 - 2 = n - 1 = \dim \operatorname{Im} f$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\operatorname{Im} f = \{Q \in E, Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$.

21.3 Un peu plus théorique

Exercice de khôlle 754

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^{n-1} \neq 0$ et que $f^n = 0$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq \vec{0}$, montrer que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
2. Déterminer $\operatorname{rg}(f)$ puis $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

Solution :

1. On a $\operatorname{Card}(\mathcal{B}) = n = \dim E$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = \vec{0}$$

Alors, par linéarité,

$$\begin{aligned}\vec{0} &= f^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) \right) = \lambda_0 f^{n-1}(x_0) + \lambda_1 f^n(x_0) + \lambda_2 f^{n+1}(x_0) + \dots + \lambda_n f^{2n-1}(x_0) \\ &= \lambda_0 f^{n-1}(x_0) + \lambda_1 f^n(x_0) + \lambda_2 (f \circ f^n)(x_0) + \dots + \lambda_n (f^{n-1} \circ f^n)(x_0) \\ &= \lambda_0 f^{n-1}(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (f^{k-1} \circ f^n)(x_0) = \lambda_0 f^{n-1}(x_0) \text{ car } f^n = 0\end{aligned}$$

puisque $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, on a $\lambda_0 = 0$. Puis on recommence en composant par $f^{n-2} \dots$

Si on veut bien le rédiger : Par l'absurde, s'il existe $p \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$ tel que $\lambda_p \neq 0$, soit m le plus petit entier p de la sorte (donc $m = \min \{p \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket \text{ tel que } \lambda_p \neq 0\}$). Alors

$$\vec{0} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = \lambda_p f^p(x_0) + \sum_{k=p+1}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

d'où

$$\vec{0} = f^{n-1-p} \left(\lambda_p f^p(x_0) + \sum_{k=p+1}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) \right) = \lambda_p f^{n-1}(x_0) + \sum_{k=p+1}^{n-1} \lambda_k \underbrace{f^{n-1-p+k}(x_0)}_{=\vec{0} \text{ car } n-p+k \geq n} = \lambda_p \underbrace{f^{n-1}(x_0)}_{\neq \vec{0}}$$

d'où $\lambda_p = 0$, absurde. Conclusion $\mathcal{B}$ est libre et est ainsi une base de E .

2. On a alors

$$\text{Im } f = \text{Vect } f(\mathcal{B}) = \text{Vect} \left(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), \underbrace{f^n(x_0)}_{=\vec{0}} \right) = \text{Vect} (f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

Puisque $(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre (sous famille de $\mathcal{B}$), c'est une base de $\text{Im } f$ et ainsi $\dim \text{Im } f = n-1$. Par la FDR $\dim \ker f = 1$, or $f^{n-1}(x_0) \in \ker f$ et est non nul donc en est une base. Conclusion

$$\ker f = \text{Vect} (f^{n-1}(x_0))$$

Exercice de khôlle 755

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ telles que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) < n$.

On veut montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = g(x) = \vec{0}$.

1. Traduire le résultat à l'aide de la dimension d'un espace défini par les noyaux de f et g .
2. Evaluer $\dim(\ker f + \ker g)$ et conclure.

Solution :

1. Cela revient à prouver que $\ker f \cap \ker g \neq \{\vec{0}\}$, donc que $\dim(\ker f \cap \ker g) \geq 1$.
2. Par Grassmann

$$\dim(\ker f + \ker g) = \dim \ker f + \dim \ker g - \dim(\ker f \cap \ker g)$$

Par la FDR

$$\begin{aligned}\dim(\ker f + \ker g) &= \dim E - \text{rg}(f) + \dim E - \text{rg}(g) - \dim(\ker f \cap \ker g) \\ &= 2n - (\text{rg}(f) + \text{rg}(g)) - \dim(\ker f \cap \ker g)\end{aligned}$$

d'où

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = 2n - (\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)) - \dim(\ker f + \ker g) > n - \dim(\ker f + \ker g)$$

Mais $\ker f + \ker g \subset E$ donc $\dim(\ker f + \ker g) \leq n$ et ainsi

$$\dim(\ker f \cap \ker g) > 0$$

comme $\dim(\ker f \cap \ker g)$ est un entier, c'est gagné.

Exercice de khôlle 756

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et Id l'application identité de E . On suppose que

$$f \circ g = f$$

Montrer que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(I - g) \leq \dim E$$

Solution : Rappel : Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ alors $u \circ v = 0 \iff \operatorname{Im} v \subset \ker u$. On reformule,

$$f - f \circ g = f \circ (I - g) = 0$$

d'où $\operatorname{Im}(I - g) \subset \ker f$ ainsi

$$\dim \operatorname{Im}(I - g) = \operatorname{rg}(I - g) \leq \dim \ker f = \dim E - \operatorname{rg} f$$

Exercice de khôlle 757

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $(a, b) \in \mathcal{L}(E)^2$ et Id l'application identité de E . On suppose que

$$a^2 = a = a \circ b \text{ et } b^2 = b = b \circ a$$

Montrer que $\operatorname{rg} a = \operatorname{rg} b$.

Solution : Puisque $a^2 = a$ et $b^2 = b$, on sait que a et b sont deux projecteurs. Puis

$$a = a \circ b \text{ d'où } a \circ (Id - b) = 0 \text{ et ainsi } \operatorname{Im}(Id - b) \subset \ker a$$

On sait que pour un projecteur b , $\operatorname{Im}(Id - b) = \ker b$, on en déduit que $\ker b \subset \ker a$ et par symétrie des rôles $\ker a = \ker b$. Par la FDR, $\operatorname{rg}(a) = \dim E - \dim \ker a = \dim E - \dim \ker b = \operatorname{rg}(b)$.

Remarque : Si on veut prouver que $\operatorname{Im}(Id - b) = \ker b$. Par double inclusion, si $y \in \operatorname{Im}(Id - b)$ alors $\exists x \in E$, $y = x - b(x)$ d'où $b(y) = b(x) - b^2(x) = b(x) - b(x) = \vec{0}$, ainsi $y \in \ker b$. Ceci prouve que $\operatorname{Im}(Id - b) \subset \ker b$. Réciproquement si $x \in \ker b$ alors

$$x = x - b(x) = (Id - b)(x) \text{ d'où } x \in \operatorname{Im}(Id - b)$$

ce qui prouve $\ker b \subset \operatorname{Im}(Id - b)$ et par double inclusion que $\operatorname{Im}(Id - b) = \ker b$.

Exercice de khôlle 758

Soit E de dimension finie $n \geq 1$ et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que

$$f \circ g = 0 \text{ et } f + g \in GL(E)$$

Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$ et que $\ker f = \text{Im } g$.

Solution : De $f \circ g = 0$, on déduit que $\text{Im } g \subset \ker f$ donc $\text{rg } g = \dim \text{Im } g \leq \dim \ker f = n - \text{rg } f$ ce qui donne

$$\text{rg } f + \text{rg } g \leq n$$

Puis $f + g \in GL(E)$ donc $\text{rg}(f + g) = n$. Mais

$$\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$$

car si $y = (f + g)(x)$ alors $y = f(x) + g(x)$ est bien un élément de $\text{Im } f + \text{Im } g$. On a donc

$$E \subset \text{Im } f + \text{Im } g \text{ et } \text{Im } f + \text{Im } g \subset E \text{ car ce sont des SEV de } E$$

Par double inclusion, $E = \text{Im } f + \text{Im } g$. Mais par Grassmann

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim(\text{Im } f + \text{Im } g) = \dim \text{Im } f + \dim \text{Im } g - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) \\ \text{soit } n &= \text{rg } f + \text{rg } g - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) \text{ d'où } \text{rg } f + \text{rg } g = n + \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) \geq n \end{aligned}$$

Par double inégalité, $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.

Pour finir, on a donc $\dim \ker f = \dim E - \text{rg } f = n - (n - \text{rg } g) = \text{rg } g = \dim \text{Im } g$, et l'inclusion $\text{Im } g \subset \ker f$ (relire le début de la correction) permet d'affirmer que $\text{Im } g = \ker f$.

Exercice de khôlle 759

Soit E de dimension n , f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. On pose $h = g \circ f$.

1. Quelles inclusions peut-on déduire des hypothèses sur les noyaux et les images de f, g et h ?
2. Montrer que f, g et h ont même rang.
3. Prouver que $E = \ker f \oplus \text{Im } g$.

Solution :

1. De $h = g \circ f$ on déduit

$$\begin{aligned} \text{Im } h &\subset \text{Im } g \text{ car si } y = h(x) \text{ alors } y = g(f(x)) \\ \ker f &\subset \ker h \text{ car si } f(x) = \vec{0} \text{ alors } h(x) = g(f(x)) = g(\vec{0}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Puis, de même, $f = f \circ h$ donc $\ker h \subset \ker f$ et par double inclusion $\ker f = \ker h$.

Enfin $h \circ g = g$ donc $\text{Im } g \subset \text{Im } h$ et par double inclusion $\text{Im } g = \text{Im } h$.

2. De $\text{Im } g = \text{Im } h$ on déduit $\text{rg } g = \text{rg } h$, et de $\ker f = \ker h$ et par la FDR

$$\dim \ker f = \dim \ker h \text{ d'où } \dim E - \text{rg } f = \dim E - \text{rg } h$$

donc $\text{rg } f = \text{rg } h = \text{rg } g$.

3. On a déjà (car $\text{rg } f = \text{rg } g$)

$$\dim E = \dim \ker f + \text{rg } f = \dim \ker f + \text{rg } g = \dim \ker f + \dim \text{Im } g$$

Reste à montrer que $\ker f \cap \text{Im } g \subset \{\vec{0}\}$ (l'autre inclusion étant évidente). Mais si $y \in \ker f \cap \text{Im } g$, alors

$$\begin{aligned} \exists x &\in E, y = g(x) \text{ car } y \in \text{Im } g \\ f(y) &= \vec{0} \text{ car } y \in \ker f \end{aligned}$$

donc $f(g(x)) = \vec{0}$ d'où $\vec{0} = g(f(g(x))) = (g \circ f \circ g)(x) = g(x) = y$ et c'est fini.

Exercice de khôlle 760

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Dans tout l'exercice, f et g sont deux endomorphismes tels que $f \circ g = 0$.

1. Montrer que $\text{rg } f + \text{rg } g \leq n$.
2. Si f est donnée, construire un exemple pour g tel que $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.
3. Montrer que si $\ker f \cap \ker g = \{\vec{0}\}$ alors $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.
4. On suppose que $n \geq 2$ et que $f \neq 0$ est donnée tel que $\text{rg } f < n$, donner un exemple pour g tel que $g \circ f \neq 0$ et $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.

Solution : Puisque $f \circ g = 0$, on a $\text{Im } g \subset \ker f$.

1. De $\text{Im } g \subset \ker f$, on déduit $\dim \text{Im } g = \text{rg } g \leq \dim \ker f = \dim E - \text{rg } f = n - \text{rg } f$ d'où $\text{rg } g + \text{rg } f \leq n$.
2. Avant tout, on veut que $\text{Im } g \subset \ker f$. Soit S un supplémentaire de $\ker f$, et g la projection sur $\ker f$ de direction S . On sait que $\text{Im } g = \ker f$ donc $f \circ g = 0$. Puis $\text{rg } g = \dim \text{Im } g = \dim \ker f = n - \text{rg } f$ donc $\text{rg } g + \text{rg } f = n$.
3. On a alors $\dim(\ker f + \ker g) = \dim \ker f + \dim \ker g$ par Grassmann. D'où

$$\dim(\ker f + \ker g) = 2n - (\text{rg } f + \text{rg } g)$$

mais $\ker f + \ker g \subset E$ donc $\dim(\ker f + \ker g) \leq n$. On en déduit

$$2n - (\text{rg } f + \text{rg } g) \leq n \text{ d'où } n \leq \text{rg } f + \text{rg } g$$

Puisque l'on a montré que $\text{rg } f + \text{rg } g \leq n$, on en déduit que $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.

4. Avant tout $f \neq 0$ car sinon $g \circ f = f \circ g = 0$, et $\text{rg } f \neq n$ sinon f est un automorphisme et $f \circ g = 0 \implies f^{-1} \circ f \circ g = g = 0$ d'où $g \circ f = 0$. On a un candidat pour g , l'endomorphisme de la question 2. On sait que $g \circ f = 0$ équivaut à $\text{Im } f \subset \ker g = S$. Donc il suffit de montrer qu'il existe un supplémentaire de $\ker f$ qui ne contient pas $\text{Im } f$.

Par l'absurde, si tout supplémentaire S de $\ker f$ contient $\text{Im } f$, par la FDR on a $\dim \text{Im } f = \dim E - \dim \ker f = \dim S$ d'où $S = \text{Im } f$. Et ainsi $\ker f$ a un unique supplémentaire ! On sait que $\ker f \neq E$ (car $f \neq 0$) et $\ker f \neq \{\vec{0}\}$, soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker f$ (donc $1 \leq p < n$), on la complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . On sait que $S = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est un supplémentaire de $\ker f$. Il est évident que

$$\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1} + e_1, e_{p+2}, \dots, e_n)$$

est une base de E (écrire la matrice de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}$) et $S_1 = \text{Vect}(e_{p+1} + e_1, \dots, e_n)$ est un supplémentaire de $\ker f$. On a donc, par hypothèse, $S_1 = S$ donc $e_1 = (e_{p+1} + e_1) - e_{p+1} \in S$ donc $(e_1, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est liée, absurde !

Exercice de khôlle 761

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est positivement génératrice si tout vecteur de E est combinaison linéaire à coefficients positifs (ou nuls) des éléments de $\mathcal{F}$.

- Justifier qu'une telle famille a au moins n vecteurs et est liée.
- Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .
 - Donner une famille de vecteurs positivement génératrice de E ayant $2n$ vecteurs.
 - On pose $s = \sum_{k=1}^n e_k$, justifier que $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n, -s)$ est une famille de vecteurs positivement génératrice de E .
- Quel est le cardinal minimum d'une famille de vecteurs positivement génératrice de E ?

Solution :

- La famille $\mathcal{F}$ est génératrice, donc de cardinal au moins égal à n . Si on note $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ où $p \geq n \geq 1$, alors $-e_1$ est combinaison linéaire à coefficients positifs de $(e_1, \dots, e_p)$. On peut écrire

$$-e_1 = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k \text{ où } \forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_k \geq 0$$

on en déduit que

$$(1 + \lambda_1) e_1 + \sum_{k=2}^p \lambda_k e_k = \vec{0}$$

ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est liée (car le coefficient $1 + \lambda_1$ est non nul).

Remarque : De manière plus rapide, si $\mathcal{F}$ est libre, puisqu'elle est génératrice, c'est une base de E . Par définition des coordonnées, puisque tout vecteur est combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs de $\mathcal{F}$, tout vecteur a ses coordonnées positives. Absurde car $-e_1$ a pour coordonnées $(-1, 0, \dots, 0)$.

2.

- On prend $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n) = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ où

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, e_{n+k} = -e_k$$

Si $x \in E$ alors x se décompose (de manière unique) sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

si on pose $\alpha_k = \max(\lambda_k, 0)$ et $\beta_k = \max(-\lambda_k, 0)$ alors

$$\begin{aligned} \lambda_k e_k &= \alpha_k e_k + \beta_k \times (-e_k) = \alpha_k e_k + \beta_k e_{n+k} \\ \alpha_k &\geq 0 \text{ et } \beta_k \geq 0 \end{aligned}$$

on a alors

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k + \beta_k e_{n+k} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

- C'est un peu le même genre d'idée. Si $x \in E$ alors x se décompose (de manière unique) sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

Ce que l'on écrit

$$x = \left(\sum_{k=1}^n (\lambda_k + \mu) e_k \right) + \mu \times (-s)$$

On choisit μ tel que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k + \mu \geq 0$ et $\mu \geq 0$ (donc $\mu \geq \max(-\lambda_1, \dots, -\lambda_n, 0)$) et c'est gagné.

3. On a vu que c'est au moins $n + 1$ (question 1) et on a donné une telle famille de cardinal $n + 1$. Donc le cardinal minimum d'une famille de vecteurs positivement génératrice de E est exactement $n + 1$.

Exercice de khôlle 762

Un tournoi est constitué de n joueurs (numérotés de 1 à n) qui disputent m rencontres en équipes. Lors de la $k^{\text{ième}}$ rencontre, on forme deux équipes A et B . Ces deux équipes n'ont pas nécessairement le même nombre de joueurs, tous les joueurs ne jouent pas toutes les rencontres (mais bien sûr il n'y a pas d'équipe vide). On suppose qu'au bout des m rencontres, chaque joueur a affronté chacun des autres joueurs une et une seule fois.

Par exemple s'il y a 4 joueurs 1, 2, 3 et 4, un exemple possible de tournoi est le suivant :

Rencontre	1	2	3	4
Equipe A	{1}	{3}	{1, 2}	{4}
Equipe B	{2}	{4}	{3}	{1, 2}

On se propose de montrer que $m \geq n - 1$.

- On définit la matrice $M_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i, j) , noté $[M_k]_{(i,j)}$, vaut 1 si, lors de la $k^{\text{ième}}$ rencontre, le $i^{\text{ième}}$ joueur était dans l'équipe A et le $j^{\text{ième}}$ dans l'équipe B et vaut 0 sinon. Quel est le rang de M_k ?
- On pose $M = \sum_{k=1}^m M_k$, que vaut $M + M^T$? Puis, pour $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, calculer $V^T (M + M^T) V$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $\text{rg}(A) \leq n - 2$ alors il existe un vecteur $V \in \ker A$, non nul et dont la somme des composantes vaut 0.
- Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, montrer que $\text{rg}(A + B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$. En déduire que $\text{rg}(M) \leq m$.
- Conclure à une absurdité si $m \leq n - 2$.
- Donner un exemple de tournoi pour lequel $m = n - 1$ (ce qui montre que l'on ne peut améliorer la minoration de m).

Solution : Le résultat que l'on cherche à établir est le théorème de GRAHAM et POLLAK (en fait une reformulation de ce théorème qui concerne les graphes complets).

1. On commence par regarder sur l'exemple. On a

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pas vraiment probant ! On réfléchit un peu, si $B = (j_1, \dots, j_q)$ alors pour $i \notin A$, la ligne i est nulle et si $i \in A$, la ligne i est toujours la même (on a des 0 et des 1 aux indices $j_1, \dots, j_q$). Donc

$$\text{rg}(M_k) = 1$$

2. On a $M + M^T = \sum_{k=1}^m (M_k + M_k^T)$. La matrice $M_k + M_k^T$ est plus simple à comprendre. Elle est constituée de 1 et de 0 avec un 1 en indice (i, j) si et seulement si les joueurs i et j s'affrontent lors du $k^{\text{ième}}$ tournoi.

Remarque : Si on représente le $k^{\text{ième}}$ tournoi comme un graphe (où les sommets sont les joueurs, les arêtes relient deux joueurs qui s'affrontent), alors $M_k + M_k^T$ est sa matrice d'adjacence.

Puisque chaque joueur rencontre une et une seule fois chacun des autres (mais jamais lui-même, il n'a pas le don

d'ubiquité), on a avec J la matrice n'ayant que des «1» (la barbare) et I la matrice identité

$$M + M^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I$$

$$\text{Si } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ alors } V^T V = \sum_{i=1}^n v_i^2 \text{ et } JV = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i \end{pmatrix} \text{ d'où } V^T JV = \left(\sum_{i=1}^n v_i \right)^2 \text{ d'où}$$

$$V^T (M + M^T) V = \left(\sum_{i=1}^n v_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n v_i^2$$

$$3. \text{ Si } U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est le vecteur constitué de } 1 \text{ et si } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ alors } U^T V = \sum_{i=1}^n v_i \text{ est égal à la somme}$$

des composantes de v . Si $\text{rg}(A) \leq n - 2$ alors $\dim \ker A \geq 2$ par la FDR. Soit (E_1, E_2) deux vecteurs libres de $\ker A$ (par exemple les deux premiers vecteurs d'une base de $\ker A$, qui en contient au moins 2). On cherche v sous la forme $V = \lambda E_1 + E_2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. On a ainsi

$$U^T V = \lambda U^T E_1 + U^T E_2$$

Si $U^T E_1 = 0$, on choisit $V = E_1$, sinon on choisit $\lambda = -\frac{U^T E_2}{U^T E_1}$ pour avoir $U^T V = 0$ (et on a bien $V \in \ker A$).

4. On a $\text{Im}(A + B) \subset \text{Im } A + \text{Im } B$ (car $(A + B)X = AX + BX$) d'où, avec Grassmann

$$\text{rg}(A + B) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B) - \dim(\text{Im } A \cap \text{Im } B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$$

Puis par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{rg}\left(\sum_{k=1}^m A_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \text{rg}(A_k)$. Puisque

$\text{rg}(M_k)$, on en déduit que $\text{rg}(M) \leq \sum_{k=1}^n 1 = n$.

$$5. \text{ Si } \text{rg}(M) \leq n - 2, \text{ il existe donc } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ tel que } M \times V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{i=1}^n v_i = 0. \text{ Mais alors}$$

$$V^T M^T = (0, \dots, 0) \text{ d'où}$$

$$V^T (MV) + (V^T M^T) V = 0$$

Gagné car cela donne $\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n v_i^2 = -\sum_{i=1}^n v_i^2 = 0$ d'où $v = \vec{0}$, absurde!

6. On fait au plus simple! On organise ainsi le tournoi :

Rencontre	1	2	3	...	$n - 1$
Equipe A	{1}	{2}	{3}	...	{ $n - 1$ }
Equipe B	{2, 3, ..., n }	{3, 4, ..., n }	{4, ..., n }	...	{ n }

Exercice de khôlle 763

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \ker f^k$ le noyau de f^k .

1. Que vaut N_0 ?
2. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$.
3. Soit φ_k la restriction de f à N_{k+1} .
 - (a) Montrer que $\text{Im } \varphi_k \subset N_k$
 - (b) Montrer que $\ker \varphi_k = N_{k+1} \cap N_1$.
 - (c) En déduire que $\dim N_{k+1} - \dim N_k \leq \dim N_1$.
4. On suppose que $f^n = 0$ (on dit que f est nilpotente) et que $\text{rg } f = n - 1$. Montrer que pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ on a $\dim N_k = p$.

Solution :

1. On a $N_0 = \ker f^0 = \ker \text{Id} = \left\{ \vec{0} \right\}$.
2. Si $x \in N_k$ alors $f^k(x) = \vec{0}$ d'où $f(f^k(x)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$. Puis $f(f^k(x)) = f^{k+1}(x)$ on en déduit que $N_k \subset N_{k+1}$.
3.
 - (a) Si $x \in N_{k+1}$ alors $f^{k+1}(x) = \vec{0}$. Mais $f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = f^k(\varphi_k(x))$ (bien comprendre que pour écrire que $f(x) = \varphi_k(x)$ il faut être sûr que x est dans le domaine de définition de φ_k , donc dans N_{k+1}). On a donc $f^k(\varphi_k(x)) = \vec{0}$, ainsi

$$\forall x \in N_{k+1}, \varphi_k(x) \in N_k \text{ ce qui se traduit par } \text{Im } \varphi_k \subset N_k$$

- (b) Si $x \in N_{k+1} \cap N_1$ alors $x \in N_1$ donc $f(x) = \varphi_k(x) = \vec{0}$. Conclusion, $\varphi_k(x) = \vec{0}$ d'où $N_{k+1} \cap N_1 \subset \ker \varphi_k$. Réciproquement, si $x \in \ker \varphi_k$ alors $x \in N_{k+1}$ (car x est dans le domaine de définition de φ_k) et $\varphi_k(x) = f(x) = \vec{0}$. Ainsi

$$x \in N_{k+1} \cap N_1$$

- (c) La FDR donne

$$\dim N_{k+1} = \dim \text{Im } \varphi_k + \dim \ker \varphi_k$$

Mais $\text{Im } \varphi_k \subset N_k$ donc $\dim \text{Im } \varphi_k \leq \dim N_k$ et $\ker \varphi_k = N_{k+1} \cap N_1 \subset N_1$ donc $\dim \ker \varphi_k \leq \dim N_1$. On en déduit que

$$\dim N_{k+1} \leq \dim N_k + \dim N_1$$

ce qui l'inégalité demandée.

- (d) On a $\text{rg } f = n - 1$ donc $\dim \ker f = \dim N_1 = 1$. Ainsi

$$\dim N_{k+1} - \dim N_k \leq 1 \text{ donc } \dim N_{k+1} - \dim N_k \in \{0, 1\}$$

en sommant on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\dim N_{k+1} - \dim N_k) = \dim N_n - \dim N_0 = n \text{ (car } N_n = E \text{ et } N_0 = \left\{ \vec{0} \right\})$$

S'il existe un indice $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ tel que $\dim N_{k+1} - \dim N_k = 0$ alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\dim N_{k+1} - \dim N_k) < \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

absurde ! Donc pour $k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$, on a $\dim N_{k+1} - \dim N_k = 1$. Mais alors pour $p \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$

$$\dim N_p = \dim N_p - \dim N_0 = \sum_{k=0}^{p-1} (\dim N_{k+1} - \dim N_k) = p$$

(et on a aussi $\dim N_n = n$!).

En particulier $f^{n-1} \neq 0$ (car $\dim N_{n-1} = n-1$ donc $\dim \operatorname{Im} f_{n-1} = 1$).

Exercice de khôlle 764

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in L(E)$. On suppose qu'il existe p projecteur tel que

$$\operatorname{rg} p = \operatorname{rg} f \text{ et } p \circ f = f \circ p = f$$

1. Montrer que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
2. Que pensez-vous de la réciproque ?

Solution : On note $I = Id_E$. On sait (cours sur les projecteurs) que $\operatorname{Im} p = \ker(I - p)$ et $\ker p = \operatorname{Im}(I - p)$.

1. On a $f = p \circ f$ ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} p$. En effet si $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = p(f(x))$ d'où $y \in \operatorname{Im} p$. Par égalité des dimensions ($\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} p = \operatorname{rg} p$), on a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} p$.

De même $f \circ p = f$ donc $\ker p \subset \ker f$ car si $x \in \ker p$ alors $f(x) = f(p(x)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ d'où $x \in \ker f$. Par la FDR on a égalité des dimensions ($\dim \ker f = n - \operatorname{rg} f = n - \operatorname{rg} p = \dim \ker p$) d'où $\ker p = \ker f$.

Enfin, pour un projecteur, on a $\ker p \oplus \operatorname{Im} p = E$ d'où $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

Remarque : Au passage cela montre que le seul projecteur p tel que $\operatorname{rg} p = \operatorname{rg} f$ et $p \circ f = f \circ p = f$ est celui sur $\operatorname{Im} f$ et de direction $\ker f$.

2. La réciproque est vrai. Si $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$, soit p la projection sur $\operatorname{Im} f$ de direction $\ker f$. Pour $x \in E$, on a $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} p$ d'où $p(f(x)) = f(x)$, ce qui prouve que $p \circ f = f$. Puis si $x \in E$, on a $x - p(x) \in \ker p$ d'où

$$f(x - p(x)) = f(x) - f(p(x)) = 0$$

ce qui prouve que $f - f \circ p = 0$ d'où $f \circ p = f$. Enfin $\operatorname{rg} p = \dim \operatorname{Im} p = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$.

Remarque : Il existe toujours un projecteur de E tel que $p \circ f = f \circ p = f$, par exemple $p = Id_E$! La condition $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} p$ donne l'unicité de p tel que $p \circ f = f \circ p = f$.

Exercice de khôlle 765

(★) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in L(E)$. On note $I = Id_E$, montrer que

$$f \text{ est un projecteur} \iff \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(I - f) = \dim E$$

Indication : Pour le sens $\Leftarrow$: Montrer que $\ker(I - f) = \operatorname{Im} f$.

Solution : Sens $\Rightarrow$: Immédiat car, si f est un projecteur, $\operatorname{Im}(I - f) = \ker f$ et la FDR donne $\operatorname{rg} f + \dim \ker f = \dim E$.

Sens $\Leftarrow$: Hypothèse : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(I - f) = \dim E$.

On suit l'indication. On a $\ker(I - f) \subset \operatorname{Im} f$ car si $(I - f)(x) = \vec{0}$ alors $x = f(x) \in \operatorname{Im} f$. Mais $\dim \ker(I - f) = n - \operatorname{rg}(I - f) = n - (n - \operatorname{rg} f) = \operatorname{rg} f$ d'où

$$\ker(I - f) = \operatorname{Im} f$$

Mais alors si $x \in E$, $f(x) \in \text{Im } f = \ker(I - f)$ d'où

$$(I - f)(f(x)) = f(x) - f^2(x) = \vec{0}$$

Ceci montre que $f^2 = f$ donc que f est un projecteur.

Remarque : Autre méthode, par la FDR,

$$\dim \ker f + \dim \ker(I - f) = n - \text{rg}(f) + n - \text{rg}(I - f) = n$$

On montre ensuite que la somme $\ker f + \ker(I - f)$ est directe. Soit $x \in \ker f \cap \ker(I - f)$ alors

$$f(x) = \vec{0} \text{ et } (I - f)(x) = x - f(x) = \vec{0} \text{ d'où } x = \vec{0}$$

Ceci montre que $\ker f \cap \ker(I - f) \subset \{\vec{0}\}$, la réciproque est évidente d'où $\ker f \cap \ker(I - f) = \{\vec{0}\}$. On a donc

$$\ker f \oplus \ker(I - f) = E$$

Soit $g = f - f^2 = (I - f) \circ f = f \circ (I - f)$. Si $x \in \ker f$ alors $g(x) = (I - f)(f(x)) = \vec{0}$. Si $x \in \ker(I - f)$ alors $g(x) = f((I - f)(x)) = \vec{0}$. Conclusion g est nulle sur deux espaces supplémentaires donc est identiquement nulle.

Exercice de khôlle 766

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, F un SEV de E de dimension p où $0 < p < n$ et G un supplémentaire de F . Soit $a \in F$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base de G .

1. Que vaut r en fonction de n et p ?
2. Montrer que la famille $\mathcal{F}_a = (a + e_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre.
3. Soit $G_a = \text{Vect}(\mathcal{F}_a)$, montrer que G_a est un supplémentaire de F dans E .

Solution :

1. Cours! On a $n = p + r$ donc $r = n - p$.
2. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tels que $\sum_{k=1}^r \lambda_k (a + e_k) = \vec{0}$ alors

$$\left(-\sum_{k=1}^r \lambda_k\right)a = \sum_{k=1}^r \lambda_k e_k$$

Puisque $\left(-\sum_{k=1}^r \lambda_k\right)a \in F$ et $\sum_{k=1}^r \lambda_k e_k \in G$, ces deux vecteurs sont dans $F \cap G = \{\vec{0}\}$ donc sont nuls. Mais alors, par liberté (dont je chéris le nom) de $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k e_k = \vec{0} \text{ implique } \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$$

Ce qui prouve que $\mathcal{F}_a$ est libre.

3. Ainsi $\mathcal{F}_a$ est une base de G_a d'où $\dim G_a = r$ et on a bien $\dim E = \dim F + \dim G_a$. Reste à prouver que $F \cap G_a = \{\vec{0}\}$. Soit $u \in F \cap G_a$ alors $u \in F$ et $u \in G_a$ donc $\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{K}^r$ tel que $u = \sum_{k=1}^r \lambda_k (a + e_k)$. Mais alors

$$u - \sum_{k=1}^r \lambda_k a = \sum_{k=1}^r \lambda_k e_k$$

Puisque $u \in F$ et $a \in F$, on a $u - \sum_{k=1}^r \lambda_k a \in F$. Et puisque $\sum_{k=1}^r \lambda_k e_i \in G$ cela implique que $\sum_{k=1}^r \lambda_k e_i \in F \cap G = \{\vec{0}\}$ donc que $\sum_{k=1}^r \lambda_k e_i = \vec{0}$. Par liberté, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ et enfin $u = \vec{0}$. Conclusion $F \cap G_a \subset \{\vec{0}\}$, l'autre inclusion étant évidente, on a $F \cap G_a = \{\vec{0}\}$. Par le corollaire de Grassmann, $F \oplus G_a = E$.

Remarque : Donc si $\mathbb{K}$ est un corps infini (c'est le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on a une infinité de supplémentaires (sauf si $F = \{\vec{0}\}$ ou $F = E$).

Exercice de khôlle 767

Soit $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de E . Montrer que la famille $(f'_1, \dots, f'_n)$ est de rang au moins égal à $n - 1$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Solution : Soit $\varphi : \text{Vect}(f_1, \dots, f_n) \longrightarrow \text{Vect}(f'_1, \dots, f'_n)$ définie par $\varphi(f) = f'$. Par linéarité de la dérivation φ est linéaire. Si $f \in \ker \varphi$ alors $f' = 0$ d'où f est constante, ainsi

$$\ker \varphi \subset \text{Vect}(\tilde{1})$$

où $\tilde{1}$ est la fonction constante égale à 1 (qui est dans E). On en déduit que $\dim \ker \varphi \leq 1$ et ainsi par la FDR

$$\dim \text{Im } \varphi \geq n - 1$$

Puisque $\text{Im } \varphi \subset \text{Vect}(f'_1, \dots, f'_n)$ on a $\dim \text{Vect}(f'_1, \dots, f'_n) \geq n - 1$ ce qui se traduit par $\text{rg}(f'_1, \dots, f'_n) \geq n - 1$.

Remarque : En fait il est évident que $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(f'_1, \dots, f'_n)$. Et on constate que $\text{rg}(f'_1, \dots, f'_n) = n - 1$ si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 1$.

Exercice de khôlle 768

1. Préliminaire : Soient F et G deux espaces vectoriels de dimension finie au moins égale à 1. Montrer que $F \times G$ est de dimension finie et préciser sa dimension en fonction de celle de F et de G .

Indication : construire une base de $F \times G$ à l'aide de bases de F et de G .

2. Soit φ défini sur $E = \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$ par

$$\forall (P(X), \alpha) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}, \varphi(P(X), \alpha) = XP(X) + \alpha$$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) En déduire que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Solution :

1. Soit $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G , montrons que la famille $\mathcal{B} = ((f_1, \vec{0}_G), \dots, (f_p, \vec{0}_G), (f_1, g_1), \dots, (f_p, g_q))$ est une base de $E \times F$.

Elle est génératrice car si $(f, g) \in F \times G$, on décompose $f = \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k$ (où $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f)$) et $g = \sum_{k=1}^q \mu_k g_k$

alors

$$(f, g) = \sum_{k=1}^p \lambda_k (f_k, \vec{0}_G) + \sum_{k=1}^q \mu_k (\vec{0}_E, g_k)$$

Elle est libre car si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$ sont tels que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \left(f_k, \vec{0}_G \right) + \sum_{k=1}^q \mu_k \left(\vec{0}_E, g_k \right) = \left(\vec{0}_E, \vec{0}_G \right)$$

Alors $\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k = \vec{0}_E$ et $\sum_{k=1}^q \mu_k g_k = \vec{0}_G$ d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ par liberté de $\mathcal{B}_F$ et $\mu_1 = \dots = \mu_q = 0$ par liberté de $\mathcal{B}_G$. Conclusion $\mathcal{B}$ est une base de $E \times F$. Ainsi $E \times F$ est de dimension finie égale à $\dim F + \dim G$.

2.

(a) La linéarité ne pose pas de problème car si $((P, \alpha), (Q, \beta)) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(P, \alpha) + (Q, \beta)) &= \varphi((\lambda P + Q, \lambda \alpha + \beta)) = X(\lambda P + Q) + \lambda \alpha + \beta \\ &= \lambda(XP + \alpha) + (XQ + \beta) = \lambda \varphi(P, \alpha) + \varphi(Q, \beta) \end{aligned}$$

L'injectivité est immédiate car $\varphi(P, \alpha) = 0$ donne

$$XP(X) + \alpha = 0$$

En particulier avec $X = 0$ on a $\alpha = 0$, puis par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, $XP(X) = 0$ donne $P(X) = 0$.

Pour la surjectivité, si $A \in \mathbb{R}[X]$, la division euclidienne de A par X donne (voir le cours sur les polynômes et plus précisément sur les racines)

$$A = XP(X) + \alpha = \varphi(P, \alpha) \quad (\text{où } \alpha = A(0), \text{ mais ce n'est pas utile})$$

Ainsi φ est un isomorphisme.

(b) Si $\mathbb{R}[X]$ est de dimension finie alors E aussi et $\dim E = \dim \mathbb{R}[X] + 1$. Mais puisque E est isomorphe à $\mathbb{R}[X]$, on en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{R}[X]$. Absurde!

Remarque : Il y a beaucoup plus simple pour prouver que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice de khôlle 769

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$ tels que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) < \dim E$. Montrer qu'il existe $x \in E$, $x \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) = \vec{0}$.

Solution : On reformule ainsi : montrer que $\ker f \cap \ker g \neq \{\vec{0}\}$ donc montrer que $\dim(\ker f \cap \ker g) \geq 1$, donc (les dimensions sont entières)

$$\dim(\ker f \cap \ker g) > 0$$

Puisque $\dim(\ker f \cap \ker g)$ intervient avec Grassmann dans $\dim(\ker f + \ker g)$, on se lance.

$$\begin{aligned} \dim(\ker f + \ker g) &= \dim \ker f + \dim \ker g - \dim(\ker f \cap \ker g) \\ &= \dim E - \text{rg } f + \dim E - \text{rg } g - \dim(\ker f \cap \ker g) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = 2 \dim(E) - (\text{rg } f + \text{rg } g) - \dim(\ker f + \ker g)$$

Mais

$$\begin{aligned} \text{rg } f + \text{rg } g &< \dim E \quad (\text{hypothèse}) \\ \dim(\ker f + \ker g) &\leq \dim E \quad \text{car } \ker f + \ker g \subset E \end{aligned}$$

donc

$$\dim(\ker f \cap \ker g) > 2 \dim E - \dim E - \dim E = 0$$

22.1 Matrice d'une AL

Exercice de khôlle 770

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = (X-1)^2 P\left(\frac{1}{X-1}\right) + (X-1)P'(X)$. On admet que $f \in \mathcal{L}(E)$.

Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis dans la base de Taylor : $\mathcal{B}_T = \left(1, (X-1), \frac{(X-1)^2}{2}\right)$.

Solution : La linéarité est immédiate, la seule chose qu'il faudrait vérifier (mais on l'admet) c'est le «endo».

On a $f(1) = (X-1)^2$, $f(X) = (X-1)^2 \left(\frac{1}{X-1}\right) + (X-1) = 2X-2$ et $f(X^2) = (X-1)^2 \left(\frac{1}{X-1}\right)^2 + 2X(X-1) = 1 - 2X + 2X^2$
d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{pmatrix}$$

Ensuite $f(X-1) = f(X) - f(1) = 2(X-1) - (X-1)^2$, $f\left(\frac{(X-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(X-1)^2 \left(\frac{1}{X-1} - 1\right)^2 + (X-1)^2$
 $= \frac{1}{2}(X-1)^2 \left(\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{X-1} + 1\right) + (X-1)^2 = \frac{3}{2}(X-1)^2 - (X-1) + \frac{1}{2}$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_T}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 771

Soit $E = \text{Vect}(\sin, \cos, \text{ch}, \text{sh})$. On admet que $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{ch}, \text{sh})$ est une base de E . On définit φ sur E par

$$\forall f \in E, \varphi(f) = f'' + 2f' - 3f$$

On admet que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

2. Justifier que $\mathcal{C} = \left(\sin, \cos, \exp, \frac{1}{\exp}\right)$ est une base de E et donner la matrice de φ dans $\mathcal{C}$.

Solution : Ce n'est pas demandé, mais une fois de plus, la linéarité est simple, seul le «endo» demande un peu (très peu) de travail.

1. On calcule donc $\varphi(\sin) = -\sin + 2\cos - 3\sin$, $\varphi(\cos) = -\cos - 2\sin - 3\cos$, $\varphi(\text{ch}) = \text{ch} + 2\text{sh} - 3\text{ch}$ et $\varphi(\text{sh}) = \text{sh} + 2\text{ch} - 3\text{sh}$ pour avoir

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. On a $\exp = \text{ch} + \text{sh}$ et $\frac{1}{\exp} = \text{ch} - \text{sh}$ d'où

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

donc $\mathcal{C}$ est une base de E . Puis $\varphi(\exp) = 0$ et $\varphi\left(\frac{1}{\exp}\right) = \frac{1}{\exp} - \frac{2}{\exp} - \frac{3}{\exp}$ d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 772

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé dans la base canonique, noté $\mathcal{B}_c$, de $\mathbb{R}^3$.

On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Calculer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Solution :

- On a $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- On sait que, par définition de l'endomorphisme canoniquement associé,

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(u_1) &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u_1 \\ f(u_2) &= A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_2 \end{aligned}$$

$$f(u_3) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2u_3$$

Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 773

On se place sur $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'endomorphisme φ défini par $\varphi(P) = (X^2 - 3)P(\alpha)$ où α est un réel fixé.

1. Donner la matrice dans la base canonique.
2. Préciser $\ker \varphi$, $\text{Im } \varphi$. A-t-on $\ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi = E$?
3. L'endomorphisme φ peut-il être un projecteur, une symétrie ?

Solution : Il faudrait vérifier que l'on a bien un endomorphisme, mais c'est simple (ne pas oublier le «endo»).

1. On calcule $\varphi(1) = X^2 - 3$, $\varphi(X) = \alpha(X^2 - 3)$ et $\varphi(X^2) = \alpha^2(X^2 - 3)$, ainsi

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) = \begin{pmatrix} -3 & -3\alpha & -3\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1 (car $C_2 = \alpha C_1$ et $C_3 = \alpha^2 C_1$), ainsi $\dim \text{Im } \varphi = 1$, or $\varphi(1) = X^2 - 3 \in \text{Im } \varphi$ donc

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(X^2 - 3)$$

Puis par la FDR, $\dim \ker \varphi = 2$. Puis $C_2 - \alpha C_1 = 0$ traduit $\varphi(X) - \alpha\varphi(1) = 0$ d'où $\varphi(X - \alpha) = 0$ et de même $C_3 - \alpha^2 C_1 = 0$ donne $\varphi(X^2 - \alpha^2) = 0$. On en déduit que $(X - \alpha, X - \alpha^2)$ est une famille de deux vecteurs de $\ker \varphi$, libre car échelonnée, de cardinal égal à $\dim \ker \varphi$ d'où

$$\text{Vect}(X - \alpha, X - \alpha^2) = \ker \varphi$$

Pour montrer que $\ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi = E$, on a deux méthodes.

Méthode ① : On a $\ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi = E \iff (X^2 - 3, X - \alpha, X^2 - \alpha^2)$ base de $\mathbb{R}_2[X]$. Or

$$\det_{\mathcal{B}_c}(X^2 - 3, X - \alpha, X^2 - \alpha^2) = \begin{vmatrix} -3 & -\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 3$$

ainsi $(X^2 - 3, X - \alpha, X^2 - \alpha^2)$ base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $\alpha^2 \neq 3$, bref $\ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi = E$ pour $\alpha \notin \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Méthode ② : On a $\dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim \mathbb{R}_2[X]$ par la FDR. Ainsi par Grassmann, $\ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi = E$ si et seulement si $\ker \varphi \cap \text{Im } \varphi = \{0\}$. Mais si $P \in \ker \varphi \cap \text{Im } \varphi$ alors $P \in \text{Im } \varphi$ donc $\exists k \in \mathbb{R}, P = k(X^2 - 3)$. Puis $P \in \ker \varphi$ équivaut à $\varphi(P) = 0$ donc

$$(X^2 - 3) \times k(\alpha^2 - 3) = 0$$

Si $\alpha^2 \neq 3$, on en déduit que $k = 0$ et ainsi $P = 0$ d'où $\ker \varphi \cap \text{Im } \varphi \subset \{0\}$ (l'autre inclusion étant évidente).

Si $\alpha^2 = 3$ alors $\text{Im } \varphi \subset \ker \varphi$ donc $\ker \varphi \cap \text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi \neq \{0\}$. On retrouve le même résultat.

2. On sait que : φ projecteur $\iff \varphi^2 = \varphi \iff M^2 = M \iff M^2 - M = 0$.

Méthode ① : On fait tout dans la base canonique sans réfléchir. Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} M^2 - M &= \begin{pmatrix} -3 & -3\alpha & -3\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} -3 & -3\alpha & -3\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\alpha^2 + 12 & 12\alpha - 3\alpha^3 & 12\alpha^2 - 3\alpha^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 - 4 & -4\alpha + \alpha^3 & -4\alpha^2 + \alpha^4 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha^2 - 4) \begin{pmatrix} -3 & -3\alpha & -3\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $M^2 = M \iff \alpha^2 = 4$, conclusion φ projecteur si et seulement si $\alpha = \pm 2$.

On procède de même avec φ symétrie, car φ symétrie $\iff \varphi^2 = Id \iff M^2 - I_3 = 0$. Mais

$$\begin{aligned} M^2 - I_3 &= \begin{pmatrix} -3 & -3\alpha & -3\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\alpha^2 + 8 & 9\alpha - 3\alpha^3 & 9\alpha^2 - 3\alpha^4 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha^2 - 3 & -3\alpha + \alpha^3 & -3\alpha^2 + \alpha^4 - 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ ceci pour tout } \alpha \end{aligned}$$

Conclusion, φ n'est jamais une symétrie.

Méthode ② : On réfléchit (vaste programme) et si nécessaire, on se place dans une bonne base. Si $\alpha^2 = 3$, on ne peut avoir un projecteur, en effet pour un projecteur, on doit avoir $\ker \varphi \oplus \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^3$. Si $\alpha^2 \neq 3$, on peut déterminer la matrice de φ dans une base adaptée à la décomposition $\ker f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B} = (X - \alpha, X - \alpha^2, X^2 - 3)$ alors $\varphi(X - \alpha) = \varphi(X - \alpha^2) = 0$ et $\varphi(X^2 - 3) = (\alpha^2 - 3)(X^2 - 3)$ d'où

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 3 \end{pmatrix}$$

d'où $D^2 = D \iff \alpha^2 - 3 = 1 \iff \alpha = \pm 4$. On a donc un projecteur si et seulement si $\alpha = \pm 2$.

Pour la symétrie, puisqu'une symétrie est un automorphisme et que $\ker \varphi \neq \{\vec{0}\}$, ceci pour tout α , on peut affirmer que φ n'est jamais une symétrie.

Exercice de khôlle 774

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit pour $P \in E$, $\varphi(P)$ par

$$\varphi(P) = (X - 1)P' + P''(0)$$

On admet que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner la matrice M de φ dans la base canonique de E .
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\text{Im } \varphi$, donner une base de ces sous-espace vectoriels.
3. Soit $F = \{Q \in E, Q(0) + Q'(0) = 0\}$, montrer que $\text{Im } \varphi = F$.

Solution :

1. Soit M la matrice de φ dans la base canonique, on a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X - 1$, $\varphi(X^2) = (X - 1) \times 2X + 2 =$

$2X^2 - 2X + 2$ et pour $k \geq 3$, $\varphi(X^k) = k(X^k - X^{k-1})$ donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & -3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

2. On en déduit que $\text{rg}(\varphi) = n - 1$, ainsi $\dim \ker \varphi = 1$. Or 1 est un vecteur libre de $\ker \varphi$, espace de dimension 1, donc

$$\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]$$

Pour $\text{Im } \varphi$, on a deux approches possibles.

Méthode ① : On sait que

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi &= \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \dots, \varphi(X^n)) \\ &= \text{Vect}(\varphi(X), \dots, \varphi(X^n)) \\ &= \text{Vect}(X - 1, 2X^2 - 2X + 2, 3X^3 - 3X^2, \dots, n(X^n - X^{n-1})) \\ &= \text{Vect}(X - 1, 2X^2 - 2X + 2, X^3 - X^2, \dots, X^n - X^{n-1}) \end{aligned}$$

La famille $(X - 1, 2X^2 - 2X + 2, X^3 - X^2, \dots, X^n - X^{n-1})$ est génératrice de $\text{Im } f$, de cardinal égal à $\dim \text{Im } \varphi$, c'en est une base (on peut aussi dire qu'elle est libre car échelonnée en degré).

Méthode ② : Soit $Q = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n$, alors $Q \in \text{Im } f \iff \exists P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ tel que $\varphi(P) = Q$. Ceci se traduit matriciellement par

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -a_1 + 2a_2 = b_0 \\ a_1 - 2a_2 = b_1 \\ \vdots \\ (n-1)a_{n-1} - na_n = b_{n-1} \\ na_n = b_n \end{cases} \iff \begin{cases} b_0 + b_1 = 0 \\ a_1 - 2a_2 = b_1 \\ \vdots \\ (n-1)a_{n-1} - na_n = b_{n-1} \\ na_n = b_n \end{cases}$$

Le système admet une solution si et seulement si $b_0 + b_1 = 0$. Ainsi $\text{Im } \varphi$ est constitué des polynômes de la forme

$$b_0 - b_0X + b_2X^2 + \dots + b_nX^n$$

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(1 - X, X^2, \dots, X^n)$$

Cette méthode utilise le fait que les deux lignes de M sont identiques (or pour travailler en ligne, on passe en systèmes).

3. On montre $\text{Im } \varphi \subset F$ et que $\dim F = \dim \text{Im } \varphi$.

Pour $P \in E$, posons $Q = \varphi(P) = (X - 1)P' + P''(0)$. Alors

$$\begin{aligned} Q(0) &= P''(0) - P'(0) \\ Q' &= (X - 1)P'' + P' \implies Q'(0) = P'(0) - P''(0) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall Q \in \text{Im } \varphi, \quad Q(0) + Q'(0) = 0$$

d'où $\text{Im } \varphi \subset F$. Puis pour évaluer $\dim F$, on a deux méthodes.

Méthode ① : Si $Q = \sum_{k=0}^n b_kX^k$ alors

$$\begin{aligned} Q &\in F \iff b_0 + b_1 = 0 \iff b_1 = -b_0 \\ &\iff Q = b_0(1 - X) + b_1X + \dots + b_nX^n \end{aligned}$$

d'où

$$F = \text{Vect} (1 - X, X^2, \dots, X^n)$$

(Oh oh, la méthode ② de la question précédente donne donc directement $\text{Im } \varphi = Q$!). Puis $(1 - X, X^2, \dots, X^n)$ est libre car échelonnée en degré et génératrice de F , c'en est une base et ainsi $\dim F = n - 1$.

Méthode ① (la classe) : Soit $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ définie par $\psi(Q) = Q(0) + Q'(0)$, alors Q est une forme linéaire de E non nulle donc $\text{Im } \psi = \mathbb{R}$ et par la FDR son noyau est de dimension $n - 1 = \dim \text{Im } \varphi$.

Exercice de khôlle 775

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\forall k \in$

$$\llbracket 1; n-1 \rrbracket, f(e_k) = e_n \text{ et } f(e_n) = u \text{ où } u = \sum_{k=1}^n e_k.$$

1. Donner la matrice, notée M , de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\text{rg } f$, $\text{Im } f$ et $\ker f$.

Solution :

1. On a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \bigcirc & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Le rang de M vaut 2, ainsi $\text{rg } f = 2$. On a $\text{Im } f = \text{Vect}(e_n, u)$. Par la FDR, $\dim \ker f = n - 2$. On constate que pour $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, $C_k(M) - C_1(M) = 0$ (où $C_k(M)$ est la $k^{\text{ième}}$ colonne de M). Ainsi

$$\forall k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket, e_k - e_1 \in \ker f$$

d'où $\text{Vect}((e_k - e_1)_{2 \leq k \leq n-1}) \subset \ker f$. La famille $(e_k - e_1)_{2 \leq k \leq n-1}$ est libre, en effet si $\sum_{k=2}^{n-1} \lambda_k (e_k - e_1) = \vec{0}$ alors

$$\left(-\sum_{k=2}^{n-1} \lambda_k\right) e_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \lambda_k e_k + 0e_n = 0$$

d'où $\forall k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, $\lambda_k = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre. Ainsi $(e_k - e_1)_{2 \leq k \leq n-1}$ est une famille libre de $\ker f$, de cardinal égal à $\dim \ker f$, c'est une base de $\ker f$.

Conclusion

$$\ker f = \text{Vect}((e_k - e_1)_{2 \leq k \leq n-1}) \text{ et } \text{Im } f = \text{Vect}(e_n, u)$$

Exercice de khôlle 776

Soit $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$ avec $a_2 \neq 0$ et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. On note f l'application définie pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$ par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\sum_{k=1}^4 a_k x_k, a_2 x_1, a_3 x_1, a_4 x_1 \right)$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$, donner sa matrice dans $\mathcal{B}_c$.
2. Déterminer $\text{rg}(f)$ puis $\dim(\ker f)$ et enfin une base de $\ker f$.
3. Montrer que $\mathbb{C}^4 = \text{Im } f \oplus \ker f$ si et seulement si $b = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \neq 0$.

4. Montrer que si $b \neq 0$, il existe une base $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de $\mathbb{C}^4$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix}$.

Solution :

1. On écrit que

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 \\ a_2 x_1 \\ a_3 x_1 \\ a_4 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve la linéarité de f par linéarité du produit matriciel à droite. On a alors immédiatement

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Puisque $a_2 \neq 0$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) \underset{C_3 - \frac{a_3}{a_2} C_2}{\underset{C_4 - \frac{a_4}{a_2} C_2}{\sim}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de rang 2 (car } a_2 \neq 0)$$

d'où par la FDR, $\dim \ker f = 4 - 2 = 2$. On a $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a_3}{a_2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a_4}{a_2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ libres et dans $\ker f$, on a donc une famille

de 2 vecteurs en dimension 2, cela en forme une base. On peut aussi écrire que

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a_4 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \ker f.$$

3. Les vecteurs $f(e_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ou plus simplement $f\left(\frac{e_2}{a_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme second

vecteur) forment une base de $\text{Im } f$ (ils y sont et forment une famille libre). On sait alors que

$$E = \text{Im } f \oplus \ker f \iff \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a_4 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \text{ base de } \mathbb{C}^4$$

$$\iff \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ a_3 & 0 & a_2 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

mais

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ a_3 & 0 & a_2 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_3 & a_2 & 0 \\ a_4 & 0 & a_2 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 - \frac{a_3}{a_2} C_2 - \frac{a_4}{a_2} C_3}{=} - \begin{vmatrix} a_2 + \frac{a_3^2}{a_2} + \frac{a_4^2}{a_2} & -a_3 & -a_4 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= - \left(a_2 + \frac{a_3^2}{a_2} + \frac{a_4^2}{a_2} \right) a_2^2 = -a_2 (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$$

Ainsi $\text{Im } f \oplus \ker f \iff -a_2 (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \neq 0 \iff a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \neq 0$ car $a_2 \neq 0$.

4. On se dit que si $b \neq 0$, on peut exploiter le fait que $E = \ker \oplus \text{Im } f$. D'ailleurs, on cherche une base telle que

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= f(e'_2) = 0 \\ f(e'_3) &= e'_4 \text{ et } f(e'_4) = a_1 e'_4 + b e'_3 \end{aligned}$$

Ainsi e'_1 et e'_2 sont dans $\ker f$. On choisit donc $e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_3 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_4 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Puis, on se dit que si $f(e'_3) = b e'_4$ et $f(e'_4) = a_1 e'_4 + e'_3$ alors (e'_3, e'_4) est une base de $\text{Im } f$. Or on a une base de $\text{Im } f$ qui est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \right)$. Oh oh, c'est gagné, car

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \\ a_1 a_2 \\ a_1 a_3 \\ a_1 a_4 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

On pose donc $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e'_4 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$.

Synthèse : on a déjà montré que ces quatres vecteurs forment une base de E et dans cette base, on a la matrice demandée.

Remarque : On peut vérifier que

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a_1 \\ -a_3 & -a_4 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & a_2 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a_1 \\ -a_3 & -a_4 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & a_2 & 0 & a_4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Exercice de khôlle 777

Soit φ définie sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + X)P' - (2X + 1)P + P(-1)$.

1. Justifier que φ est bien un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\text{Im } \varphi$, une base de $\text{Im } \varphi$, le rang de φ puis son noyau.
3. Quelle est la matrice, notée M , de φ dans la base canonique de E ?
4. Soit $P_0 = X + X^2, P_1 = (X + 1)^2$ et $P_2 = X^2 - X + 1$, montrer que $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de E et donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$.

Solution :

1. On commence par prouver que si $(P, Q) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda \varphi(P) + \varphi(Q)$$

ce qui est banal et simple (laissé au lecteur, mais il faut le faire!). Puis un simple calcul donne

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= -2X, \varphi(X) = -X^2 - 1, \varphi(X^2) = X^2 + 1 \\ \text{donc } \varphi(1), \varphi(X) \text{ et } \varphi(X^2) &\text{ sont dans } E \end{aligned}$$

donc si $P = a + bX + cX^2$, on a $\varphi(P) = a\varphi(1) + b\varphi(X) + c\varphi(X^2) \in E$ en tant que combinaison linéaire de vecteurs de E . Ce qui prouve le «endo»!

Remarque : A moins d'être aveugle, on se dit que $\varphi(X + X^2) = 0 \dots$

2. On sait que

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \text{Vect}(-2X, -X^2 - 1, X^2 + 1) = \text{Vect}(X, X^2 + 1)$$

Ainsi $(X, X^2 + 1)$ est génératrice et libre (car échelonnée) donc est une base de $\text{Im } \varphi$. On a donc $\text{rg}(\varphi) = 2$, et par la FDR, $\dim \ker \varphi = 1$. Mais puisque $X + X^2 \in \ker \varphi$, le vecteur $X + X^2$ est une base de $\ker \varphi$ (un vecteur libre en dimension 1).

3. Le calcul de $\varphi(1), \varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ donne

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On a

$$\det_{\mathcal{B}_c}(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Ainsi $\mathcal{C}$ est une base. On calcule ensuite $\varphi(P_0), \varphi(P_1)$ et $\varphi(P_2)$. On sait déjà que $\varphi(P_0) = 0$ (la première colonne de M est donc la colonne nulle).

Méthode ① : Avec la définition de φ .

Méthode ② : Avec $\varphi(aX^2 + bX + c) = a\varphi(X^2) + b\varphi(X) + c\varphi(1)$.

Méthode ③ (celle que vous devez utiliser!) : On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi(P)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P)$$

$$\text{Avec } \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on a } \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P_1) =$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(-P_1) \text{ d'où } \varphi(P_1) = -P_1. \text{ De même, } \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donne $\varphi(P_2) = 2P_2$. On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ (formule de changement de bases).

Exercice de khôlle 778

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f définie sur E par

$$f(P) = X(X-1)P'' - XP' + P \text{ i.e. } f(P(X)) = X(X-1)P''(X) - XP'(X) + P(X)$$

- Justifier que $f \in L(E)$.
- Donner la matrice, noté M , de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Montrer que f est une projection. Donner les éléments caractéristiques de f .

Solution :

- Pour $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= X(X-1)(\lambda P + Q)'' - X(\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q) \\ &= X(X-1)(\lambda P'' + Q'') - X(\lambda P' + Q') + (\lambda P + Q) \text{ (linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda(X(X-1)P'' - XP' + P) + X(X-1)Q'' - XQ' + Q \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire. Puis, un calcul simple (utile pour la suite) donne

$$f(1) = 1, f(X) = 0 \text{ et } f(X^2) = 2X(X-1) - 2X^2 + X^2 = X^2 - 2X$$

On en déduit que si $P = aX^2 + bX + c$ alors $f(P) = af(X^2) + bf(X) + cf(1)$ (par linéarité) donc est dans $\mathbb{R}_2[X]$ car $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ le sont (et parce que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel).

Remarque : On peut même préciser que $f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - 2aX + c$.

- On a (calcul précédent)

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Un simple calcul donne $M^2 = M$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$ d'où $f^2 = f$. Ainsi f est une projection. Il est clair que $\text{rg}(f) = 2$ ($\text{rg}(f) = \text{rg } M$ ou bien $\text{rg } f = \text{rg}(f(1), f(X), f(X^2)) = \text{rg}(1, X^2 - 2X) = 2$ car la famille est échelonnée donc libre). Ainsi $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}_2[X] - 2 = 3 - 2 = 1$ par la FDR. Puisque $X \in \ker f$, on a $\ker f = \text{Vect}(X)$. Enfin $\text{Im } f = \text{Vect}(1, X^2 - 2X)$.

Conclusion f est la projection sur $\text{Vect}(1, X^2 - 2X)$ dans la direction de $\text{Vect}(X)$.

Remarque : pour montrer que f est un projecteur, on peut aussi écrire que $f^2(1) = f(f(1)) = f(1)$, $f^2(X) = f(0) = 0 = f(X)$ et $f^2(X^2) = f(X^2 - 2X) = f(X^2) - 2f(X) = f(X^2)$ donc $f = f^2$ sur une base donc sont égaux (l'image d'une base définit un unique endomorphisme).

Exercice de khôlle 779

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f définie sur E par

$$f(P(X)) = P(X) - 2 \left(\int_0^1 P(t) dt \right) \times (3X^2 + 2X - 1)$$

1. Justifier que $f \in L(E)$.
2. Donner la matrice, notée M , de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $\mathcal{B} = (3X^2 - 2X, 3X^2 - 1, 3X^2 + 2X - 1)$
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E .
 - (b) Donner la matrice, notée D , de f dans $\mathcal{B}$.
 - (c) Montrer que f est une symétrie. Donner les éléments caractéristiques de f . Que vaut M^2 ?

Solution :

1. On a bien $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et la linéarité est immédiate par linéarité de l'intégrale.
2. On calcul $f(1) = 1 - 2 \int_0^1 dt \times (3X^2 + 2X - 1) = -6X^2 - 4X + 3$, $f(X) = X - 2 \int_0^1 t dt \times (3X^2 + 2X - 1) = -3X^2 - X + 1$ et $f(X^2) = X^2 - 2 \int_0^1 t^2 dt \times (3X^2 + 2X - 1) = -X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{2}{3}$. Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{2}{3} \\ -4 & -1 & -\frac{4}{3} \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

3.

(a) On a

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_i \leftarrow C_i - C_1, i \in \{2,3\}}{=} 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 \oplus & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \text{ donc } \mathcal{B} \text{ est une base de } E \end{aligned}$$

(b) On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(3X^2 - 2X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(3X^2 - 2X)) = M \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, de même

$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(3X^2 - 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(3X^2 - 1)) = M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et idem avec le troi-

sième vecteur $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(3X^2 + 2X - 1)) = M \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(3X^2 - 2X) &= 3X^2 - 2X \\ f(3X^2 - 1) &= 3X^2 - 1 \\ f(3X^2 + 2X - 1) &= -(3X^2 + 2X - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Si on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ (qui est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$)

alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(\mathcal{B})) = MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{2}{3} \\ -4 & -1 & -\frac{4}{3} \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'être un peu plus rapide sur les calculs.

- (c) On a $D^2 = I_3$, mais $D^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2)$ et $I_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Id)$ donc $f^2 = Id$, ce qui prouve que f est une symétrie. Puis

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - Id) = D - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est de rang 1, donc (FDR) $\dim \ker(f - Id) = 3 - 1 = 2$. Puisque $3X^2 - 2X$ et $3X^2 - 1$ ont pour image 0 par $f - Id$, on a

$$\text{Vect}(3X^2 - 2X, 3X^2 - 1) \subset \ker(f - Id)$$

puis $\text{Vect}(3X^2 - 2X, 3X^2 - 1) = \ker(f - Id)$ car $(3X^2 - 2X, 3X^2 - 1)$ est libre (sous famille d'une base) donc $\dim \text{Vect}(3X^2 - 2X, 3X^2 - 1) = 2 = \dim \ker(f - Id)$.

De même

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f + Id) = D + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2, donc $\dim \ker(f + Id) = 1$ et $\ker(f + Id) = \text{Vect}(3X^2 + 2X - 1)$.

Conclusion, f est la symétrie de base $\text{Vect}(3X^2 - 2X, 3X^2 - 1)$ et de direction $\text{Vect}(3X^2 + 2X - 1)$. Enfin

$$M^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Id) = I_3 \text{ (ce qu'un calcul donne également)}$$

Remarque : On peut déterminer directement $\ker(f - Id)$, en effet

$$P \in \ker(f - Id) \iff f(P(X)) = P(X) \iff -2 \left(\int_0^1 P(t) dt \right) \times (3X^2 + 2X - 1) = 0 \iff \int_0^1 P(t) dt = 0$$

(on est heureux de retrouver un hyperplan, à savoir le noyau de $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$). Puis ayant $\dim(\ker(f - Id)) = 2$, on sait que $\ker(f + Id)$ est de dimension 1. Mais

$$P \in \ker(f + Id) \iff f(P(X)) = -P(X) \iff P(X) = \left(\int_0^1 P(t) dt \right) \times (3X^2 + 2X - 1)$$

ce qui prouve que si $P \in \ker(f + Id)$ alors $P \in \text{Vect}(3X^2 + 2X - 1)$ donc que $\ker(f + Id) \subset \text{Vect}(3X^2 + 2X - 1)$. Par égalité des dimensions, on a alors $\ker(f + Id) = \text{Vect}(3X^2 + 2X - 1)$.

Exercice de khôlle 780

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \bigcirc & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$, et soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M . On

note $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Que vaut, pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $f(e_k)$?
2. En déduire M^2 . Vérifier pour $n = 3$ le résultat.

Solution : On sait que les colonnes de f représentent les images de la base canonique.

1. On a donc

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(e_n) = e_1 + \cdots + e_n = \sum_{j=1}^n e_j \\ f(e_j) &= e_1 + e_n \text{ si } j \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket \end{aligned}$$

2. Par linéarité de f

$$\begin{aligned} f^2(e_1) &= f^2(e_n) = f(e_1) + \left(\sum_{j=2}^{n-1} f(e_j) \right) + f(e_n) \\ &= 2 \left(\sum_{j=1}^n e_j \right) + \left(\sum_{j=2}^{n-1} e_1 + e_n \right) = ne_1 + 2 \left(\sum_{j=2}^{n-1} e_j \right) + ne_n \end{aligned}$$

et pour $j \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$

$$f^2(e_j) = f(e_1 + e_n) = f(e_1) + f(e_n) = 2 \sum_{j=1}^n e_j$$

On reporte dans la matrice pour avoir

$$M^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \cdots & 2 & n \\ 2 & \vdots & & \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 2 & \vdots & \vdots \\ 2 & \vdots & & \vdots & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & n \end{pmatrix}$$

Pour $n = 3$, on a bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

22.2 Matrices semblables

Exercice de khôlle 781

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^4$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution : On cherche une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ telle que

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_1) & f(e_1) & f(e_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix}$$

donc

$$\begin{aligned} f(e_1) &\in \ker f \\ f(e_2) &= e_2 \text{ et } f(e_3) = e_3 \text{ d'où } (e_2, e_3) \in (\ker(f - Id))^2 \\ f(e_4) &= 2e_4 \text{ d'où } e_4 \in \ker(f - 2Id) \end{aligned}$$

On a $C_4(M) - C_1(M) = 0$ d'où $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker f$, on choisit donc $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puis

$$M - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que $C_2(M - I_4) - C_3(M - I_4) = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(f - Id)$ et de même $C_1(M - I_4) - C_2(M - I_4) +$

$C_4(M - I_4) = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(f - Id)$. On choisit donc $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour finir,

$$M - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Et clairement $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient !

Pour finir, on vérifie que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base en calculant

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3, e_4) &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \ominus 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \oplus -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\leftarrow}{=} -2 \times (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

22.3 Changement de bases (simple)

Exercice de khôlle 782

Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, on la notera P . Calculer P^{-1} .
3. Déterminer $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Quelle relation relie A, P et B ?
4. Calculer B^4 et en déduire A^{4n} si $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. On a $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $b - a = e_1$, la première colonne de P^{-1} est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puis

$2a - c = e_3$, la troisième colonne de P^{-1} est donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, enfin $b - c = e_2$ donne la deuxième colonne de P^{-1}

qui est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et au final

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. On a $u(a) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $u(a) = a$ (car $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u(a)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(a)$), puis $u(b) = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = c$ et $A(c) = A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -b$. Ainsi

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $A = PBP^{-1}$.

Remarque : Si on calcule $AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, les trois colonnes représentent les images de a, b et c par u dans la base canonique.

4. Méthode ① : On calcule $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis $B^4 = (B^2)^2 = I_4$ (on sait calculer la puissance énième d'une matrice diagonale).

Méthode ② : On a $u^2(a) = u(u(a)) = u(a) = a$, $u^2(b) = u(u(b)) = u(c) = -b$ et $u^2(c) = u(u(c)) = u(-b) =$

$-u(b) = -c$ donne $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sans autre calcul ! Puis $B^4 = I_3$.

Pour finir, $A^{4n} = (A^4)^n = I_n$ car $A^4 = PB^4P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$.

Exercice de khôlle 783

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, on note $P_1 = (X-1)^2$, $P_2 = (X+1)^2$ et $P_3 = X^2 - 1$ et $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de E .

1. Justifier que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E .

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si $Q = P_1 + 2P_2 - P_3$, que vaut $f(Q)$?

(b) Montrer que f est une symétrie de E et préciser ses éléments caractéristiques.

(c) Comment calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$?

Solution :

1. On a $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_i + C_3, i \in \{1,2\}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ donc $\mathcal{B}$ est une base.

2.

(a) On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(Q)) = M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ainsi

$$f(Q) = -3P_1 + 2P_2 - 5P_3$$

Méthode ① : On remplace P_1, P_2 et P_3 par leur valeurs pour avoir

$$f(Q) = -3(X-1)^2 + 2(X+1)^2 - 5(X^2-1) = -6X^2 + 10X + 4$$

Méthode ② : La matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ est $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(Q)) = P \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(Q)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien que $f(Q) = -6X^2 + 10X + 4$.

(b) On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E)$ ainsi $f^2 = Id_E$ et f est une symétrie.

On sait que la direction est $\ker(f + Id_E)$ et la base $\ker(f - Id_E)$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - Id_E) = M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est de rang 1 donc $\dim(\ker(f - Id_E)) = 2$. Puisque, dans $M - I_3$, on a $C_2 - 2C_1 = 0$ et $C_3 - C_1 = 0$, on a

$$f(P_2 - 2P_1) = 0 \text{ et } f(P_3 - P_1) = 0$$

La famille $(P_2 - 2P_1, P_3 - P_1)$ est libre $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_2 - 2P_1, P_3 - P_1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2. On a donc une famille de deux vecteurs libres en dimension 2, c'est une base de $\ker(f - Id_E)$.

Puis

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f + Id_E) = M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 (deux premières colonnes non colinéaires) donc $\dim \ker(f + Id_E) = 1$ (ce que l'on savait car $\ker(f - Id_E) \oplus \ker(f + Id_E) = E$) et $P_1 + P_3$ est un vecteur libre de $\ker(f + Id_E)$ qui est de dimension 1 donc en est une base.

Conclusion : f est la symétrie sur $\text{Vect}(P_2 - 2P_1, P_3 - P_1)$ dans la direction de $\text{Vect}(P_1 + P_3)$.

(c) On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = P \times M \times P^{-1}$$

on calcule simplement P^{-1} en écrivant que

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= 4X \text{ d'où } X = -\frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 \\ P_1 + P_2 &= 2X^2 + 2 = 2X^2 - 2 + 4 = 2P_3 + 4 \text{ d'où } 1 = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 - \frac{1}{2}P_3 \\ X^2 &= X^2 - 1 + 1 = P_3 + 1 = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{2}P_3 \end{aligned}$$

Ainsi

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut enfin calculer

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 784

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A . On

considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$.
2. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire un moyen de calculer A^n .

Solution :

1. On a $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\sqrt{2} \neq 0$, ainsi $\mathcal{B}$ est une base et

$$P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} &= (a + b + \sqrt{2}c) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} &= (a + b - \sqrt{2}c) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= (a - b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} a + b + \sqrt{2}c & 0 & 0 \\ 0 & a + b - \sqrt{2}c & 0 \\ 0 & 0 & a - b \end{pmatrix}.$$

3. Pour calculer A^n , on peut écrire que

$$A^n = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) P^{-1} = P D^n P^{-1}$$

et calculer P^{-1} , mais il y a plus malin.

$$\text{Posons } A(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha + \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \text{ et } B(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \sqrt{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta - \sqrt{2}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

On a montré que $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}$,

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = P \times B(\alpha, \beta, \gamma) \times P^{-1}$$

or

$$B^n = \begin{pmatrix} (a + b + \sqrt{2}c)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a + b - \sqrt{2}c)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a - b)^n \end{pmatrix}$$

Il suffit d'écrire $B^n = B(\alpha, \beta, \gamma)$ pour α, β et γ bien choisis. On prend donc

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \sqrt{2}\gamma &= (a + b + \sqrt{2}c)^n \\ \alpha + \beta - \sqrt{2}\gamma &= (a + b - \sqrt{2}c)^n \\ \alpha - \beta &= (a - b)^n \end{cases}$$

pour obtenir

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha + \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 785

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par

$$f(1) = 2X^2 - X, \quad f(X) = -2X^2 - 1 \quad \text{et} \quad f(X^2) = -X^2 + X + 1$$

1. Donner la matrice, notée M , de f dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (X^2 + 1, X + 1, X^2 + X + 1)$ est une base de E .
3. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$. Préciser P et P^{-1} .
4. Donner la matrice T de f dans $\mathcal{B}$. Quelle relation lie M, P et T ?
5. Calculer T^n puis $f^n((X+1)^2)$ si $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. On a directement $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. On calcule $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est une base. Puis

$$\begin{aligned} X^2 &= (X^2 + X + 1) - (X + 1) \\ X &= (X^2 + X + 1) - (X^2 + 1) \\ 1 &= X + 1 - X = (X + 1) - (X^2 + X + 1) + (X^2 + 1) \end{aligned}$$

d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(X^2 + 1)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(X^2 + 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $f(X^2 + 1) =$

$X^2 + 1$. On peut aussi écrire que $f(X^2 + 1) = f(X^2) + f(1) = (-X^2 + X + 1) + (2X^2 - X) = X^2 + 1$. Par le même genre de calcul, on a

$$f(X + 1) = -(X + 1) \quad \text{et} \quad f(X^2 + X + 1) = -X^2$$

On doit ensuite décomposer $-X^2$ selon la base $\mathcal{B}$, on peut, au choix :

Ecrire que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(-X^2) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(-X^2) = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ce qui donne

$$-X^2 = -(X^2 + X + 1) + (X + 1)$$

ou bien, directement «voir» cette égalité. Au final, on a donc

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Et on a la relation $M = PTP^{-1}$ (ce qui donne aussi un moyen de calculer T qui vaut PMP^{-1}).

4. On écrit que $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$ et on vérifie que

$$DN - ND = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_3$$

Ce qui justifie l'emploi du binôme. De plus $N^2 = 0$ d'où

$$\begin{aligned}(D + N)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} \\ &= D^n + n N D^{n-1}\end{aligned}$$

Avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et $N D^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
on obtient

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Puis, par changement de bases $M^n = P T^n P^{-1}$

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}_c} \left(f^n \left((X+1)^2 \right) \right) &= M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = P T^n P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= P T^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 \\ -2n \times (-1)^n \\ 2 \times (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1-n) \times (-1)^n - 1 \\ 2(1-n) (-1)^n \\ 2(-1)^n - 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où

$$f^n \left((X+1)^2 \right) = 2(-1)^n (X^2 + (1-n)(X+1)) - (X^2 + 1)$$

On vérifie que $f^0 \left((X+1)^2 \right) = 2(-1)^0 (X^2 + (1-0)(X+1)) - (X^2 + 1) = (X+1)^2$ et que $f \left((X^2 + 2X + 1) \right) = 2(-1)^1 (X^2 + (1-1)(X+1)) - (X^2 + 1) = -3X^2 - 1$ ce qui est cohérent avec

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 786

Soit f défini sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par $f(P(X)) = (X^2 + 2)P''(X) + (X+1)P'(X) + P(X)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E . On admet que $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$, on la notera T .
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $g_\lambda = \lambda I - f$ où I est l'identité de E . Justifier qu'il existe 3 valeurs $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ de λ pour lesquelles $\ker g_\lambda$ est une droite vectorielle. Déterminer, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, un vecteur directeur, noté Q_i , de $\ker g_{\lambda_i}$ et dont les composantes sont dans $\mathbb{N}$ et les «plus petites possibles».
3. Justifier que $\mathcal{C} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.
4. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Préciser P , calculer P^{-1} puis calculer T^n .

Solution :

1. On calcule $f(1) = 1$, $f(X) = (X+1) + X = 2X + 1$ et $f(X^2) = (X^2 + 2) \times 2 + (X+1) \times 2X + X^2 = 5X^2 + 2X + 4$. Ainsi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Analyse : On sait que pour un endomorphisme g de E

$$g \text{ automorphisme} \iff \det(g) \neq 0 \iff \ker g = \{\vec{0}\}$$

Puisque $\det(g_\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda-2)$, pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 5\}$, on peut affirmer

que $\ker g = \{\vec{0}\}$ donc n'est pas une droite vectorielle !

Reste les trois valeurs particulières.

Si $\lambda = 1$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc son noyau (FDR) est de dimension 1. La

première colonne est nulle donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ représente les coordonnées d'un vecteur de $\ker g_1$. Ainsi $Q_1 = 1$ est directeur de $\ker g_1$.

Si $\lambda = 2$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\dots$. Puisque $C_1 + C_2 = 0$, on a $Q_2 = X + 1$ directeur de $\ker g_2$.

Si $\lambda = 5$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_5) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc $\dots$. Si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (ce qui signifie que $Q_3 = a + bX + cX^2$) alors

$$\begin{aligned} Q_3 \in \ker g_5 &\iff \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a - b - 4c \\ 3b - 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{b}{4} + c = \frac{2c}{12} + c = \frac{7}{6}c \\ b = \frac{2c}{3} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{6} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On choisit donc $Q_3 = 7 + 4X + 6X^2$.

3. On a $\mathcal{C} = (1, X + 1, 6X^2 + 4X + 7)$ est une base d'après le théorème de la base échelonnée. Si vous avez suivi, on a $g_1(Q_1) = 0$ donc $f(Q_1) = Q_1$, et de même $f(Q_2) = 2Q_2$ et $f(Q_3) = 5Q_3$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{Diag}(1, 2, 5)$$

4. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ puis $X = Q_2 - Q_1$ et $6X^2 = Q_3 - 4X - 7 = Q_3 - 4(Q_2 - Q_1) - 7Q_1 = Q_3 - 4Q_2 - 3Q_1$
d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
T^n &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = P \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)^n P^{-1} = P \text{Diag}(1, 2, 5)^n P^{-1} = P \text{Diag}(1, 2^n, 5^n) P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 7 \times 5^n \\ 0 & 2^n & 4 \times 5^n \\ 0 & 0 & 6 \times 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & -\frac{2}{3}2^n + \frac{7}{6}5^n - \frac{1}{2} \\ 0 & 2^n & -\frac{2}{3}2^n + \frac{2}{3}5^n \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & \frac{1}{6}(7 \times 5^n - 2^{n+2}) - \frac{1}{2} \\ 0 & 2^n & \frac{2}{3}(5^n - 2^n) \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 787

Soit $E = \mathbb{R}^3$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ et pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\varphi(X) = 2x + 3y - z \text{ et } f(X) = \varphi(X)A - \varphi(A)X$$

- Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et que $f \in \mathcal{L}(E)$.
- Donner la matrice M de f dans $\mathcal{B}_c$, la base canonique de E .
- Déterminer $\ker f$ et $\ker \varphi$. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires sauf pour une valeur de a que l'on notera α .
- Pour $a \neq \alpha$, soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker f$, $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker \varphi$ et $\mathcal{C} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ obtenu en concaténant les deux bases. Donner la matrice de f dans $\mathcal{C}$.
- Pour quelle valeur de a l'endomorphisme f est-il un projecteur ? (attention à la valeur particulière).

Solution :

- On reconnaît dans φ une forme linéaire sur E (si on pose $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $\varphi(X) = U^T X$ est donc linéaire).

Puis si $(X, Y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda X + Y) &= \varphi(\lambda X + Y)A - \varphi(A)(\lambda X + Y) = (\lambda\varphi(X) + \varphi(Y))A - \varphi(A)(\lambda X + Y) \quad (\text{linéarité de } \varphi) \\
&= \lambda(\varphi(X)A - \varphi(A)X) + (\varphi(Y)A - \varphi(A)Y) = \lambda f(X) + f(Y)
\end{aligned}$$

donc $f \in \mathcal{L}(E)$.

Remarque : On peut aussi écrire que $f(X) = \varphi(X)A - (2 - a)X$ ou mieux encore $f(X) = (U^T X)A - (2 - a)X$

- On calcule alors

$$\begin{aligned}
f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - (2 - a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \\
f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - (2 - a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ a - 2 \\ 3a \end{pmatrix} \\
f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - (2 - a) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 2a & 3a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{, eigenvectors : } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow a-2$$

$$3. \text{ On a } \ker \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E, 2x + 3y - z = 0 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\ker f$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 2a & 3a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y - z + ax \\ -2y + ay \\ -2z + 2ax + 3ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout donc le système

$$\begin{cases} ax + 3y - z = 0 \\ (a-2)y = 0 \\ 2ax + 3ay - 2z = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq 2$, le système équivaut à $\begin{cases} ax - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ce qui donne $\ker f = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$.

Si $a = 2$, le système équivaut à $\{2x + 3y - z = 0\}$ et on a donc $\ker f = \ker \varphi$ (donc aucune chance que $\ker f \oplus \ker \varphi$!).

Si $a \neq 2$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = a - 2 \neq 0$$

ce qui prouve que $\ker f \oplus \ker \varphi = E$.

4. Si $X \in \ker \varphi$, on a $f(X) = -\varphi(A)X = -(a-2)X$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

5. Si $a \neq 2$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)^2 \end{pmatrix}$. Ainsi (ne pas oublier que l'on est dans le cas où $a \neq 2$)

$$f \text{ projecteur} \iff f^2 = f \iff \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \iff (a-2)^2 = a-2 \iff a = 3$$

On a donc un projecteur pour $a = 3$.

Si $a = 2$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc f n'est pas un projecteur.

Exercice de khôlle 788

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et f un automorphisme de E . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Justifier que $\mathcal{C} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E . On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
2. Quelle est la matrice de f dans $\mathcal{C}$?

Solution :

1. On sait que f est bijective si et seulement si l'image d'une base est une base. Donc $\mathcal{C}$ est une base de E . On peut aussi écrire que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

donc $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \det f \neq 0$, ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est une base de E .

2. On a alors $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P = P^{-1} \times P \times P = P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$$

Exercice de khôlle 789

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, que vaut $f(X)$? A-t-on $f \in GL_3(\mathbb{R})$ (i.e. f automorphisme de $\mathbb{R}^3$).
- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{Diag}(0, 1, -5)$.
- Quel lien existe-t-il entre D et A ? Comment calculer A^n ?

Solution :

1. C'est du cours, $f(X) = AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y - 2z \\ -x - 2y + 2z \\ x + 3y - 4z \end{pmatrix}$. Un simple calcul donne

$$\det(f) = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 + L_3 \\ L_1 - 2L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Ainsi f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. On cherche donc e_1, e_2 et e_3 tels que

$$f(e_1) = \vec{0}, f(e_2) = e_2 \text{ et } f(e_3) = -5e_3$$

donc $e_1 \in \ker f$, $e_2 \in \ker(f - I)$ et $e_3 \in \ker(f + 5I)$ où $I = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Pour e_1 : si $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} e_1 \in \ker f &\iff \begin{pmatrix} 2x + 3y - 2z \\ -x - 2y + 2z \\ x + 3y - 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ -x - 2y + 2z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ -x - 2y + 2z = 0 \\ \boxed{x} + 3y - 4z = 0 \end{cases} \stackrel{\substack{L_2 + L_3 \\ L_1 - 2L_3}}{\iff} \begin{cases} -3y + 6z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ \boxed{x} + 3y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{y} - 2z = 0 \\ \boxed{x} + 3y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x = -3y + 4z = -2z \\ y = 2z \\ z = z \end{pmatrix}, \text{ on choisit } e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour e_2 : On a $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f - I) = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. On remarque que

$$C_2(B) - 3C_1(B) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(f - I)$. On choisit $e_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

our e_2 : On a $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f + 5I) = A + 5I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

Enfin, on vérifie que $\det_{\mathcal{B}_c}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ donc $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{Diag}(0, 1, -5)$.

3. Si on note $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors

$$A = PDP^{-1}$$

Enfin

$$A^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^n) = P \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f^n) \times P^{-1} = PD^nP^{-1} = P \times \text{Diag}(0^n, 1^n, (-5)^n) \times P^{-1}$$

donc pour $n \neq 0$, $A^n = P \text{Diag}(0, 1, (-5)^n) P^{-1}$.

22.4 Le changement de bases est notre seul espoir

Exercice de khôlle 790

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , on note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Soit $\mathcal{B}' = (e_1, 2e_2, \dots, ne_n)$. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E et préciser $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Quels sont les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E .

Solution :

1. On a

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Diag}(1, 2, 3, \dots, n) = n! \neq 0$$

donc $\mathcal{B}'$ est une base de E . Si on note $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i$$

d'où

$$f(je_j) = jf(e_j) = \sum_{i=1}^n jm_{i,j}e_i = \sum_{i=1}^n \frac{j}{i}m_{i,j}(ie_i)$$

$$\text{d'où } M' = \left(\left(\frac{j}{i}m_{i,j} \right) \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

2. On sait déjà que Id_E et donc λId_E sont solutions du problème. Mais sont-ce les seules ? Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$. On choisit une base $\mathcal{B}$, on construit la base $\mathcal{B}'$ comme indiquée au 1). Si $M = ((m_{i,j}))$ on a alors $M = M'$ où $M' = \left(\left(\frac{j}{i}m_{i,j} \right) \right)$. Conclusion $\forall (i,j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$

$$m_{i,j} = \frac{j}{i}m_{i,j}$$

d'où $m_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi en posant $\lambda_i = m_{i,i}$, la matrice de f est égale à $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans toutes les bases en particulier pour $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$

$$f(e_j) = \lambda_j e_j$$

Pour finir, si $\mathcal{B}_{p,q} = (e'_1, \dots, e'_n)$ est obtenue par échange de e_p et e_q dans $\mathcal{B}$ (par exemple $\mathcal{B}_{1,2} = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$) alors

$$f(e'_p) = \lambda_p e'_p$$

mais $e'_p = e_q$ d'où $f(e_q) = \lambda_p e_q$ mais on a aussi $f(e_q) = \lambda_q e_q$ d'où $\lambda_p = \lambda_q$ et ainsi

$$M = \lambda I_n \text{ d'où } f = \lambda Id_E$$

Synthèse : Si $f = \lambda Id_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda I_n$ ceci quelque soit la base $\mathcal{B}$.

Exercice de khôlle 791

Pour x et y positifs, on pose $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$.

On considère alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par récurrence par

$$u_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n \star (n+1).$$

- Pour tout $n \geq 2$, montrer qu'il existe des entiers a_n et b_n tels que $u_n = \frac{a_n}{b_n}$. Si $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, déterminer $A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_{n+1} = A_{n+1}X_n$
- Soit f_n l'endomorphisme canoniquement associé à A_n .

(a) Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Que valent $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ et P^{-1} ?

(b) Préciser alors $D_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_n)$.

- Calculer X_n en fonction de n puis u_n .

Solution :

- Par récurrence, on a $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ avec $a_0 = 0, b_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{\frac{a_n}{b_n} + (n+1)}{1 + (n+1)\frac{a_n}{b_n}} = \frac{a_n + (n+1)b_n}{b_n + (n+1)a_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

Ainsi $X_{n+1} = A_{n+1}X_n$ où $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$.

-

(a) On a $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

donne

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Enfin $A_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$ et $A_n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n \\ n-1 \end{pmatrix}$ d'où

$$D_n = \begin{pmatrix} n+1 & 0 \\ 0 & -(n-1) \end{pmatrix}$$

3. On sait que

$$A_n = PD_nP^{-1}$$

Par récurrence immédiate, on a

$$\begin{aligned} X_n &= A_n A_{n-1} \cdots A_2 X_1 = PD_n P^{-1} \times PD_{n-1} P^{-1} \times \cdots \times PD_2 P^{-1} X_1 \\ &= P(D_n D_{n-1} \cdots D_2) P^{-1} X_1 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} D_n D_{n-1} \cdots D_2 &= \begin{pmatrix} n+1 & 0 \\ 0 & -(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & -(n-2) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \prod_{k=2}^n (k+1) & 0 \\ 0 & \prod_{k=2}^n (-(k-1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(n+1)!}{2} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} (n-1)! \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour finir, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donne $P^{-1} X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$D_n D_{n-1} \cdots D_2 P^{-1} X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{(n+1)!}{2} \\ (-1)^{n-1} (n-1)! \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (n+1)! \\ (-1)^{n-1} (n-1)! \end{pmatrix} \\ &= \frac{(n-1)!}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} \\ (-1)^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{(n-1)!}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} n(n+1) - (-1)^{n-1} \\ \frac{1}{2} n(n+1) + (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{n(n+1) + 2(-1)^n}{n(n+1) - 2(-1)^n}$$

Exercice de khôlle 792

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\text{Im } f = \ker f$ montrer que n est pair.

On suppose désormais que $n = 2r$ est pair. On considère les trois propositions ①, ② et ③ définies par

- ① $f^2 = 0$ et $\text{rg}(f) = r$
 ② $\text{Im } f = \ker f$
 ③ il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille n décrite par «blocs»).

2. Montrer que ① $\iff$ ②.

3. On suppose ①. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im } f$.

- (a) Justifier que pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, il existe $e_{r+k} \in E$ tel que $e_k = f(e_{r+k})$.
 (b) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de E
 (c) Donner la matrice de f dans cette base.

4. Montrer que les trois propositions ①, ② et ③ sont équivalentes

Solution :

1. Par hypothèse $\dim(\text{Im } f) = \dim(\ker f)$ et par la FDR, $\dim E = \dim(\text{Im } f) + \dim(\ker f) = 2 \dim(\text{Im } f)$ est pair.

2. ① $\implies$ ②.

Par hypothèse, $f^2 = 0$ et $\text{rg}(f) = r$. On se souvient que « $g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \ker g$ » si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$. Avec $f = g$, l'hypothèse $f^2 = 0$ donne $\text{Im } f \subset \ker f$. Par la FDR on a $\dim \ker f = n - \text{rg}(f) = 2r - r = r = \dim \text{Im } f$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\text{Im } f = \ker f$.

- ② $\implies$ ③.

Par hypothèse $\text{Im } f = \ker f$ donc $\text{Im } f \subset \ker f$ et ainsi $f^2 = 0$ et par la FDR on a $2r = 2 \dim \text{Im } f$ d'où $\dim \text{Im } f = r$.

- 3.

- (a) Pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $e_k \in \text{Im } f$ donc il existe $e_{r+k} \in E$ tel que $e_k = f(e_{r+k})$.
 (b) Montrons que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est libre, puisqu'elle est de cardinal $n = \dim E$, cela suffit pour affirmer que c'est une base de E . Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \vec{0}$$

Par linéarité de f , on a $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \vec{0}$ mais

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(e_k) + \sum_{k=1}^r \lambda_{r+k} f(e_{r+k}) \stackrel{f^2=0}{=} \sum_{k=1}^r \lambda_k f^2(e_{r+k}) + \sum_{k=1}^r \lambda_{r+k} e_k = \sum_{k=1}^r \lambda_{r+k} e_k = \vec{0}$$

Puisque $(e_1, \dots, e_r)$ est libre (base de $\text{Im } f$), on en déduit que $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Mais alors

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^r \lambda_k e_k$$

et toujours par liberté de $(e_1, \dots, e_r)$, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Conclusion, tous les coefficients sont nuls donc $\mathcal{B}$ est libre et est une base de E .

(c) On a donc

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(e_2) = \dots = f(e_r) = \vec{0} \\ f(e_{r+1}) &= e_1, f(e_{r+2}) = e_2, \dots, f(e_n) = f(e_{r+r}) = e_r \end{aligned}$$

$$\text{et ainsi } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. ① $\Rightarrow$ ③ : C'est la question 2.

③ $\Rightarrow$ ① : Si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\text{rg}(f) = r$ (immédiat) d'où $\dim \ker f = r$ par la FDR et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = 0$ d'où $f^2 = 0$.

Remarque : On peut aussi écrire que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(e_2) = \dots = f(e_r) = \vec{0} \\ f(e_{r+1}) &= e_1, f(e_{r+2}) = e_2, \dots, f(e_n) = f(e_{r+r}) = e_r \end{aligned}$$

donc $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f^2(e_k) = \vec{0}$. L'application linéaire f^2 est nulle sur une base donc est égale à l'application linéaire nulle.

Exercice de khôlle 793

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = -4Id_E$.

1. Que valent $\ker f$? $\text{Im } f$? L'endomorphisme f est-il un automorphisme ? Si oui que vaut f^{-1} ?
2. Montrer que n est un entier pair (calculer $\det f$).
3. Soit $x \in E$, $x \neq 0$, montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre de E .

$$4. \text{ On suppose que } n = 4, \text{ montrer qu'il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ telle que } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution :

1. Facile car $\frac{f^2}{-4} = f \circ \left(-\frac{f}{4}\right) = \left(-\frac{f}{4}\right) \circ f = Id_E$, ce qui prouve que $f \in GL(E)$, donc $\ker f = \{\vec{0}\}$, $\text{Im } f = E$
et aussi que $f^{-1} = -\frac{f}{4}$.
2. On a $\det(f^2) = \det(f)^2 = \det(-4Id_E) = (-4)^n$. En effet, quelque soit la base de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Id) = I_n$ donc $\det(-4Id_E) = \det(-4I_n) = (-4)^n$. On a donc

$$(-4)^n \geq 0$$

car $\det f \in \mathbb{R}$ (E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) donc $\det(f)^2 \geq 0$.

3. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha x + \beta f(x) = \vec{0}$, en composant par f (qui est linéaire), on obtient $\alpha f(x) + \beta f^2(x) = \vec{0}$. On a donc

$$\begin{cases} \alpha x + \beta f(x) = \vec{0} \\ -4\beta x + \alpha f(x) = \vec{0} \end{cases}$$

Si on fait $\alpha L_1 - \beta L_2$ on obtient $(\alpha^2 + 4\beta^2)x = \vec{0}$. Puisque $\vec{x} \neq \vec{0}$, on a $\alpha^2 + 4\beta^2 = 0$ d'où $\alpha = \beta = 0$ (car ce sont des réels).

4. On prend $e_1 \neq \vec{0}$ et $e_2 \notin \text{Vect}(e_1, f(e_1))$. Montrons que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que $\alpha e_1 + \beta f(e_1) + \gamma e_2 + \delta f(e_2) = \vec{0}$, on compose par f pour avoir

$$\begin{cases} \alpha e_1 + \beta f(e_1) + \gamma e_2 + \delta f(e_2) = \vec{0} \\ -4\beta e_1 + \alpha f(e_1) - 4\delta e_2 + \gamma f(e_2) = \vec{0} \end{cases}$$

On ne change pas une équipe qui gagne ! Avec $\gamma L_1 - \delta L_2$ on obtient

$$(\gamma\alpha + 4\delta\beta)e_1 + (\gamma\beta - 4\delta\alpha)f(e_1) + (\gamma^2 + 4\delta^2)e_2 = \vec{0}$$

Si $\gamma^2 + 4\delta^2 \neq 0$ alors $e_2 = -\frac{1}{\gamma^2 + 4\delta^2}((\gamma\alpha + 4\delta\beta)e_1 + (\gamma\beta - 4\delta\alpha)f(e_1))$ donc $e_2 \in \text{Vect}(e_1, f(e_1))$! Absurde, donc $\gamma^2 + 4\delta^2 = 0$ ce qui donne $\gamma = \delta = 0$. Mais alors $\alpha e_1 + \beta f(e_1) = \vec{0}$ et la question précédente donne $\alpha = \beta = 0$ (la famille $(e_1, f(e_1))$ est libre). la famille $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est donc une famille de 4 vecteurs libres en dimension 4, c'est une base de E . Puisque $f^2 = -4Id_E$ on a bien

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : On généralise facilement à la dimension $2n$!

22.5 Déterminant d'un endomorphisme, usage et application !

Exercice de khôlle 794

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et p un projecteur de E . Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(p + \lambda Id_E)$ en fonction du rang de p .

Solution : On se place dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$, i.e. dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ où $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\text{Im } f$ (donc $r = \text{rg } p$) et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker } f$. Dans cette base,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \text{ où il y a } r \text{ «1»}.$$

Mais alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p + \lambda Id_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) + \lambda Id_n = \text{Diag}(1 + \lambda, \dots, 1 + \lambda, \lambda, \dots, \lambda)$$

d'où

$$\det(p + \lambda Id_E) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p + \lambda Id_E)) = \lambda^{n-r} (1 + \lambda)^r$$

Exercice de khôlle 795

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (attention !) de dimension finie n et $u \in L(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $\text{Im } u$ est stable par u .

Ceci permet de définir v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$ i.e. $v : \text{Im } u \longrightarrow \text{Im } u$ défini par $\forall x \in \text{Im } u, v(x) = u(x)$.

2. Que vaut v^2 ?

3. En déduire que $\text{rg}(u)$ est un entier pair. (Indication calculer $\det(v^2)$).

Solution :

1. Evident car si $x \in E$, on a $u(x) \in E$, a fortiori si $x \in \text{Im } u$!
2. Soit $y \in \text{Im } u$, $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$. Mais alors $v^2(y) = u^3(x) = -u(x) = -y$, on a donc $v^2 = -Id_{\text{Im } u}$.
3. On a $\det(v^2) = \det(v)^2 \geq 0$ car $\det(v) \in \mathbb{R}$. Mais $\det(v^2) = \det(-Id_{\text{Im } u})$. Dans une base quelconque de $\text{Im } u$, l'endomorphisme $-Id_{\text{Im } u}$ a pour matrice $-I_r$ où $r = \dim(u) = \text{rg}(u)$ donc $\det(-Id_{\text{Im } u}) = (-1)^r$. Conclusion $(-1)^r \geq 0$ ce qui prouve que r est pair.

Exercice de khôlle 796

Soit φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = 3M - M^T$,

1. Pour $n = 2$, donner la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer $\det \varphi$.
2. Calculer $\det(\varphi)$ dans le cas général.

Solution :

1. Rappel $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où

$$\varphi(E_{1,1}) = 2E_{1,1}, \quad \varphi(E_{1,2}) = 3E_{1,2} - E_{2,1}, \quad \varphi(E_{2,1}) = 3E_{2,1} - E_{1,2} \quad \text{et} \quad \varphi(E_{2,2}) = 2E_{2,2}$$

Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \det \varphi = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32.$$

2. On sait que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^T = -M\}$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^T = M\}$. On prend une base de $\mathcal{A}_n$ et une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour obtenir une base, notée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(M) = 3M - (-M) = 4M$ et si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(M) = 3M - M = 2M$. Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{Diag}(4, \dots, 4, 2, \dots, 2)$$

où il y a $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ fois le nombre 4 et $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ fois le nombre 2. Ainsi

$$\det(\varphi) = 4^{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))} \times 2^{\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))} = 2^{2\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))}$$

$$\text{Enfin } \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2 - n}{2} \text{ (vu en exo type) et } \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2 + n}{2} \text{ d'où}$$

$$\det \varphi = 2^{(n^2 - n) + \frac{n^2 + n}{2}} = 2^{\frac{n(3n - 1)}{2}}$$

On vérifie que $2^{\frac{2(3 \times 2 - 1)}{2}} = 32$ (ouf!).

23.1 Des manipulations

Exercice de khôlle 797

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(B) = a$.

Pour chacun des trois cas : ① A et B sont incompatibles. ② A et B sont indépendants. ③ A est une partie de B . Calculer a et préciser dans chaque cas les probabilités $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(\overline{A})$.

Solution : Pour ① : On a $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \implies \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + a \implies a = \frac{1}{12}$. On a alors $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = 0$ et $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0 \implies \mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A) = 1$.

Pour ② : On a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ par indépendance. Ainsi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \implies \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + a - \frac{a}{4} \implies a = \frac{1}{9}$$

et on en déduit que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Puis $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}$ et $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{3}{4}$ car $(\overline{A}, B)$ sont indépendants.

Pour ③ : On a $A \subset B$ donc $A \cup B = B$ d'où $a = \frac{1}{3}$. Puis $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \implies \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$. Enfin $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = 1$ et $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3}{4}$ d'où $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A) = \frac{1}{4}$.

Exercice de khôlle 798

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A, B et C trois événements tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(B) = \frac{3}{5}, \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5} \text{ et } \mathbb{P}_A(C) = \mathbb{P}_B(C) = \frac{1}{2}$$

1. Minorer $\mathbb{P}(C \cap (A \cup B))$ puis $\mathbb{P}(C)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(\overline{A})$. En déduire une majoration de $\mathbb{P}(C)$.
3. Si l'inverse de la probabilité de C est un entier, que vaut-elle ?

Solution : On écrit les hypothèses $\mathbb{P}_A(C) = \mathbb{P}_B(C) = \frac{1}{2}$ sous la forme

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{2}$$

ce qui donne $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3}{10}$.

1. Puis $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) &= \mathbb{P}((C \cap A) \cup (C \cap B)) = \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(C \cap B) - \mathbb{P}(C \cap A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \mathbb{P}(C \cap A \cap B)\end{aligned}$$

Puisque $C \cap (A \cup B) \subset A \cap B$, par croissance de la probabilité, $\mathbb{P}(C \cap A \cap B) \leq \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}$ d'où

$$\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$$

Enfin, $C \cap (A \cup B) \subset C$ donc $\mathbb{P}(C) \geq \mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) \geq \frac{7}{20}$.

Remarque : On a aussi $C \cap (A \cup B) \subset C$ d'où $\mathbb{P}(C \cap A \cap B) \leq \mathbb{P}(C)$, ce qui donne

$$\mathbb{P}(C) \geq \mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \mathbb{P}(C)$$

d'où l'on tire $\mathbb{P}(C) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{10} \right) = \frac{11}{40}$. Mais cette minoration est moins bonne car $\frac{7}{20} = \frac{14}{40}$.

2. On a $(A \cap C) \cup (\bar{A} \cap C) = (A \cup \bar{A}) \cap C = C$ et $(A \cap C) \cap (\bar{A} \cap C) = \emptyset$ d'où

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap C)$$

Mais $\bar{A} \cap C \subset \bar{A}$ d'où $\mathbb{P}(\bar{A} \cap C) \leq \mathbb{P}(\bar{A})$, ce qui donne le résultat demandé. On en déduit que

$$\mathbb{P}(C) \leq \mathbb{P}(A \cap C) + 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

3. Conclusion $\frac{11}{40} \leq \mathbb{P}(C) \leq \frac{3}{4}$ d'où $1 < \frac{4}{3} \leq \frac{1}{\mathbb{P}(C)} \leq \frac{20}{7} < 3$. Conclusion $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.

Exercice de khôlle 799

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}_{A \cup B}(A \cap B) \leq \mathbb{P}_A(A \cap B)$ (Justifier l'existence de ces probabilités!).
2. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, montrer que l'implication $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}_B(A) \implies \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}_A(B)$ est vraie.

Solution : Avant tout $\mathbb{P}_{A \cup B}(A \cap B)$ existe car $A \subset A \cup B$ donc par croissance de la probabilité, $0 < \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$.

1. On a $\mathbb{P}_{A \cup B}(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)}$. Mais $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ d'où

$$(A \cap B) \cap (A \cup B) = ((A \cap B) \cap A) \cup ((A \cap B) \cap B) = A \cap B$$

(On peut aussi écrire que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$). Ainsi

$$\mathbb{P}_{A \cup B}(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cup B)}$$

Mais $\mathbb{P}_A(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$. Puisque $0 < \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$ par passage à l'inverse et multiplication par $\mathbb{P}(A \cap B)$ (qui est positif), on a l'inégalité demandée.

2. Pour montrer une implication, on suppose les premisses vraies et on montre la conclusion. On suppose donc que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}_B(A)$ ce qui s'écrit $\mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. On a alors (puisque $\mathbb{P}(B) > 0$), $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B)$ d'où en multipliant par $\frac{1}{\mathbb{P}(A)} > 0$

$$\mathbb{P}(B) \leq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B)$$

Exercice de khôlle 800

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On rappelle que si A et B sont deux événements, on a défini $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$.

Montrer que

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \Delta B)$$

Solution : On pose $C = A \Delta B$, alors $C \cup B = A \cup B$. En effet, $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = A \cup B$. Puis $B \setminus A \subset B \subset A \cup B$ donc

$$C \cup B = (B \setminus A) \cup A \cup B = A \cup B$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(C \cup B) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B)$$

d'où

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B)$$

Mais, par croissance de la probabilité, $\mathbb{P}(C \cap B) \geq 0$ et $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A)$ car $A \cup B \supset A$. Ainsi

$$\mathbb{P}(C) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$

et par symétrie des rôles, on a aussi $\mathbb{P}(C) \geq \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

Exercice de khôlle 801

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille d'événement 2 à 2 incompatibles. On pose $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ et soit

B un événement.

$$1. \text{ Simplifier } \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{A_k}(B) \mathbb{P}_A(A_k).$$

2. On suppose que $\mathbb{P}_{A_k}(B)$ ne dépend pas de k , que vaut $\mathbb{P}_A(B)$?

Solution : Avant tout $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \neq 0$ donc $\mathbb{P}_A(A_k)$ existe.

$$1. \text{ On a } \mathbb{P}_A(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \text{ et } A_k \cap A = A_k \cap \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (A_k \cap A_i) = A_k \text{ d'où}$$

$$\mathbb{P}_A(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\text{Puis } \mathbb{P}_{A_k}(B) \mathbb{P}_A(A_k) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_k)}{\mathbb{P}(A_k)} \times \frac{\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_k)}{\mathbb{P}(A)} \text{ donne}$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{A_k}(B) \mathbb{P}_A(A_k) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B)$$

car $B \cap A = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ et les $(B \cap A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont 2 à 2 incompatibles.

2. Si $\mathbb{P}_{A_k}(B) = p$ est une constante, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(B) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{A_k}(B) \mathbb{P}_A(A_k) = p \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_A(A_k) = p \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{p}{\mathbb{P}(A)} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \\ &= p \text{ car } \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 802

On considère un ensemble fini $\mathcal{K}$ (non vide) et on note $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{K})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{K}$. Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités sur $\mathcal{K}$. Pour $k \in \mathcal{K}$, on pose $p_k = \mathbb{P}(\{k\})$ et $q_k = \mathbb{Q}(\{k\})$. On définit la distance en variation entre les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ par

$$d(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|$$

1. Pour $\mathcal{K} = \{0, 1\}$, exprimer $d(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ à l'aide de p_1 et q_1 .

2. Justifier que pour $A \in \mathcal{A}$, $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| \in [0, 1]$.

3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$2|\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| = \left| \sum_{k \in A} p_k - q_k \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right|.$$

4. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| \leq d(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$.

5. Montrer que la partie $A = \{k \in \mathcal{K}, q_k \geq p_k\}$ réalise l'égalité dans l'inégalité précédente.

6. Montrer que $d(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} \min(p_k, q_k)$

Solution :

1. Si $\mathcal{K} = \{0, 1\}$ alors $d(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k| = \frac{|p_0 - q_0| + |p_1 - q_1|}{2}$. Mais $p_0 + p_1 = q_0 + q_1$ (car $(\{0\}, \{1\})$ est un SCE de $\mathcal{K}$). donc $p_0 - q_0 = (1 - p_1) - (1 - q_1) = q_1 - p_1$ et ainsi $d(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = |p_1 - q_1|$.

2. On sait que $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{Q}(A)$ sont dans $[0, 1]$ donc $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ et $-1 \leq -\mathbb{Q}(A) \leq 0$ d'où $-1 \leq \mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A) \leq 1$ d'où $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| \in [0, 1]$.

3. On sait que pour $A \in \mathcal{A}$, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in A} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k \in A} p_k$ et de même $\mathbb{Q}(A) = \sum_{k \in A} q_k$. On en déduit que

$$\sum_{k \in A} p_k - q_k = \mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)$$

et de même $\sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k = \mathbb{P}(\bar{A}) - \mathbb{Q}(\bar{A})$. Puisque $(A, \bar{A})$ est un SCE, on a $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{Q}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{Q}(A)$

d'où

$$\left| \sum_{k \in A} p_k - q_k \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right| = |\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| + |(1 - \mathbb{P}(A) - (1 - \mathbb{Q}(A)))| = 2|\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)|$$

4. Par IT, on a

$$\left| \sum_{k \in A} p_k - q_k \right| \leq \sum_{k \in A} |p_k - q_k| \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right| \leq \sum_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k|$$

d'où

$$2|\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| \leq \sum_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k| = \sum_{k \in A \cup \bar{A}} |p_k - q_k| = \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k| = 2d(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$$

5. Si $A = \{k \in \mathcal{K}, q_k \geq p_k\}$ alors $\bar{A} = \{k \in \mathcal{K}, q_k < p_k\}$ et

$$2|\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| = \left| \sum_{k \in A} p_k - q_k \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right| = \left| \sum_{k \in A} q_k - p_k \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right|$$

Mais si $k \in A$, $q_k - p_k = |q_k - p_k| = |p_k - q_k| \geq 0$ et si $k \in \bar{A}$, $p_k - q_k = |p_k - q_k| \geq 0$ d'où

$$\left| \sum_{k \in A} q_k - p_k \right| = \sum_{k \in A} q_k - p_k = \sum_{k \in A} |p_k - q_k| \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right| = \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k = \sum_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k|$$

ainsi

$$2|\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| = \sum_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k| = 2d(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$$

6. On utilise encore $A = \{k \in \mathcal{K}, q_k \geq p_k\}$, ainsi, si $k \in A$, $\min(p_k, q_k) = p_k$ et si $k \in \bar{A}$, $\min(p_k, q_k) = q_k$ d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{K}} \min(p_k, q_k) &= \sum_{k \in A} \min(p_k, q_k) + \sum_{k \in \bar{A}} \min(p_k, q_k) = \sum_{k \in A} p_k + \sum_{k \in \bar{A}} q_k = \mathbb{P}(A) + \mathbb{Q}(\bar{A}) \\ &= \mathbb{P}(A) + 1 - \mathbb{Q}(A) = 1 - (\mathbb{Q}(A) - \mathbb{P}(A)) \end{aligned}$$

On a donc

$$1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} \min(p_k, q_k) = \mathbb{Q}(A) - \mathbb{P}(A)$$

Il suffit de prouver que $\mathbb{Q}(A) \geq \mathbb{P}(A)$ pour avoir $\mathbb{Q}(A) - \mathbb{P}(A) = |\mathbb{Q}(A) - \mathbb{P}(A)| = |\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)| = d(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ (d'après la question précédente). Mais puisque pour $k \in A$, on a $q_k \geq p_k$, en sommant $\sum_{k \in A} q_k = \mathbb{Q}(A) \geq \sum_{k \in A} p_k = \mathbb{P}(A)$.

23.2 Formule de probabilités composées (mais pas que ...)

Exercice de khôlle 803

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne. Déterminer la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans ce tirage.

Solution : Au moins une...il faut envisager l'événement contraire! Soit A = «au moins une boule noire a été tirée lors des n tirages» alors $\bar{A}$ = «les n tirages ont tous amenés une boule blanche». On définit ainsi B_k = «le $k^{ième}$ tirage amène une boule blanche», ainsi

$$\bar{A} = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}) &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n) \\ &= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{n-2}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n!}{2n(2n-1)\cdots(n+1)} \times \frac{n(n-1)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 1} = \frac{n! \times n!}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Remarque : On peut aussi continuer le tirage jusqu'à épuisement des boules. Un tirage est alors un anagramme du mot $B \cdots B N \cdots N$ qui a $2n$ lettres dont n lettres B (et n lettres N). On a $\binom{2n}{n}$ tirages (on choisit où placer les «B» par exemple) et un seul qui commence par n fois la lettre B . Ainsi $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice de khôlle 804

On considère une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On effectue successivement des tirages avec remise. À chaque tirage, on tire une seule boule; on replace ensuite cette boule dans l'urne, ainsi qu'une autre de la même couleur. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement B_k «On a tiré une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage».

1. Pour $n \geq 1$, on pose A_n «la noire sort pour la première fois à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage». Décrire A_n à l'aide des B_k .
2. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir une boule noire pour la première fois à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage?
3. Le jeu cesse lorsque la boule noire est tirée. Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, quelle est la probabilité que le jeu cesse en moins de N tirages?

Solution :

1. On a $A_1 = \overline{B_1}$ et si $n \geq 2$,

$$A_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}$$

2. On a $p_1 = \frac{1}{2}$, puis par les probabilités composées, on a

$$p_n = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(\overline{B_n})$$

Mais

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3} \text{ (on a tiré une blanche, remis deux blanches et il a toujours la noire)}$$

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{k}{k+1} \text{ (on a tiré } k-1 \text{ fois une blanche, donc ajouté } k \text{ blanches à celle de départ)}$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(\overline{B_n}) = \frac{1}{n+1} \text{ (on a tiré } n-1 \text{ fois une blanche, donc ajouté } n-1 \text{ blanches à celle de départ)}$$

d'où

$$p_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{k}{k+1} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

3. L'événement $A = S_N$ «le jeu cesse en moins de N tirages» est défini par

$$S_N = \bigcup_{n=1}^N A_n$$

où la réunion est disjointe. Par incompatibilité, on a

$$\mathbb{P}(S_N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Exercice de khôlle 805

Une urne contient $r \geq 1$ boules rouges et $b \geq 1$ boules blanches. On tire n boules dans l'urne selon le protocole suivant : si la boule tirée est rouge on la remet sinon on l'écarte définitivement. On pose $N = r + b$.

1. Calculer la probabilité de ne tirer aucune boule blanche.
2. La seconde boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?
3. Calculer la probabilité d'avoir tiré exactement une boule blanche.

Solution : Pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, On note $R_k = \llcorner \text{On a tiré une boule blanche au } k^{\text{ième}} \text{ tirage} \rceil$ et $B_k = \llcorner \text{On a tiré une unique boule blanche et c'était au } k^{\text{ième}} \text{ tirage} \rceil$.

1. Soit $Z = \llcorner \text{on a tiré zéro boule blanche} \rceil$, alors $Z = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n$, par la formule de probabilités composées, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{r}{N} \times \frac{r}{N} \times \dots \times \frac{r}{N} = \left(\frac{r}{N} \right)^n \end{aligned}$$

2. On veut calculer $\mathbb{P}_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{R_1} \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\mathbb{P}_{\overline{R_1}}(R_2) \times \mathbb{P}(\overline{R_1})}{\mathbb{P}(R_2)}$ Bayes $\frac{\mathbb{P}_{\overline{R_1}}(R_2) \times \mathbb{P}(\overline{R_1})}{\mathbb{P}_{R_1}(R_2) \mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(R_2) \mathbb{P}(\overline{R_1})}$. On a

$$\mathbb{P}_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{r}{N-1} \text{ (on a enlevé une boule après le premier tirage), } \mathbb{P}(\overline{R_1}) = \frac{b}{N}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(R_2) \mathbb{P}(\overline{R_1}) \\ &= \frac{r}{N} \times \frac{r}{N} + \frac{r}{N-1} \times \frac{b}{N} = \frac{r}{N} \left(\frac{r}{N} + \frac{b}{N-1} \right) \\ &= \frac{r}{N^2(N-1)} (rN + bN - 1) = \frac{r(N^2 - r)}{N^2(N-1)} \text{ car } N = r + b \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{\frac{r}{N-1} \times \frac{b}{N}}{\frac{r(N^2 - r)}{N^2(N-1)}} = \frac{bN}{N^2 - r} = \frac{(N-r)N}{N^2 - r} = 1 - r \frac{N-r}{N^2 - r}$$

3. Soit $A = \llcorner \text{On a tiré exactement une boule blanche} \rceil$ alors $A = \bigcup_{k=1}^n B_k$, la réunion étant disjointe car les $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont deux à deux incompatibles. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k)$$

Puis $B_k = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k} \cap R_{k+1} \cap \dots \cap R_n$ d'où par les probabilités composées

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_k) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k-1}}(\overline{R_k}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}}(R_{k+1}) \times \dots \\ &= \frac{r}{N} \times \frac{r}{N} \times \dots \times \frac{r}{N} \times \frac{b}{N} \times \frac{r}{N-1} \times \dots \times \frac{r}{N-1} = \left(\frac{r}{N} \right)^{k-1} \times \frac{b}{N} \times \left(\frac{r}{N-1} \right)^{n-k} \\ &= \frac{r^{n-1}b}{N^k(N-1)^{n-k}} = \frac{r^{n-1}b}{(N-1)^n} \left(\frac{N-1}{N} \right)^k \end{aligned}$$

On peut vérifier car $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{N} \times \left(\frac{r}{N-1}\right)^{n-1}$ et $\mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{r}{N}\right)^{n-1} \times \frac{b}{N}$. Pour finir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{r^{n-1}b}{(N-1)^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{N-1}{N}\right)^k = \frac{r^{n-1}b}{(N-1)^n} \times \left(\frac{N-1}{N}\right) \times \frac{1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n}{1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)} \\ &= \frac{r^{n-1}b}{(N-1)^{n-1}} \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 806

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération. On note A_n l'événement «Les n premières boules tirées soient rouges».

Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et montrer que cette probabilité vaut $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Solution : On suppose qu'il existe un univers $(\Omega, \mathbb{P})$ qui modélise l'expérience. On a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, si A_n est réalisé, c'est que à chacun des tirages on a tiré une rouge donc on a ajouté 2 boules à chaque tirage. Dans ce cas, l'urne contient $1 + 2n$ boules rouges et une blanche. On a donc $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2n+1}{2n+2}$. L'astuce est que, pour $n \geq 1$,

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = A_n \text{ car } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$$

Par les probabilités composées, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}\end{aligned}$$

On montre ensuite que $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Méthode ① : Récurrence sur n , c'est vrai si $n = 1$ car $\frac{\binom{2}{1}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ puis si $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ alors

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}\right) \times \frac{2n+1}{2n+2} \stackrel{H R_n}{=} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

Il suffit donc de prouver que

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \times \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} \text{ soit } \binom{2n}{n} \times \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4}$$

Mais

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{((n+1) \times n!)^2} = \frac{2n+2}{n+1} \times \frac{(2n+1)}{(n+1)} \times \frac{(2n)!}{n!^2} = 2 \frac{(2n+1)}{(n+1)} \binom{2n}{n}$$

L'hérédité est donc acquise (eh oui, ouvrez les yeux!).

Méthode ② :

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times (2n)}$$

d'où

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n)!}{(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times (2n))^2}$$

mais

$$2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n-2) \times (2n) = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \dots \times (2 \times (n-1)) \times (2 \times n) = 2^n \times n!$$

d'où

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} = \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n! \times (2n-n)!} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Remarque : Avec les intégrales de Wallis (cherchez le TD), on montre que $\mathbb{P}(A_n) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

23.3 Un peu de tout

Exercice de khôlle 807

Un fumeur chronique vient de terminer sa cigarette et décide de ne plus fumer. Si à un jour donné il ne fume pas, la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,7. En revanche s'il a fumé un jour donné, la probabilité qu'il fume le lendemain 0,1.

1. Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le n ème jour. (on introduira les événements $F_n = \ll \text{il fume le } n\text{ème jour} \gg$).
2. Que se passe-t-il si n est grand ?

Solution :

1. On note $F_n = \ll \text{il fume le } n\text{ème jour} \gg$. On a $\mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = \frac{7}{10}$ et $\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) = \frac{1}{10}$. Avec le SCE $(F_n, \overline{F_n})$ on a

$$\mathbb{P}(F_{n+1}) = \mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1})\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1})\mathbb{P}(\overline{F_n})$$

soit en posant $p_n = \mathbb{P}(F_n)$, on a $p_{n+1} = \frac{p_n}{10} + \frac{7(1-p_n)}{10} = \frac{7}{10} - \frac{3}{5}p_n$. On a une suite arithmético-géométrique. On la résout

$$p_n - \ell = \left(-\frac{3}{5}\right)^n (p_0 - \ell) \text{ où } p_0 = 1 \text{ et } \ell = \frac{7}{10} - \frac{3}{5}\ell \implies \ell = \frac{7}{16}$$

on a donc

$$p_n = \frac{7}{16} + \left(-\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{9}{16} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{16} = 0,437$$

Remarque : Cet exercice peut aussi être vu comme une chaîne de Markov pour laquelle il y a deux états : Fume et Ne Fume Pas.

2. Si n est grand, il y a plus de chance qu'il ne fume pas (ouf sauvé) car $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{16}$ donc $p_n < \frac{1}{2}$ APCR.

Exercice de khôlle 808

Quand on va, entre 18 h et 19h, chez Loane, on a neuf chances sur dix de tomber sur son chien très méchant. Il va ouvrir (chien intelligent) lorsqu'elle est là, deux fois sur trois pour qu'elle ne soit pas dérangée. Quand elle s'absente, son chien tape toujours la discute avec les visiteurs. On notera C l'événement «On tombe sur le chien» et L l'événement «Loane est à la maison».

1. Calculer la probabilité que Loane soit là entre 18h et 19h.
2. On tombe sur son gentil chien-chien. Calculer la probabilité que Loane soit chez elle.

Solution : D'après les données, on a $\mathbb{P}(C) = \frac{9}{10}$, $\mathbb{P}_L(C) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}_{\bar{L}}(C) = 1$.

1. On a donc avec le SCE $(L, \bar{L})$, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_L(C) \mathbb{P}(L) + \mathbb{P}_{\bar{L}}(C) \mathbb{P}(\bar{L})$ d'où en posant $x = \mathbb{P}(L)$

$$\frac{9}{10} = \frac{2}{3}x + 1 \times (1 - x) \text{ car } \mathbb{P}(\bar{L}) = 1 - \mathbb{P}(L)$$

ce qui donne $x = \frac{3}{10}$

2. On veut calculer $\mathbb{P}_C(L)$, on sait que

$$\mathbb{P}_C(L) \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_L(C) \mathbb{P}(L)$$

d'où

$$\mathbb{P}_C(L) = \frac{\mathbb{P}_L(C) \mathbb{P}(L)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9}$$

Exercice de khôlle 809

Une urne contient $2n$ boules dont n noires et n blanches. On vide l'urne en tirant, sans remise, les boules successivement.

On note A_k l'événement «lors des n premiers tirages, on a obtenu k boules noires» et $p_k = \mathbb{P}(A_k)$. Calculer p_k et en déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Solution : Un tirage est un anagramme du mot

$$\underbrace{N \cdots N}_{n \text{ «N»}} \underbrace{B \cdots B}_{n \text{ «B»}}$$

Le cardinal de l'univers est donc $\binom{2n}{n}$ (pour construire un tel anagramme, on choisit les emplacements des n lettres N).

L'événement A_k est donc l'ensemble des anagrammes tel que parmi les n première lettres, on a k lettres «N». Pour construire un tel anagramme, on choisit parmi les n premiers emplacements où mettre les k «N» et parmi les n derniers emplacements où mettre les $n - k$ «N» qui restent. On a donc

$$|A_k| = \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$$

et ainsi

$$p_k = \frac{\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \binom{n}{k}^2$$

Puisque les A_k forment un SCE, on a

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1 \text{ d'où } \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}} = 1 \text{ soit } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice de khôlle 810

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une urne $\mathcal{U}$ contient 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, $\dots$ et n jetons numérotés n . On dispose de n urnes $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ telles que pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'urne $\mathcal{U}_i$ contient i boules blanches et $n - i$ boules noires. On tire un jeton dans $\mathcal{U}$, soit i son numéro, on prélève dans l'urne $\mathcal{U}_i$ une boule.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche.
2. Quelle est la probabilité, sachant que la boule est blanche, qu'elle ait été tirée dans l'urne $\mathcal{U}_n$?

Solution : Toujours la même idée, si on sait dans quelle urne on a tiré la boule, on sait calculer la probabilité qu'elle soit blanche. On introduit donc les événements $U_i = \llcorner \text{le numéro du jeton tiré est } i \rceil$ (ainsi $U_i = \llcorner \text{on tire la boule dans l'urne } i \rceil$). Les $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment un SCE (c'est évident, on ne tire que un numéro, donc $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et on a un numéro donc $\bigcup_{i=1}^n U_i = \Omega$). Comme toujours, on se garde bien de préciser l'univers (qui finalement est l'ensemble des couples de $\llbracket 1; n \rrbracket \times \{B, N\}$ par exemple). Et on suppose que la probabilité est uniforme, tant pour le tirage du jeton que celui de la boule. Enfin, on note $B = \llcorner \text{la boule obtenue est } \text{à la vanille} \text{ blanche} \rceil$.

1. Par la formule des probabilités totales (incantation classique du maître des probabilités) on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{U_k}(B) \times \mathbb{P}(U_k)$$

On a, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{U_k}(B) = \frac{k}{n}$ et $\mathbb{P}(U_k) = \frac{k}{N}$ où $N = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ est le nombre de jetons de l'urne $\mathcal{U}$ (eh oui, faut déjà calculer ce nombre). Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^n \frac{2k^2}{n^2(n+1)} = \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2}{n^2(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \text{ (ouf c'est bien inférieur à 1)} \end{aligned}$$

On est content de constater que pour $n = 1$, on a $\mathbb{P}(B) = 1$ (y réfléchir).

2. On demande la valeur de $\mathbb{P}_B(U_n)$, mais

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(U_n) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap U_n)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(U_n)}{\mathbb{P}(B)} \frac{\mathbb{P}(B \cap U_n)}{\mathbb{P}(U_n)} = \frac{\mathbb{P}(U_n)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}_{U_n}(B) \\ &= \frac{\frac{2n}{n(n+1)}}{\frac{2n+1}{3n}} \times 1 = \frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 811

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour un dé pipé la probabilité d'avoir un 6 est de $\frac{1}{2}$.

- On tire un dé au hasard parmi les 100 et on le lance. On obtient un 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on tire un dé au hasard parmi les 100 et on lance n fois. Les lancers sont supposés indépendants. On obtient un 6 à chaque tirage, quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?
Calculer $\lim p_n$ et interpréter.

Solution :

- On note $T = \text{"le dé est pipé"}$ et $A = \text{"On obtient un 6"}$. On veut calculer $\mathbb{P}_A(T)$.
 $(T, \bar{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles avec $\mathbb{P}(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{3}{4}$. On a alors (Bayes) en utilisant $\mathbb{P}_T(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{\bar{T}}(A) = \frac{1}{6}$

$$\mathbb{P}_A(T) = \frac{\mathbb{P}_T(A) \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_T(A) \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\bar{T}}(A) \mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

- Pour $k \in [[1, n]]$, on pose $A_k = \text{"on tire un 6 au } k\text{-ième lancer"}$ et $A = \bigcap_{k=1}^n A_k$. On demande de calculer $\mathbb{P}_A(T)$.

Avec Bayes, on a

$$p_n = \mathbb{P}_A(T) = \frac{\mathbb{P}_T(A) \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_T(A) \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\bar{T}}(A) \mathbb{P}(\bar{T})}$$

mais ici $\mathbb{P}_T(A) = \frac{1}{2^n}$ et $\mathbb{P}_{\bar{T}}(A) = \frac{1}{6^n}$ (par indépendance mutuelle) d'où

$$p_n = \frac{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6^n} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Si on obtient que des 6, on est sûr que le dé est pipé (logique).

Exercice de khôlle 812

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 noires, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient 4 boules blanches et 3 noires. On choisit une urne et on tire une boule que l'on remet. Si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $\mathcal{U}_1$ sinon il se fait dans l'urne $\mathcal{U}_2$. On tire une seconde boule, si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $\mathcal{U}_1$ sinon il se fait dans l'urne $\mathcal{U}_2$... On note $B_n = \text{"le } n\text{-ième tirage a donné une boule blanche"}$ et $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

- Calculer p_1 .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{4}{7} - \frac{6}{35}p_n$.
- Calculer p_n puis sa limite.

Solution : On note $U = \text{"pour le premier tirage, on a choisi l'urne } \mathcal{U}_1\text{"}$, ainsi $\mathbb{P}(U) = \frac{1}{2}$ et $(U, \bar{U})$ est un SCE.

- On a $p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}_U(B_1) \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1) \mathbb{P}(\bar{U})$. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_U(B_1) = \frac{2}{5}$ et $\mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1) = \frac{4}{7}$ d'où

$$p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$$

2. On utilise le SCE $(B_n, \overline{B_n})$, ainsi

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1})\mathbb{P}(\overline{B_n})$$

mais $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{4}{7}$ et $\mathbb{P}(\overline{B_n}) = 1 - \mathbb{P}(B_n) = p_n$ d'où

$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n) = \frac{4}{7} - \frac{6}{35}p_n$$

3. On résout la récurrence (qui est celle d'une suite arithmético-géométrique). On pose p_0 pour que $p_1 = \frac{17}{35} = \frac{4}{7} - \frac{6}{35}p_0$ d'où $p_0 = \frac{1}{2}$ puis

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{4}{7} - \frac{6}{35}p_n \\ \ell &= \frac{4}{7} - \frac{6}{35}\ell \end{aligned}$$

d'où $p_{n+1} - \ell = -\frac{6}{35}(p_n - \ell)$ donne (suite géométrique)

$$p_n - \ell = \left(-\frac{6}{35}\right)^n (p_0 - \ell)$$

soit

$$p_n = \ell + \left(-\frac{6}{35}\right)^n (p_0 - \ell)$$

avec $\ell = \frac{20}{41}$ (mais c'est sans intérêt). Puisque $\left|-\frac{6}{35}\right| < 1$, on a $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = \frac{20}{41}$ soit un peu moins de $\frac{1}{2}$.

Exercice de khôlle 813

Une urne contient $n \geq 2$ boules blanches et une boule noire. On effectue l'expérience suivante :

On lance un dé à 6 faces non truqué. Si le dé donne un 5 ou un 6, on pioche 3 boules dans l'urne. Sinon on en pioche une seule.

- Déterminer la probabilité de tirer une boule noire.
- On a tiré une boule noire. Quelle est la probabilité d'avoir fait un 6 avec le dé ?

Solution : On note S «on a fait un 6 avec le dé», T «on a fait un 5 ou un 6 avec le dé», N «on a tiré une boule noire».

1. On sait que $(T, \overline{T})$ est un SCE, ainsi

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}_T(N)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\overline{T}}(N)\mathbb{P}(\overline{T})$$

On a $\mathbb{P}(T) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}_{\overline{T}}(N) = \frac{1}{n+1}$ (il y a une seule noire parmi $n+1$ boules). Reste à calculer $\mathbb{P}_T(N)$. Si on considère que les boules blanches numérotées, avec par exemple le numéro $n+1$ pour la noire, il y a $\binom{n+1}{3}$ tirages possibles et $\binom{n}{2}$ tirages donnant une noire (on choisit la noire puis 2 parmi n boules blanches). Ainsi

$$\mathbb{P}_T(N) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}} = \frac{3}{n+1}$$

Au final

$$\mathbb{P}(N) = \frac{3}{n+1} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3(n+1)}$$

Remarque : On peut aussi calculer $\mathbb{P}_T(\overline{N}) = 1 - \mathbb{P}_T(N)$ qui vaut $\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n+1}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}} = \frac{n-2}{n+1} =$

$1 - \frac{3}{n+1}$, car cela revient à choisir 3 blanches parmi les $n+1$. Cette méthode serait plus intéressante si l'on a plus d'une boule noire.

2. On veut calculer $\mathbb{P}_N(S) = \frac{\mathbb{P}(N \cap S)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\mathbb{P}(N \cap S)}{\mathbb{P}(S)} \frac{\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(N)} = \mathbb{P}_S(N) \times \frac{\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(N)}$. On a $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}_S(N) = \frac{3}{n+1}$ d'où

$$\mathbb{P}_N(S) = \frac{3}{n+1} \times \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{3(n+1)}} = \frac{3}{10}$$

Exercice de khôlle 814

On dispose de 10 boîtes numérotées de 1 à 10. Pour $k \in \llbracket 1 ; 10 \rrbracket$, la boîte k contient k boules rouges et 10 boules noires.

On choisit alors une boîte au hasard, puis une boule au hasard dans cette boîte.

1. Soit $k \in \llbracket 1 ; 10 \rrbracket$, quelle est la probabilité conditionnelle d'obtenir une boule rouge sachant qu'on a choisi la boîte k ?
2. En déduire la probabilité, noté r , d'obtenir une boule rouge (on ne demande pas un résultat numérique).
3. On a tiré une boule rouge, soit p la probabilité qu'elle ait été tirée dans la dixième boîte, que vaut $p \times r$?

Solution : On suppose qu'il existe un univers qui décrit cette expérience. On note $B_k = \llcorner$ on a choisi la boîte k (et donc on tire dans cette boîte) $\lrcorner$ et $R = \llcorner$ on a tiré une boule rouge $\lrcorner$.

1. On demande $\mathbb{P}_{B_k}(R)$ qui, selon l'énoncé vaut simplement $\frac{k}{10+k}$.
2. On a les SCE $(B_1, \dots, B_{10})$ (c'est bien un SCE, c'est clair) donc

$$\mathbb{P}(R) = \sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}_{B_k}(R) \times \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{10+k} \times \frac{1}{10}$$

car le choix de la boîte se fait de manière uniforme. On a donc

$$r = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{10+k} = 0,331\dots$$

3. Simple, on veut $\mathbb{P}_R(B_{10}) \times r = \frac{\mathbb{P}_{B_{10}}(R) \times \mathbb{P}(B_{10})}{r} \times r = \frac{10}{10+10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$.

Exercice de khôlle 815

Deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ contiennent des boules blanches et noires. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 12 boules blanches et 6 boules noires,

l'urne $\mathcal{U}_2$ contient 10 boules blanches et 10 boules noires. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine. A chaque tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le tirage suivant se fait dans $\mathcal{U}_1$ (resp. $\mathcal{U}_2$). Soit B_i l'évènement «on obtient une boule blanche au i -ème tirage».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(B_2)$.
2. Exprimer, pour $n \geq 1$, $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(B_n)$ et en déduire l'expression de $\mathbb{P}(B_n)$ en fonction de n .

Solution : On note $U_1 = \ll \text{on a choisi l'urne 1} \gg$ alors $(U_1, \overline{U_1})$ est un SCE. Il faut bien comprendre que si B_n est réalisé alors le tirage suivant se fait dans l'urne $\mathcal{U}_1$!

- On a donc $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}_{U_1}(B_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}_{\overline{U_1}}(B_1)\mathbb{P}(\overline{U_1})$. Avec $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(\overline{U_1}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{U_1}(B_1) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}_{\overline{U_1}}(B_1) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

Pour le calcul de $\mathbb{P}(B_2)$, on utilise le SCE $(B_1, \overline{B_1})$ ainsi $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2)\mathbb{P}(\overline{B_1})$ avec $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\overline{B_1}) = 1 - \mathbb{P}(B_1)$

$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{43}{72}$$

- On utilise le SCE $(B_n, \overline{B_n})$ qui donne directement

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{2} \times (1 - \mathbb{P}(B_n))$$

Si on pose $u_n = \mathbb{P}(B_n)$, on a $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}(1 - u_n) = \frac{u_n}{6} + \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{7}{12}$. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ pour avoir $\frac{7}{12} = \frac{1}{6}u_0 + \frac{1}{2}$ et on résout la récurrence.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{6} + \frac{1}{2}, \ell = \frac{\ell}{6} + \frac{1}{2} \text{ donne } u_{n+1} - \ell = \frac{u_n - \ell}{6} \text{ d'où } u_n - \ell = \frac{u_0 - \ell}{6^n}$$

Avec $\ell = \frac{3}{5}$ on obtient

$$u_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^n}$$

Exercice de khôlle 816

On considère une urne $\mathcal{U}$ dans laquelle on a placé $n \geq 2$ boules blanches et une boule noire. On lance un dé à six faces non truqué. Si le résultat est 1, 2 ou 3 on pioche une boule dans l'urne, si le résultat est 4 ou 5, on pioche deux boules, sinon on en pioche trois.

- Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire.
- On a obtenu une boule noire, quelle est la probabilité que le résultat du dé ait été un 4 ?

Solution : On considère qu'il existe un univers Ω qui modélise l'expérience. On le munit de la probabilité uniforme. On note U, D, T les événements $U = \ll \text{le résultat du dé est 1, 2 ou 3} \gg$, $D = \ll \text{le résultat du dé est 4 ou 5} \gg$ et $T = \ll \text{le résultat du dé est 6} \gg$. Le système (U, D, T) est un SCE. Enfin, on note $N = \ll \text{on a pioché une noire} \gg$ et $Q = \ll \text{le résultat du dé est 4} \gg$.

- D'après la formule de probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}_U(N)\mathbb{P}(U) + \mathbb{P}_D(N)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}_T(N)\mathbb{P}(T)$$

On a $\mathbb{P}(U) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{6}$. De manière évidente $\mathbb{P}_U(N) = \frac{1}{n+1}$ (une noire dans une urne de $n+1$ boules). Reste à calculer $\mathbb{P}_D(N)$ et $\mathbb{P}_T(N)$. Pour $\mathbb{P}_D(N)$, si on considère que les boules blanches numérotées, avec par exemple le numéro $n+1$ pour la noire, il y a $\binom{n+1}{2}$ poignées possibles et $\binom{n}{1}$ tirages donnant une noire (on choisit la noire puis 1 parmi n boules blanches). Ainsi

$$\mathbb{P}_D(N) = \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n+1}{2}} = \frac{n}{\frac{(n+1)n}{2}} = \frac{2}{n+1}$$

de la même manière,

$$\mathbb{P}_T(N) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{3}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}} = \frac{3}{n+1}$$

Conclusion

$$\mathbb{P}(N) = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{n+1} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3(n+1)}$$

2. Il s'agit de calculer $\mathbb{P}_N(Q)$, par inversion de conditionnement

$$\mathbb{P}_N(Q) = \frac{\mathbb{P}(Q \cap N)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\mathbb{P}(Q \cap N)}{\mathbb{P}(Q)} \times \frac{\mathbb{P}(Q)}{\mathbb{P}(N)} = \mathbb{P}_Q(N) \times \frac{\mathbb{P}(Q)}{\mathbb{P}(N)}$$

mais $\mathbb{P}_Q(N) = \mathbb{P}_D(N) = \frac{2}{n+1}$ et $\mathbb{P}(Q) = \frac{1}{6}$ d'où

$$\mathbb{P}_N(Q) = \frac{2}{n+1} \times \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{3(n+1)}} = \frac{1}{5}$$

Exercice de khôlle 817

Une urne contient trois boules noires et quatre boules blanches. On choisit deux boules dans l'urne que l'on met dans un sac. Puis on tire une boule du sac.

1. Quelle est la probabilité que la boule tirée du sac soit blanche ?
2. Si la boule tirée du sac est blanche, quelle est la probabilité que l'autre boule du sac le soit aussi ?

Solution : On note $B = \ll \text{on a tiré deux boules blanches de l'urne} \gg$, $N = \ll \text{on a tiré deux boules noires de l'urne} \gg$

et $D = \ll \text{on a tiré deux boules de couleur différente de l'urne} \gg$. Ainsi (B, N, D) est un SCE. De plus $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} =$

$$\frac{2}{7}, \mathbb{P}(N) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7} \text{ et } \mathbb{P}(D) = \frac{3 \times 4}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{7}.$$

1. Soit $BS = \ll \text{on a tiré une boule blanche du sac} \gg$, alors $\mathbb{P}_B(BS) = 1$, $\mathbb{P}_N(BS) = 0$ et $\mathbb{P}_D(BS) = \frac{1}{2}$ d'où, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(BS) &= \mathbb{P}_B(BS) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_N(BS) \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}_D(BS) \mathbb{P}(D) \\ &= 1 \times \frac{2}{7} + 0 \times \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} > \frac{1}{2} \text{ (ouf)} \end{aligned}$$

2. On cherche $\mathbb{P}_{BS}(B)$, par Bayes

$$\mathbb{P}_{BS}(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap BS)}{\mathbb{P}(BS)} = \frac{\mathbb{P}_B(BS) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(BS)} = \frac{1 \times \frac{2}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{2}$$

Exercice de khôlle 818

Une urne contient n boules noires, on ajoute un nombre aléatoire, compris entre 1 et n , de boules blanches. On pioche une boule de l'urne. Soit p_n la probabilité que la boule soit blanche. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Solution : Pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, soit A_k = «on a ajouté k boules blanches dans l'urne». Les $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ forment un SCE et $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$. Si B = «on a tiré une boule blanche» alors

$$p_n = \mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{A_k}(B) \mathbb{P}(A_k)$$

Mais $\mathbb{P}_{A_k}(B) = \frac{k}{n+k}$ (il y a k boules blanches et n noires). D'où

$$p_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{k}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}}$$

qui est une SDR pour la fonction f définie et continue sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Ainsi

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x} dx = 1 - \ln(2)$$

23.4 Chaîne de Markov**Exercice de khôlle 819**

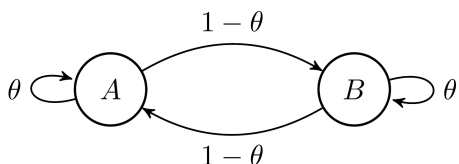
Une particule se déplace aléatoirement de la manière suivante :

- A l'instant initial $n = 0$, elle est en A .
- A tout instant $n \in \mathbb{N}$, la particule se trouve soit en A , soit en B .
- Il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité que la particule ne change pas de position entre les instants n et $n+1$ est égale à θ .

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n = «la particule se trouve en A à l'instant n » et B_n = «la particule se trouve en B à l'instant n » et on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n, b_n et θ .
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique et en déduire a_n en fonction de n puis sa limite.

Solution : L'énoncé permet d'affirmer (point par point) que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n) est un SCE et que $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \theta$. Puisque $\mathbb{P}_{A_n}$ est une probabilité et que $B_n = \overline{A_n}$, on a $\mathbb{P}_{A_n}(B_n) = 1 - \theta$ et de même $\mathbb{P}_{B_n}(A_n) = 1 - \theta$.



1. Avec la formule de probabilités totales et le SCE (A_n, B_n) on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \mathbb{P}(B_n) = \theta a_n + (1 - \theta) b_n \\ b_{n+1} &= \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) \mathbb{P}(B_n) = (1 - \theta) a_n + \theta b_n \end{aligned}$$

2. Mais toujours parce que (A_n, B_n) est un SCE, on a $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) = a_n + b_n = 1$ d'où

$$a_{n+1} = \theta a_n + (1 - \theta)(1 - a_n) = (2\theta - 1)a_n + (1 - \theta)$$

Ainsi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Puis on résout la récurrence

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2\theta - 1)a_n + (1 - \theta) \\ \ell &= (2\theta - 1)\ell + (1 - \theta) \end{aligned}$$

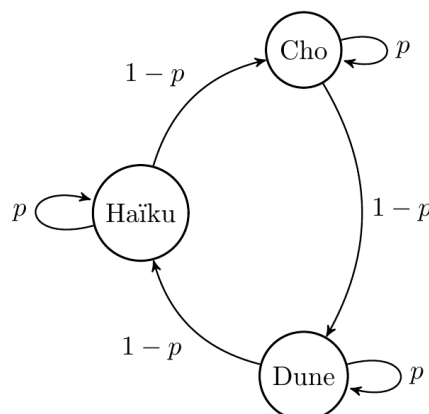
par différence, en posant $u_n = a_n - \ell$, on a $u_{n+1} = (2\theta - 1)u_n$ d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $2 - \theta$ et de premier terme $u_0 = a_0 - \ell$. On a donc $u_n = (2\theta - 1)^n u_0$ soit $a_n - \ell = (2\theta - 1)^n (1 - \ell)$. Bref

$$a_n = \ell + (2\theta - 1)^n (1 - \ell)$$

On peut calculer ℓ qui vaut $\ell = \frac{1}{2}$! Ainsi $a_n = \frac{1}{2}(1 + (2\theta - 1)^n)$. Enfin $0 < \theta < 1 \implies -1 < 2\theta - 1 < 1$ d'où $|2\theta - 1| < 1$, ce qui assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$ et puisque $b_n = 1 - a_n$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

Exercice de khôlle 820

Une puce se déplace entre trois chiens, Haïku, Cho et Dune. A l'instant 0, elle est sur Haïku. Si à l'instant n elle se trouve sur Haïku (resp. Cho, Dune) alors elle y reste avec la probabilité $p \in]0, 1[$ ou se déplace sur Cho (resp. Dune, Haïku) avec la probabilité $1 - p$. On note a_n (resp. b_n, c_n) la probabilité que la puce soit sur Haïku (resp. Cho, Dune) à l'instant n .



1. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, justifier que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^2 = \bar{j}$.
2. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $Q\bar{Q}^T$. En déduire que Q est inversible et préciser Q^{-1} .
3. Calculer $Q^{-1}JQ$, en déduire que $\forall (p, q) \in \mathbb{C}^2$, $pI_3 + qJ$ est semblable à une matrice diagonale.
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = MX_n$ où $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. En déduire la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution :

1. On a $j^3 = 1$ et $j \neq 1$ donc $1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$, puis $j\bar{j} = |j|^2 = 1 = j^3$ donc $j^2 = \bar{j}$ (ce n'est pas la seule manière de faire).

2. La matrice Q est une VDM (Van der Monde). Puisque $j^2 = \bar{j}$, $\overline{j^2} = j$ et $\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{aligned} Q\overline{Q}^T &= \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j^2 & j & 1 \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2j^3 & 1+j^2+j^4 & 1+j+j^2 \\ 1+j^2+j^4 & 1+2j^3 & 1+j+j^2 \\ 1+j+j^2 & 1+j+j^2 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3 \text{ car } j^3 = 1, j^4 = j \text{ et } 1+j+j^2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{3} \overline{Q}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j^2 & j & 1 \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On commence par $JQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, puis

$$\begin{aligned} 3Q^{-1}JQ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j^2 & j & 1 \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1+j+j^2 & 1+j+j^2 \\ 1+j+j^2 & 3j^2 & j+j^2+j^3 \\ 1+j+j^2 & j+j^2+j^3 & 2j+j^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3j \end{pmatrix} \text{ car } j^4 = j \text{ et } j+j^2+j^3 = j+j^2+1 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$Q^{-1}JQ = \text{Diag}(1, j^2, j)$$

Mais alors

$$\begin{aligned} Q^{-1}(pI_3 + qJ)Q &= pQ^{-1}I_3Q + qQ^{-1}JQ = pI_3 + qQ^{-1}JQ \\ &= \text{Diag}(p+q, p+j^2q, p+jq) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $pI_3 + qJ$ est semblable à une matrice diagonale.

4. On note $A_n = \text{«La puce est sur Haïku»}$, $B_n = \text{«La puce est sur Cho»}$ et $C_n = \text{«La puce est sur Dune»}$. Alors (A_n, B_n, C_n) est un SCE et la formule des probabilités totales permet d'écrire que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ &= pa_n + (1-p)c_n \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) \\ &= (1-p)a_n + pb_n \\ c_{n+1} &= (1-p)b_n + pc_n \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & p \end{pmatrix} X_n = MX_n \\ \text{où } M &= pI_3 + (1-p)J \end{aligned}$$

On a alors, par récurrence immédiate,

$$X_n = M^n X_0$$

Or $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M = QDQ^{-1}$ où $D = \text{Diag}(p+q, p+j^2q, p+jq)$ et $q = 1-p$. Ainsi $D = \text{Diag}(1, p+j^2q, p+jq)$

$$M^n = QD^nQ^{-1}$$

et

$$X_n = QD^nQ^{-1}X_0$$

Pour finir, $Q^{-1}X_0$ est la première colonne de Q^{-1} donc $Q^{-1}X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ puis

$$D^nQ^{-1}X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (p+j^2q)^n & 0 \\ 0 & 0 & (p+jq)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \times (p+j^2q)^n \\ j \times (p+jq)^n \end{pmatrix}$$

et pour finir

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \times (p+j^2q)^n \\ j \times (p+jq)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + (p+j^2q)^n + (p+jq)^n \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

D'où

$$a_n = \frac{1}{3} \left(1 + (p+j^2q)^n + (p+jq)^n \right)$$

Reste à déterminer la limite (ça finit jamais cet exo!), donc de $(p+j^2q)^n$ et $(p+jq)^n$. Ces deux termes sont conjugués (car $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ et $\overline{(p+jq)} = p+j^2q$ (on n'oublie pas que p et q sont réels et que $\overline{j} = j^2$), donc si détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p+jq)^n$, par conjugaison, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p+j^2q)^n$. Allez, on parie que $|p+jq| < 1$? Un petit calcul donne

$$\begin{aligned} |p+jq|^2 &= (p+jq)\overline{(p+jq)} = (p+jq)(p+j^2q) = p^2 + q^2 + pq(j+j^2) \\ &= p^2 + q^2 - pq \text{ (car } 1+j+j^2=0\text{)} \\ &= (p+q)^2 - 3pq = 1 - 3p(1-p) < 1 \text{ car } p \in]0,1[\text{ donc } 1-p \in]0,1[\end{aligned}$$

Conclusion $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p+jq)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (p+j^2q)^n = 0$ et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$.

Exercice de khôlle 821

Une urne contient, à l'instant $n = 0$, deux boules blanches et deux boules noires. A chaque instant, on pioche une boule. Si elle est blanche, on la replace dans l'urne, sinon on l'enlève. On note X_n le nombre de boules noires à la fin de l'instant n . On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique et on pose

$$e_1 = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Que vaut U_0 ? Déterminer $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = \frac{1}{6}MU_n$.
2. Justifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à M , déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. En déduire U_n en fonction de n .
4. A la fin de l'instant $n \geq 1$, il y a une boule noire, quelle est la probabilité, noté p_n , qu'à l'instant précédent, l'urne ait contenu deux boules noires?

Solution : Pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose du SCE $([X_n = i])_{0 \leq i \leq 2}$. La formule des probabilités totales donne, pour $i \in \{0, 1, 2\}$

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = i]) = \sum_{k=1}^2 \mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = i]) \times \mathbb{P}([X_n = k])$$

1. On a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La formule des probabilités totales donne

$$\frac{1}{6}M = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1}=0]) & \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=0]) & \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=0]) \\ \mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1}=1]) & \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) & \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=1]) \\ \mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1}=2]) & \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=2]) & \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=2]) \end{pmatrix}$$

Puisque l'on ne remet pas la boule noire, lorsqu'elle est tirée, on a pour $k < i$, $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1}=i]) = 0$. Et puisque l'on ne retire au plus qu'une boule, $\mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=0]) = 0$. Ainsi

$$\frac{1}{6}M = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1}=0]) & \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=0]) & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) & \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=1]) \\ 0 & 0 & \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=2]) \end{pmatrix}$$

Enfin, puisque la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_n=i]}$ est une probabilité, la somme sur les colonnes vaut 1, donc

$$\frac{1}{6}M = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1}=0]) & 1 - \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) & 1 - \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=2]) \\ 0 & 0 & \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=2]) \end{pmatrix}$$

Puis : $\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_n=0]) = 1$ (il n'y a plus de boule noire à l'instant n , on est sûr de tirer une blanche),

$\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) = \frac{2}{3}$ (si $X_n = 1$, l'urne est composée de deux boules blanches et d'une noire).

$\mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1}=1]) = \frac{1}{2}$ (si $X_n = 2$, l'urne a la même composition qu'au départ). Bref

$$\frac{1}{6}M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On calcule $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est une base. Puis $f(e) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (première colonne

de M), $f(e_2) = M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(e_3) = M \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. On a $U_{n+1} = \frac{1}{6}MU_n$, par récurrence, il vient $U_n = \frac{1}{6^n}M^nU_0$. Mais $M^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^n)$, la formule de changement de base donne

$$M^n = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = D^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } U_n = \frac{1}{6^n} P D^n P^{-1} U_0$$

On peut calculer P^{-1} , mais $P^{-1}U_0$ est la troisième colonne de P^{-1} (car $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Il suffit donc de

décomposer $\vec{k}$ selon $e_1 = \vec{i}$, $e_2 = \vec{i} - \vec{j}$ et $e_3 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = -\vec{i} + 3(\vec{i} - \vec{j}) + \vec{k} = -e_1 + 3e_2 + \vec{k}$. Ainsi

$$P^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puis $D^n P^{-1} U_0 = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6^n \\ -3 \times 4^n \\ 3^n \end{pmatrix}$ et enfin

$$U_n = \frac{1}{6^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n \\ -3 \times 4^n \\ 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{6^n} \begin{pmatrix} 6^n - 3 \times 4^n + 2 \times 3^n \\ 3 \times 4^n - 3^{n+1} \\ 3^n \end{pmatrix}$$

On est content de constater que $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. On veut calculer $\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n-1}=2])$. On a, par Bayes,

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n-1}=2]) = \frac{\mathbb{P}_{[X_{n-1}=2]}([X_n=1]) \times \mathbb{P}([X_{n-1}=2])}{\mathbb{P}([X_n=1])} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3^{n-1}}{6^{n-1}}}{\frac{3 \times 4^n - 3^{n+1}}{6^n}} = \frac{3^n}{3 \times 4^n - 3 \times 3^n} \end{aligned}$$

On vérifie que $p_1 = 1$ (eh oui!).

23.5 Le 04 Juillet

Exercice de khôlle 822

On lance n fois une pièce équilibrée et on note A = «La pièce indiquée est tombée n fois sur la même face» et B = «La pièce est tombée au plus une fois côté pile». Les deux événements A et B sont-ils indépendants?

Solution : Le résultat est une n -liste de l'ensemble $\{P, F\}$, le cardinal de l'univers Ω est donc 2^n . La pièce est équilibrée, on munit donc Ω de la probabilité uniforme. L'événement A est constitué des deux événements élémentaires $(P, \dots, P)$ et $(F, \dots, F)$ ainsi $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. L'événement B est constitué de l'événement élémentaire $(F, \dots, F)$ et des n -listes qui contiennent un seul P . Il y a n listes de ce type (autant que de rang de tirage où est sorti «pile»). Ainsi $|B| = 1 + n$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{n+1}{2^n}$.

Enfin l'événement $A \cap B$ est réduit à $(F, \dots, F)$ d'où $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2^n}$. Il y a indépendance si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \text{ soit } \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

ce qui équivaut à $2^{n-1} = n+1$. Pour $n=1$ et 2 , ce n'est pas vérifié, mais pour $n=3$ c'est vrai. Puis si $n \geq 3$

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &= (1+1)^{n-1} = 1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots \\ &\geq 1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} = 1 + n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

Mais $1 + n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n+1) = \frac{1}{2}n(n-3) > 0$ si $n > 3$. Donc la seule valeur de n pour laquelle A et B sont indépendants est $n=3$.

Remarque : On peut aussi montrer que si $n \geq 3$ alors $2^{n-1} > n+1$ par récurrence.

Exercice de khôlle 823

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

Solution : Sens $\Rightarrow$: L'indépendance de A et B s'écrit

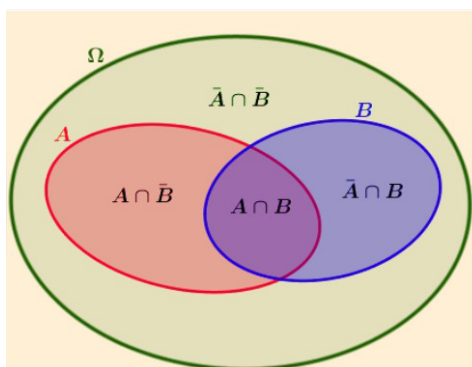
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$

On sait que dans ce cas $\bar{A}$ et $\bar{B}$, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants donc

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}(\bar{B}), \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(\bar{B}) \text{ et } \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}(B)$$

L'égalité $\mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$ est donc vérifiée.

Sens $\Leftarrow$: On commence par un petit dessin patateïre



On sait que (le saviez-vous ?)

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{(A \cup B)} \text{ (De Morgan) d'où } \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \quad ①$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \text{ (Formule de Poincaré ou du crible)} \quad ②$$

Puisque $(B, \bar{B})$ est un SCE, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) \quad ③$$

de même puisque $(A, \bar{A})$ est un SCE, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) \quad ④$$

On pose, pour simplifier

$$a = \mathbb{P}(A), b = \mathbb{P}(B) \text{ et } c = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Ainsi

$$① \text{ et } ② \text{ donnent } \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - (a + b - c)$$

$$③ \text{ donne } \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = a - c$$

$$④ \text{ donne } \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = b - c$$

La condition $\mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$ s'écrit alors

$$c(1 - a - b + c) = (a - c)(b - c)$$

ce qui en développant et simplifiant conduit à

$$c = ab \text{ i.e. } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B), \text{ les événements sont indépendants}$$

Exercice de khôlle 824

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A, B et C trois événements tels que B et C soient indépendants non négligeables avec C non certain. Montrer que

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_{B \cap C}(A) \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_{B \cap \overline{C}}(A) \mathbb{P}(\overline{C})$$

(on justifiera l'existence des probabilités conditionnelles).

Rappel : B non négligeable signifie $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et C non certain signifie que $\mathbb{P}(C) \neq 1$

Solution : Puisque B et C sont indépendants on a $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) \neq 0$ et par indépendance de B et $\overline{C}$ on a $\mathbb{P}(B \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(\overline{C}) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(C)) \neq 0$. Les trois probabilités conditionnelles sont bien définies. Puis

$$\mathbb{P}_{B \cap C}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C)}, \quad \mathbb{P}_{B \cap \overline{C}}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{C})}{\mathbb{P}(B \cap \overline{C})} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{C})}{\mathbb{P}(B) \mathbb{P}(\overline{C})}$$

par indépendance de B et C et donc de B et $\overline{C}$. On en déduit que

$$\mathbb{P}_{B \cap C}(A) \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_{B \cap \overline{C}}(A) \mathbb{P}(\overline{C}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{C})}{\mathbb{P}(B)}$$

Mais (avec $X = X \cap (C \cup \overline{C}) = (X \cap C) \cup (X \cap \overline{C})$ si X est un événement)

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B \text{ et } (A \cap B \cap C) \cap (A \cap B \cap \overline{C}) = \emptyset$$

d'où

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

d'où, au final

$$\mathbb{P}_{B \cap C}(A) \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_{B \cap \overline{C}}(A) \mathbb{P}(\overline{C}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A)$$

Exercice de khôlle 825

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements. On suppose que $\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

Solution : La condition $\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$ assure que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \neq 0$, ainsi $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$ sont bien définies. Dans ce cas $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$ s'écrit également $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(\overline{A})}$ ou plus simplement

$$\mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \mathbb{P}(A)$$

Sens $\implies$: Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B aussi. Ainsi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A}) \mathbb{P}(B)$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(\overline{A})$$

Sens $\impliedby$: On suppose que $\mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \mathbb{P}(A)$. Puisque $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ avec $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ incompatibles, on a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

Remarque : on peut aussi écrire que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité donc que $\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1$ ce qui donne $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} +$

$$\frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 \text{ et ainsi } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\overline{A}) &= \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \mathbb{P}(A) && \iff \mathbb{P}(A \cap B) \mathbb{P}(\overline{A}) = (\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \mathbb{P}(A) \\ \iff \mathbb{P}(A \cap B) (\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A)) &= \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) && \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

et permet d'affirmer que A et B sont indépendants.

23.6 Pour les guerriers

Exercice de khôlle 826

On dispose de deux dés truqués (et indépendants). Pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on note p_k la probabilité que le premier dé tombe sur la face numérotée k et q_k la probabilité que le second dé tombe sur la face numérotée k . On note S la somme des deux dés. Ainsi $S(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$, ensemble des valeurs possibles prises par S . On notera $A_k = \llcorner \text{le premier dé a donné } k \rceil$ et $B_k = \llcorner \text{le second dé a donné } k \rceil$.

$$1. \text{ On note les polynômes } A = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}([S = k]) X^k \text{ et } B = \sum_{i=1}^6 p_i X^i \text{ et } C = \sum_{j=1}^6 q_j X^j.$$

Justifier $A = BC$.

2. On suppose que l'on a réussi à truquer les dés pour que la somme des chiffres obtenus suive une loi uniforme i.e que la probabilité de l'apparition de chaque somme est identique.

(a) Que vaut $\mathbb{P}([S = k])$ pour tout $k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$?

(b) Simplifier alors l'expression du polynôme A et justifier que A n'a pas de racine réelle autre que 0.

(c) Montrer que BC possède au moins une racine réelle autre que 0.

3. Conclusion ?

Solution :

$$1. \text{ On a } [S = k] = \bigcup_{\substack{1 \leq i, j \leq 6 \\ i+j=k}} A_i \cap B_j \text{ (en d'autres termes pour avoir } S = k, \text{ le premier dé a donné la valeur } i, \text{ le second la}$$

valeur j avec $i+j = k$). On peut écrire que $[S = k] = \bigcup_{i=1}^k A_i \cap B_{k-i}$. Si $i \neq j$, on a $(A_i \cap B_{k-i}) \cap (A_j \cap B_{k-j}) = \emptyset$ (les événements sont donc deux à deux incompatibles) d'où

$$\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i \cap B_{k-i})$$

Puis par indépendances des deux dés, $\mathbb{P}(A_i \cap B_{k-i}) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B_{k-i}) = p_i q_{k-i}$ d'où

$$\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{i=1}^k p_i q_{k-i}$$

en posant $p_0 = q_0 = 0$ on a $\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i}$ et l'on reconnaît la formule du coefficient de X^k dans le produit BC .

2. (a) Si toutes les valeurs de S sont équiprobables, puisqu'il y a 11 valeurs différentes, c'est que $\mathbb{P}([S = k]) = \frac{1}{11}$ pour $k \in \llbracket 2 ; 12 \rrbracket$.

- (b) Dans ce cas $A = \frac{1}{11} (X^2 + \dots + X^{12})$ et pour $x \neq 1$, $A(x) = \frac{1}{11} \frac{(x^{11} - 1)x^2}{x - 1}$. Puisque $A(1) = 1$, $x = 1$ n'est pas racine, ainsi pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$,

$$A(x) = 0 \implies x^{11} - 1 = 0$$

Mais alors $|x^{11}| = |x|^{11} = 1$ d'où $|x| = 1$, si x est réel alors $x = 1$ (exclus) ou $x = -1$. Puisque $A(-1) = \frac{1}{11} \neq 0$, c'est que A n'a pas de racines réelles autre que 0 (qui est bien racine).

- (c) Pour finir

$$\begin{aligned} BC &= (p_1X + \dots + p_6X^6) \times (q_1X + \dots + q_6X^6) \\ &= X^2(p_1 + \dots + p_6X^5) \times (q_1 + \dots + q_6X^5) \end{aligned}$$

Soit $f(x) = p_1 + p_2x + \dots + p_6x^5$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} p_6x^5$ (on suppose que $p_6 \neq 0$, i.e. que la face 6 sort, sinon ce n'est plus un dé à 6 faces!). Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, puisque f est continue (polynômiale), par le TVI elle s'annule en au moins un x_0 . Enfin $f(x_0) = p_1 \neq 0$ (même remarque la face 1 sort!), donc $x_0 \neq 0$. Cela prouve que BC a au moins une autre racine réelle différente de 0.

3. Absurde ! $A(x_0) = 0$ et $x_0 \neq 0$, il est par conséquent impossible de truquer les dés pour que la somme des chiffres obtenus suive une loi uniforme i.e que la probabilité de l'apparition de chaque somme est identique.

Exercice de khôlle 827

Soit un entier naturel n , et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de nombres premiers. On définit $\Omega = \{1, 2, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme. Pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq r$, on pose $A_i = \{k \in \Omega \text{ tel que } p_i \text{ divise } k\}$.

- Si d est un diviseur de n , on note M_d l'ensemble des multiples de d dans Ω . Calculer $\mathbb{P}(M_d)$.
- Pour chaque $i = \llbracket 1 ; r \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(A_i)$.
- (a) Montrer que, pour $i \neq j$, les événements A_i et A_j sont indépendants.
(b) Justifier que les événements $A_1, A_2, \dots, A_r$ sont mutuellement indépendants.
- Calculer la probabilité de l'événement $B = \{k \in \Omega \text{ tel que aucun } p_i \text{ ne divise } k\}$.
- En déduire la valeur de $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $\varphi(n) = |B|$ (le cardinal de B).
($\varphi(n)$ représente le nombre d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui sont premiers avec n et porte le nom d'indicatrice d'Euler)

Solution :

1. Le cardinal de M_d , noté $|M_d|$, est égal au nombre de multiples de d plus petits que n , il s'agit donc du nombre d'entiers ℓ tels que $1 \leq \ell \times d \leq n$ Mais

$$1 \leq \ell \times d \leq n \iff 0 < \frac{1}{d} \leq \ell \leq \frac{n}{d} \iff 1 \leq \ell \leq \frac{n}{d}$$

Ainsi $|M_d| = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \frac{n}{d}$ car d est un diviseur de n donc $\frac{n}{d}$ est un entier. Puis, la probabilité étant uniforme sur $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$, on

$$\mathbb{P}(M_d) = \frac{|M_d|}{|\Omega|} = \frac{\frac{n}{d}}{n} = \frac{1}{d}.$$

2. $|A_i|$ est le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et tels qu'il existe ℓ avec $k = p_i \times \ell$. Il y en a donc $\left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor = \frac{n}{p_i}$

car p_i divise n . D'où $\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{n} = \frac{1}{p_i}$.

Remarque : On peut aussi simplement observer que $A_i = M_{p_i} !!!$

- 3.

- (a) $|A_i \cap A_j|$ est le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et tels qu'il existe m avec $k = p_i p_j \times m$ car p_i et p_j sont premiers entre eux. D'où $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{p_i p_j} = \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j)$.

Remarque : On peut aussi dire que, puisque p_i et p_j sont premiers entre eux (donc $\text{PGCD}(p_i, p_j) = 1$), on a $\text{PPCM}(p_i, p_j) = p_i \times p_j$. Par conséquent, l'ensemble des multiples communs à p_i et p_j est exactement l'ensemble des multiples de $p_i \times p_j$.

- (b) C'est le même argument, pour l'indépendance mutuelle : par exemple (pour 3 événements), si i, j, k sont deux à deux distincts, les multiples communs de p_i, p_j et p_k sont les multiples de $p_i \times p_j \times p_k$, etc...

4. $\varphi(n) = |B|$ avec $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_r}$ où les $(A_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont mutuellement indépendants d'où

$$\mathbb{P}(B) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^r (1 - \mathbb{P}(A_i)) = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Et pour finir

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{n} \text{ d'où } \varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Par exemple : si $n = 12 = 2^2 \times 3$ alors $B = \{1, 5, 7, 11\}$ et $4 = 12 \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3})$.

CHAPITRE 24

ESPACES EUCLIDIENS (DONT LE SILENCE ÉTERNEL M'EFFRAIE)

24.1 Alors c'est-y un produit scalaire ou pas ?

Exercice de khôlle 828

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pour $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ on pose

$$f(U, V) = x_1 x_2 + \alpha x_1 y_2 + \beta x_2 y_1 + 3y_1 y_2 + 2z_1 y_2 + 2z_2 y_1 + 4z_1 z_2$$

A quelles conditions sur α et β cela définit-il un produit scalaire ?

Solution : Avant tout $f(U, V)$ est bien toujours défini et est réel. Puis si on pose $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} U^T M V &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_2 + dy_2 + gz_2 \\ bx_2 + hy_2 + kz_2 \\ cx_2 + fy_2 + kz_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On compare avec

$$f(U, V) = x_1(x_2 + \alpha y_2) + y_1(\beta x_2 + 3y_2 + 2z_2) + z_1(2y_2 + 4z_2)$$

pour en déduire que si $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ alors

$$f(U, V) = U^T M V$$

Ceci permet d'établir la linéarité à droite puisque le produit matriciel l'est. De manière précise si $(U, V, W) \in \mathbb{R}^3$ alors

$$f(U, V + \lambda W) = U^T M (V + \lambda W) = U^T M V + \lambda U^T M W = f(U, V) + \lambda f(U, W)$$

Pour la symétrie, on écrit que

$$f(V, U) = x_2 x_1 + \alpha x_2 y_1 + \beta x_1 y_2 + 3y_2 y_1 + 2z_2 y_1 + 2z_1 y_2 + 4z_2 z_1$$

d'où

$$f(U, V) - f(V, U) = (\alpha - \beta)(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Si $\alpha = \beta$ c'est nul, si $\alpha \neq \beta$ en prenant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $f(U, V) \neq f(V, U)$. Une CNS pour que f

soit symétrique est que $\alpha = \beta$. Désormais, on suppose donc que $\alpha = \beta$, ainsi f est une f.b.s.

Remarque : Bien sûr, cela revient à dire que $M^T = M$ i.e. que M est symétrique.

Puis, pour la positivité,

$$\begin{aligned} f(U, U) &= x_1^2 + 2\alpha x_1 y_1 + 3y_1^2 + 4y_1 z_1 + 4z_1^2 \\ &= (2z_1 + y_1)^2 + x_1^2 + 2\alpha x_1 y_1 + 2y_1^2 \\ &= (2z_1 + y_1)^2 + (x_1 + \alpha y_1)^2 - \alpha^2 y_1^2 + 2y_1^2 \\ &= (2z_1 + y_1)^2 + (x_1 + \alpha y_1)^2 + (2 - \alpha^2) y_1^2 \end{aligned}$$

Cas ① : $2 - \alpha^2 < 0$. Avec $y_1 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_1 = -\alpha$, on a $f(U, U) = 2 - \alpha^2 < 0$

Cas ② : $2 - \alpha^2 \geq 0$, alors $f(U, U) \geq 0$. La forme f est alors positive. On suppose donc que $2 - \alpha^2 \geq 0$.

Pour finir,

$$f(U, U) = 0 \iff \begin{cases} (2z_1 + y_1)^2 = 0 \\ (x_1 + \alpha y_1)^2 = 0 \\ (2 - \alpha^2) y_1^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2z_1 + y_1 = 0 \\ x_1 + \alpha y_1 = 0 \\ \sqrt{2 - \alpha^2} y_1 = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha^2 = 2$, avec $y_1 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_1 = -\alpha$ on a $U \neq \vec{0}$ et $f(U, U) = 0$, le critère de séparation n'est pas vérifié.

Sinon on obtient $y_1 = 0$ puis $x_1 = z_1 = 0$!

Conclusion : On a défini un produit scalaire si et seulement si $\beta = \alpha$ et $\alpha \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Exercice de khôlle 829

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, on sait que $(f | g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ donc sur E (qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$).

1. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(|)$ sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.
2. En déduire, pour $f \in E$, une minoration de $\int_0^1 (f'(t))^2 dt$ en fonction de $f(0)$ et de $f(1)$.
3. Montrer que $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f'(t) g'(t) dt + f(1) g(0) + f(0) g(1)$ définit un produit scalaire sur E .

Solution :

1. Si $(f, g) \in E$, on a

$$\left(\int_0^1 f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^1 g(t)^2 dt \right)$$

2. Si $f \in E$, on a $f' \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et avec $g = 1$ on obtient

$$\left(\int_0^1 f'(t) dt \right)^2 = (f(1) - f(0))^2 \leq \left(\int_0^1 f'(t)^2 dt \right) \left(\int_0^1 1 dt \right) = \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

3. Avant tout, puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, la fonction $f' \times g'$ est continue donc l'intégrale existe. Le résultat est bien un réel. Il est clair que $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle$ (commutativité du produit des réels). Par linéarité de

la dérivation, de l'intégration et de l'évaluation et par distributivité du produit des réels, $\forall (f, g, h) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle f | g + \lambda h \rangle &= \int_0^1 f'(t) (g + \lambda h)'(t) dt + f(1) (g + \lambda h)(0) + f(0) (g + \lambda h)(1) \\ &= \int_0^1 f'(t) (g'(t) + \lambda h'(t)) dt + f(1) (g(0) + \lambda h(0)) + f(0) (g(1) + \lambda h(1)) \\ &= \int_0^1 f'(t) g'(t) dt + f(1) g(0) + f(0) g(1) + \lambda \left(\int_0^1 f'(t) h'(t) dt + f(1) h(0) + f(0) h(1) \right) \\ &= \langle f | g \rangle + \lambda \langle f | h \rangle\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité à droite, qui combinée avec la symétrie permet d'établir la bilinéarité.

Puis

$$\langle f | f \rangle = \int_0^1 (f'(t))^2 dt + 2f(1)f(0)$$

Avec la question 2, on a

$$\langle f | f \rangle \geq (f(1) - f(0))^2 + 2f(1)f(0) = f(0)^2 + f(1)^2 \geq 0$$

ce qui prouve la positivité de $\langle f | f \rangle$.

Supposons $\langle f | f \rangle = 0$ alors $0 = \langle f | f \rangle \geq f(0)^2 + f(1)^2 \geq 0$ d'où $f(0)^2 = f(1)^2 = 0$ et ainsi $f(0) = f(1) = 0$. Mais alors

$$0 = \langle f | f \rangle = \int_0^1 (f'(t))^2 dt + 2f(1)f(0) = \int_0^1 (f'(t))^2 dt$$

Puisque f'^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, on en déduit que $f'^2 = 0$ et donc $f' = 0$ sur $[0, 1]$. Conclusion f est constante et nulle car $f(0) = 0$. Ceci termine de montrer que $\langle \quad | \quad \rangle$ est un produit scalaire sur E .

24.2 Orthogonalité et projections orthogonales

Exercice de khôlle 830

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit pour $(P, Q) \in E^2$, $(P | Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1. Montrer que l'on a ainsi défini un produit scalaire sur E .
2. Soit $F = \text{Vect}(1 + X + X^2, 1 - X + X^2)$. Déterminer une base orthonormale de F pour ce produit scalaire.
3. Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$.

Solution : Avant tout, $(P | Q)$ est bien défini pour $(P, Q) \in E^2$ et le résultat est un réel.

1. Linéarité à droite : Soient $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(P | \lambda Q + R) = P(0)(\lambda Q + R)(0) + P'(0)(\lambda Q + R)'(0) + P''(0)(\lambda Q + R)''(0)$$

Par linéarité de l'évaluation et de la dérivation, $(\lambda Q + R)(0) = \lambda Q(0) + R(0)$, $(\lambda Q + R)'(0) = \lambda Q'(0) + R'(0)$ et bien sûr, $(\lambda Q + R)''(0) = \lambda Q''(0) + R''(0)$ d'où

$$(P | \lambda Q + R) = P(0)(\lambda Q(0) + R(0)) + P'(0)(\lambda Q'(0) + R'(0)) + P''(0)(\lambda Q''(0) + R''(0))$$

et par distributivité du produit dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(P | \lambda Q + R) &= \lambda(P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)) + (P(0)R(0) + P'(0)R'(0) + P''(0)R''(0)) \\ &= (P | \lambda Q) + (P | R)\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité à droite.

Puis par commutativité du produit des réels,

$$\begin{aligned}(P \mid Q) &= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \\ &= Q(0)P(0) + Q'(0)P'(0) + Q''(0)P''(0) = (Q \mid P)\end{aligned}$$

ce qui prouve la symétrie, qui couplée avec la linéarité à droite permet d'affirmer que l'on a bien une f.b.s. Enfin la positivité est assurée par

$$(P \mid P) = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geq 0$$

Puis, pour le critère de séparation, $(P \mid P) = 0$ donne $P(0)^2 = P'(0)^2 = P''(0)^2 = 0$ (une somme de trois réels positifs est nulle si et seulement si ces trois réels le sont). D'où $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$, ce qui permet d'affirmer que P admet 0 comme racine triple. Mais $\deg P \leq 2$, on a donc «plus de racines que le degré», bref $P = 0$ et ceci clôt la preuve qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. La famille $(1 + X + X^2, 1 - X + X^2)$ est génératrice de F et est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires. On applique G-S sur cette famille. On pose $P_1 = 1 + X + X^2$ et $P_2 = 1 - X + X^2$. On pose $Q_1 = P_1$, on a

$$\begin{aligned}\|Q_1\|^2 &= P_1(0)^2 + P_1'(0)^2 + P_1''(0)^2 = 1 + 1 + 4 = 6 \\ G_1 &= \frac{1 + X + X^2}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

On pose $Q_2 = P_2 - (P_2 \mid G_1)G_1$. On a

$$\begin{aligned}(P_2 \mid G_1) &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1 - X + X^2 \mid 1 + X + X^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1 \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times 2) = \frac{4}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

d'où

$$Q_2 = (1 - X + X^2) - \frac{4}{\sqrt{6}} \times \frac{1 + X + X^2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}X^2 - \frac{5}{3}X + \frac{1}{3}$$

Reste à calculer $\|Q_2\|^2$ qui vaut

$$\begin{aligned}\|Q_2\|^2 &= Q_2(0)^2 + Q_2'(0)^2 + Q_2''(0)^2 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Une base orthonormale de F est donc

$$\left(\frac{1 + X + X^2}{\sqrt{6}}, \frac{\frac{1}{3}X^2 - \frac{5}{3}X + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{10}{3}}} \right)$$

Fabuleux !

3. C'est un peu plus facile. On écrit que $P = a + bX + cX^2 \in F^\perp$ si et seulement si $(P \mid P_1) = (P \mid P_2) = 0$ (i.e. si P est orthogonal aux générateurs de F). Encore un petit calcul pour avoir

$$\begin{aligned}(P \mid P_1) &= a + b + 4c \\ (P \mid P_2) &= a - b + 4c\end{aligned}$$

d'où

$$P = a + bX + cX^2 \in F^\perp \iff \begin{cases} a + b + 4c \\ a - b + 4c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4c \\ b = 0 \end{cases} \iff P = c(X^2 - 4)$$

donc

$$F^\perp = \text{Vect}(X^2 - 4)$$

Pour finir, on calcule $\|X^2 - 4\|^2 = (-4)^2 + 2^2 = 20$ d'où $\frac{X^2 - 4}{\sqrt{20}}$ est une base orthonormale de $F^\perp$. Et

$$\left(\frac{1 + X + X^2}{\sqrt{6}}, \frac{\frac{1}{3}X^2 - \frac{5}{3}X + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{10}{3}}}, \frac{X^2 - 4}{\sqrt{20}} \right) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_2[X]$$

Exercice de khôlle 831

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique. Déterminer la projection

orthogonale de $u = \sum_{k=1}^4 e_k$ sur le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in E, x + y + z = x + 2y + t = 0\}$.

Solution : On commence par déterminer une base de F . On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + t = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z + t \\ y = z - t \end{cases}$$

Ainsi $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont libres, ils forment une base de F .

On pose alors $v_1 = u_1$, on a $\|v_1\|^2 = 4 + 1 + 1 = 6$, on pose donc $w_1 = \frac{v_1}{\sqrt{6}}$. Puis on pose $v_2 = u_2 - (u_2 | w_1) w_1$.

Remarque : $v_2 = u_2 - \frac{(u_2 | v_1)}{\|v_1\|^2} v_1$, et $\frac{(v_2 | u_2)}{\|v_1\|^2} v_1$ est la projection orthogonale de v_2 sur $\text{Vect}(v_1)$. Ainsi v_2 est égal à u_2 auquel on retranche ce projeté!

On calcule donc $(u_2 | v_1) = (u_2 | u_1) = -2 - 1 = -3$ d'où $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On choisit

alors $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on a $\|v_2\|^2 = 1 + 1 + 4 = 6$. On pose alors $w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $(v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale de F et $(w_1, w_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

est une base orthonormale.

Enfin, si p est la projection orthogonale sur F , on a

$$p(u) = \frac{(u | v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{(u | v_2)}{\|v_2\|^2} v_2 \quad (= (u | w_1) w_1 + (u | w_2) w_2)$$

On a $(u | v_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -2 + 1 + 1 = 0$ et $(u | v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = -1 + 1 + 2$ d'où

$$p(u) = \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice de khôlle 832

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$.

1. Déterminer une base orthonormale de $F = \mathbb{R}_1[X]$.

2. Calculer $\inf_{(a,b)} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Solution :

1. Un coup de G-S sur la base canonique. On pose $P_1 = 1$, $\|P_1\| = \int_0^1 1^2 dt = 1$, d'où $U_1 = 1$. Puis $P_2 = X - \langle X | 1 \rangle 1$, avec

$$\langle X | 1 \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

d'où $P_2 = X - \frac{1}{2}$. Puis

$$\begin{aligned} \|P_2\|^2 &= \langle P_2 | P_2 \rangle = \langle P_2 | X \rangle - \frac{1}{2} \langle P_2 | P_1 \rangle = \langle P_2 | X \rangle \quad (\text{car } P_1 \perp P_2) \\ &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) \times t dt = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

on peut aussi calculer $\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt$ directement

Pour finir $U_1 = 1$ et $U_2 = \frac{X - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \sqrt{3}(2X - 1)$ forment une base orthonormale de F .

2. Soit $P = X^2$ et $Q = aX + b$ (qui décrit $\mathbb{R}_1[X]$ si (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$) de manière à avoir $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \|P - Q\|^2$, il s'agit donc de déterminer

$$\inf_{(a,b)} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \inf_{Q \in \mathbb{R}_1[X]} \|P - Q\|^2$$

Le cours nous dit que cette borne inférieure est un minimum obtenu si $Q = p_F(P)$ est la projection orthogonale de P sur F (car $\|P - p_F(P) + p_F(P) - Q\|^2 = \|P - p_F(P)\|^2 + \|p_F(P) - Q\|^2 \geq \|P - p_F(P)\|^2$ par Pythagore). Donc

$$\inf_{(a,b)} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \|P - p_F(P)\|^2$$

Toujours le cours qui nous dit que

$$p_F(P) = \langle P | U_1 \rangle U_1 + \langle P | U_2 \rangle U_2$$

d'où

$$\begin{aligned} \|P - p_F(P)\|^2 &= \langle P - p_F(P) | P - p_F(P) \rangle \\ &= \langle P - p_F(P) | P \rangle - \langle P - p_F(P) | p_F(P) \rangle \end{aligned}$$

Mais $P - p_F(P) \in F^\perp$ et $p_F(P) \in F$ donc $\langle P - p_F(P) | p_F(P) \rangle = 0$! Bref

$$\begin{aligned}\|P - p_F(P)\|^2 &= \langle P - p_F(P) | P \rangle \\ &= \langle P | P \rangle - \langle P | U_1 \rangle^2 - \langle P | U_2 \rangle^2\end{aligned}$$

Pour finir $\langle P | P \rangle = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$, $\langle P | U_1 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ et $\langle P | U_2 \rangle = \sqrt{3} \int_0^1 t^2 (2t - 1) dt = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ d'où

$$\inf_{(a,b)} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{180}$$

Exercice de khôlle 833

Le théorème de la double projection.

Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et G . Montrer que $p_F = p_F \circ p_G$.

Solution : Soit $x \in E$, $p_F(x) = p_F \circ p_G(x)$ équivaut à

$$p_F(x) - p_F(p_G(x)) = p_F(x - p_G(x)) = \vec{0}$$

Mais $x - p_G(x) \in G^\perp$. Il suffit de prouver que $G^\perp \subset F^\perp$, on en déduit alors que $p_F(x - p_G(x)) = \vec{0}$ car $F^\perp = \ker(p_F)$. Soient $a \in G^\perp$ et $b \in F$ alors $b \in G$ (car $F \subset G$) donc $\langle a | b \rangle = 0$, ceci prouve que tout $a \in G^\perp$ est orthogonal à tout $b \in F$ donc que $G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice de khôlle 834

Soit $E = \mathbb{R}^3$ canonique euclidien, $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .
2. Orthonormaliser $\mathcal{B}$ par le procédé de Gram-Schmidt.
3. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

(a) Déterminer $F^\perp$ et la projection orthogonale de $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

(b) Quelle est la distance de w à F ?

Solution : On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On a $\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_2-C_1, C_3-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ donc $\mathcal{B}$ est une base.

On pose $f_1 = e_1$ puis $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puis

$$f_2 = e_2 - (e_2 \cdot g_1) g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où $f_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\|f_2\| = \frac{2}{3} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{2}{3} \times \sqrt{6}$ donne

$$g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Enfin

$$f_3 = e_3 - (e_3 \cdot g_1) g_1 - (e_3 \cdot g_2) g_2$$

On a

$$\begin{aligned} (e_3 \cdot g_1) g_1 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (e_3 \cdot g_2) g_2 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } g_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La BON obtenue est donc

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

2. On sait que $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(g_1, g_2)$ et que $g_3 \perp g_1$ et $g_3 \perp g_2$ donc

$$F^\perp = \text{Vect}(g_3) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire que

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F^\perp \iff \begin{cases} u \cdot e_1 = 0 \\ u \cdot e_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \iff u \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La projection orthogonale de w sur $F^\perp$ est donc

$$p_{F^\perp}(w) = (w \cdot g_3) \times g_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. La distance de w à F est alors $d(w, F) = \|p_{F^\perp}(w)\| = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Remarque : Cette distance est $\|w - p_F(w)\|$ mais $p_{F^\perp} = Id - p_F$ d'où $w - p_F(w) = p_{F^\perp}(w)$.

Exercice de khôlle 835

On se place dans $\mathbb{R}[X]$.

- Montrer que $(P | Q) = \int_0^1 P(t) Q(t) t dt$ est un produit scalaire sur E .
- Soit $F = \left\{ P \in E, \int_0^1 t P(t) dt = 0 \right\}$.
 - Déterminer une base de F .
 - Déterminer $F^\perp$.
 - Quelle est la distance de $U = 1 + X + X^2$ à F ?

Solution :

- L'intégrale existe (on intègre une fonction continue), la symétrie est évidente. La linéarité à droite provient de la linéarité de l'intégration. Puis si $P \in E$ alors

$$(P | P) = \int_0^1 P^2(t) \times t dt \geq 0 \text{ car } \forall t \in [0, 1], t P^2(t) \geq 0$$

Puis si $(P | P) = 0$, puisque $t \mapsto t P^2(t)$ est positive, continue sur $[0, 1]$ et d'intégrale nulle, on en déduit que $\forall t \in [0, 1], t P^2(t) = 0$ d'où $\forall t \in]0, 1], P^2(t) = 0$. Ainsi P est nul sur la partie infinie $]0, 1]$ donc est le polynôme nul. Ceci prouve le critère de séparation.

2.

- Si $P = a + bX + cX^2$ alors

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \int_0^1 t(a + bt + ct^2) dt = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c = 0 \\ &\iff a = -\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c \iff P = -\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c + bX + cX^2 \iff P \in \text{Vect}\left(X - \frac{2}{3}, X^2 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

La famille $\left(X - \frac{2}{3}, X^2 - \frac{1}{2}\right)$ est génératrice de F et échelonnée donc libre, c'est une base de F .

- On ouvre les yeux car

$$\begin{aligned} P \in F &\iff (P | 1) = \int_0^1 t P(t) dt = 0 \iff P \perp 1 \iff P \in \text{Vect}(\tilde{1})^\perp \\ \text{d'où } F^\perp &= \text{Vect}(1) \end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi écrire que

$$P = a + bX + cX^2 \in F^\perp \iff \begin{cases} (P | X - \frac{2}{3}) = 0 \\ (P | X^2 - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

Mais

$$\begin{aligned} \left(P | X - \frac{2}{3}\right) &= \int_0^1 (a + bt + ct^2) \times \left(t - \frac{2}{3}\right) \times t dt = \frac{1}{36}b + \frac{1}{30}c \\ \left(P | X^2 - \frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 (a + bt + ct^2) \times \left(t^2 - \frac{1}{2}\right) \times t dt = \frac{1}{30}b + \frac{1}{24}c \end{aligned}$$

d'où $\left\{ \begin{array}{l} \left(P \mid X - \frac{2}{3} \right) = 0 \\ \left(P \mid X^2 - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{36}b + \frac{1}{30}c = 0 \\ \frac{1}{30}b + \frac{1}{24}c = 0 \end{array} \right\} \iff \{b = c = 0 \text{ car le déterminant de ce système est } \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{36} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{24} \end{array} \right| = \frac{1}{36 \times 24} - \frac{1}{30^2} \neq 0 \text{ car } 36 \times 24 = 864 = (30 + 6) \times (30 - 6) = 30^2 - 36 \text{ (mais c'est si on aime les calculs!)}\}.$

(c) Si p_F (resp. $p_{F^\perp}$) est la projection orthogonale sur F (resp. $F^\perp$), on sait que $d(U, F) = \|U - p_F(U)\| = \|p_{F^\perp}(U)\|$ avec

$$p_{F^\perp}(U) = \frac{(U \mid \tilde{1})}{\|\tilde{1}\|^2} \times \tilde{1} = \frac{\int_0^1 (1+t+t^2) \times 1 \times t dt}{\int_0^1 1^2 \times t dt} \times \tilde{1}$$

$$(U \mid \tilde{1}) = \int_0^1 (1+t+t^2) \times 1 \times t dt = \frac{13}{12} \text{ et } \|\tilde{1}\|^2 = \int_0^1 1^2 \times t dt = \frac{1}{2}$$

Ainsi

$$d(U, F) = \left| \frac{(U \mid \tilde{1})}{\|\tilde{1}\|^2} \right| \times \|\tilde{1}\| = \frac{|(U \mid \tilde{1})|}{\|\tilde{1}\|} = \frac{\frac{13}{12}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{13}{12} \sqrt{2}$$

Exercice de khôlle 836

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

- Montrer que $\langle P \mid Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P(-1)Q(-1) + P(1)Q(1)$ est un produit scalaire sur E .
- Si P et Q ont des parités différentes, que dire de $\langle P \mid Q \rangle$?
- En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique, donner une base orthonormale, notée $\mathcal{B}$, pour ce produit scalaire.
- Soit $A = 1 - X + X^3$, quelles sont les coordonnées de P dans $\mathcal{B}$? Retrouver la norme de P à l'aide des coordonnées dans $\mathcal{B}$.
- Quelle est la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$?

Solution :

- La linéarité est immédiate par linéarité de l'évaluation, de la dérivation et distributivité de la multiplication des réels. La symétrie est immédiate. Puis $\langle P \mid P \rangle = P(0)^2 + P'(0)^2 + P(-1)^2 + P(1)^2 \geq 0$ (somme de carrés) et est nul si et seulement si $P(0)^2 = P'(0)^2 = P(-1)^2 = P(1)^2 = 0$ donc si et seulement si $P(0) = P'(0) = P(-1) = P(1) = 0$. Ainsi $\langle P \mid P \rangle = 0$ si et seulement si P a 0 comme racine double, 1 et -1 comme racine simple. Puisque $\deg P \leq 3$, on a 4 > 3 racines de P , donc $P = 0$ (plus de racines que le degré).
- Si P est pair et Q impair, alors P' est impair donc $P'(0) = Q(0) = 0$ et ainsi, avec $P(-1) = P(1)$, $Q(-1) = -Q(1)$

$$\langle P \mid Q \rangle = 0 + 0 + P(-1)Q(-1) + P(1)Q(1) = 0$$

- On applique G-S, on pose

$$Q_1 = 1, \|Q_1\|^2 = 3, G_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$Q_2 = X - \langle X \mid G_1 \rangle G_1 = X - \frac{1}{3} \langle X \mid 1 \rangle 1. \text{ Mais } \langle X \mid 1 \rangle = 0 \text{ donc } Q_2 = X, \|Q_2\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3, G_2 = \frac{X}{\sqrt{3}}.$$

$$Q_3 = X^2 - \langle X^2 \mid G_1 \rangle G_1 - \langle X^2 \mid G_2 \rangle G_2. \text{ Mais } \langle X^2 \mid G_2 \rangle = 0 \text{ et } \langle X^2 \mid 1 \rangle = 2 \text{ d'où } Q_3 = X^2 - \frac{2}{3}, \|Q_3\| =$$

$$\langle Q_3 | Q_3 \rangle = \langle Q_3 | X^2 \rangle = \frac{2}{3} \text{ donc } G_3 = \frac{X^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

Enfin $Q_4 = X^3 - \langle X^3 | G_2 \rangle G_2$ (car $\langle X^3 | G_1 \rangle = \langle X^3 | G_3 \rangle = 0$), et $\langle X^3 | X \rangle = 2$ d'où $Q_4 = X^3 - \frac{2}{3}X$, et pour finir $\|Q_4\|^2 = \langle Q_4 | X^3 \rangle = \frac{2}{3}$ d'où $G_4 = \frac{X^3 - \frac{2}{3}X}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = XG_3$.

Une BON est donc

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X}{\sqrt{3}}, \frac{X^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \frac{X^3 - \frac{2}{3}X}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \right)$$

4. Les coordonnées de A dans $\mathcal{B}$ sont obtenues en faisant le produit scalaire avec les vecteurs de la base. On a $A(0) = 1$, $A'(0) = -1$, $A(1) = 1$ et $A(-1) = 1$ donc

$$\langle A | G_1 \rangle = \sqrt{3}, \langle A | G_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \langle A | G_3 \rangle = 0 \text{ et } \langle A | G_4 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

On a $\|A\|^2 = A(0)^2 + A'(0)^2 + A(-1)^2 + A(1)^2 = 4$, mais aussi $\|A\|^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 4$ d'où $\|A\| = 2$.

5. Méthode ① : On sait que $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \|X^3 - p(X^3)\|$ où $p(X^3)$ est la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. De plus

$$\begin{aligned} p(X^3) &= \langle X^3 | G_1 \rangle G_1 + \langle X^3 | G_2 \rangle G_2 + \langle X^3 | G_3 \rangle G_3 \\ &= \langle X^3 | G_2 \rangle G_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{X}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}X \\ \text{et } X^3 - p(X^3) &= X^3 - \frac{2}{3}X = \sqrt{\frac{2}{3}}G_4 \end{aligned}$$

Ainsi

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \left\| \sqrt{\frac{2}{3}}G_4 \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\|G_4\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Méthode ② : Soit q est la projection orthogonale $\mathbb{R}_2[X]^\perp$, alors $X^3 - p(X^3) = q(X^3)$ d'où

$$d(A, \mathbb{R}_2[X]) = \|q(X^3)\|$$

Mais puisque l'on a une BON telle que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(G_1, G_2, G_3)$, on sait que

$$\mathbb{R}_2[X]^\perp = \text{Vect}(G_4)$$

Ainsi $q(X^3) = \langle X^3 | G_4 \rangle G_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}G_4$ et $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

24.3 Cauchy, Schwarz et al

Exercice de khôlle 837

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nt^n \sqrt{1-t^2} dt = 0$.

Solution : On se place sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$. L'inégalité de C.S s'écrit alors

$$\left(\int_0^1 f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt \int_0^1 g^2(t) dt$$

L'idée est donc de séparer en deux le produit $t^n \sqrt{1-t^2}$ afin d'obtenir deux intégrales que l'on sait calculer ! On a donc avec $f(t) = t^n$ et $g(t) = \sqrt{1-t^2}$

$$\left(\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 t^{2n} dt \right) \left(\int_0^1 (1-t^2) dt \right) = \frac{1}{2n+1} \times \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3(2n+1)}$$

d'où $\left| \int_0^1 nt^n \sqrt{1-t^2} dt \right| \leq n \times \sqrt{\frac{2}{3(2n+1)}}$ et cela ne marche pas !

On réfléchit, et on se dit qu'il faut mettre un peu de n dans les deux fonctions ! On pose donc $f(t) = t^{\frac{n}{2}}$ et $g(t) = t^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-t^2}$ ainsi

$$\left(\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 t^n dt \right) \left(\int_0^1 t^n (1-t^2) dt \right) = \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{2}{(n+1)^2 (n+3)}$$

d'où

$$\left| \int_0^1 nt^n \sqrt{1-t^2} dt \right| \leq n \sqrt{\frac{2}{(n+1)^2 (n+3)}} = \frac{n\sqrt{2}}{(n+1)\sqrt{n+3}} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nt^n \sqrt{1-t^2} dt = 0$.

Exercice de khôlle 838

Soient $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ des réels tels que $\forall i \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, b_i > 0$.

1. Montrer que

$$\frac{a_0^2}{b_0} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_0 + \dots + a_n)^2}{b_0 + \dots + b_n}$$

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne. On note $N_k = \llcorner \text{on a tiré } n \text{ boules dont } k \text{ sont noires} \llcorner$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(N_k)$. Que vaut $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(N_k)$? En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

(b) A l'aide de la question 1. donner une minoration de $\binom{2n}{n}$.

(c) En déduire une majoration de la probabilité de tirer toutes les boules de la même couleur.

Solution : On se place dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire canonique.

1. Avec C.S si $X = \begin{pmatrix} \sqrt{b_0} \\ \vdots \\ \sqrt{b_n} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \frac{a_0}{\sqrt{b_0}} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \end{pmatrix}$, on a

$$\langle X | Y \rangle^2 = \left(\sum_{k=0}^n \sqrt{b_k} \times \frac{a_k}{\sqrt{b_k}} \right)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2 = \left(\sum_{k=0}^n (\sqrt{b_k})^2 \right) \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k}{\sqrt{b_k}} \right)^2$$

ce qui donne

$$(a_0 + \dots + a_n)^2 \leq (b_0 + \dots + b_n) \left(\frac{a_0^2}{b_0} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) \text{ d'où le résultat}$$

2. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.

- (a) Il y a $\binom{2n}{n}$ poignées, ainsi $|\Omega| = \binom{2n}{n}$. Pour qu'une poignée contienne k boules noires, cela revient à tirer k boules noires parmi n et $n - k$ blanches parmi n , ainsi

$$|N_k| = \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2 \text{ par symétrie du triangle de Pascal}$$

d'où

$$\mathbb{P}(N_k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$$

Puis $(N_k)_{0 \leq k \leq n}$ est un SCE donc $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(N_k) = 1$ ce qui donne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

- (b) Avec l'inégalité précédente, avec $b_k = 1$ et $a_k = \binom{n}{k}$, on a

$$\frac{a_0^2}{b_0} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \geq \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)^2}{\sum_{k=0}^n 1}$$

mais $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = 2^n$ d'où

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{n+1}$$

- (c) L'événement $A = \text{«toutes les boules ont la même couleur»}$ est la réunion des événements incompatibles N_0 et N_n . Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N_0) + \mathbb{P}(N_n) = \frac{\binom{n}{0}^2}{\binom{2n}{n}} + \frac{\binom{n}{n}^2}{\binom{2n}{n}} = \frac{2}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{n+1}{2^{2n-1}}$$

Exercice de khôlle 839

1. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.

2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n \end{cases}$$

Solution : On se place dans $\mathbb{R}^n$ canonique euclidien.

1. On applique C.S à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi

$$(\langle X | Y \rangle)^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n 1\right) = n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

2. Attention, il ne s'agit pas d'un système linéaire !

Analyse : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une solution alors dans l'inégalité de C.S précédente on a égalité car

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 = n^2 = n \times \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)$$

On sait alors que cela signifie que X et U sont liés. Il existe donc $(\lambda, \mu) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda X + \mu U = 0$. Si $\lambda = 0$ alors $\mu U = 0$, mais puisque $U \neq 0$ on a $\mu = \lambda = 0$, absurde. Donc

$$X = \alpha U \text{ où } \alpha = -\frac{\mu}{\lambda}$$

en d'autres termes $x_1 = \dots = x_n = \alpha$. Mais alors $n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \alpha = \alpha n$ et $n = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \alpha^2 n$ d'où $\alpha = 1$. La seule solution possible est donc $x_1 = \dots = x_n = 1$.

Synthèse : si $x_1 = \dots = x_n = 1$, on a bien $\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n \end{cases}$.

Exercice de khôlle 840

Soit E un espace euclidien.

1. Pour $(a, b) \in E^2$, développer $\|a - b\|^2$.

2. Soient $(x, y) \in E^2$, simplifier $\|x\| \|y\| - y \|x\|$ et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution : Il s'agit d'une preuve rapide de C-S.

1. OB, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= (a - b | a - b) = (a | a - b) - (b | a - b) \\ &= (a | a) - (a | b) - (b | a) + (b | b) \\ &= \|a\|^2 - 2(a | b) + \|b\|^2 \end{aligned}$$

2. Avec $a = x \|y\|$ et $b = y \|x\|$, sachant que $\|\lambda x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$ on a

$$\|a\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 = \|b\|^2 \text{ et } (a | b) = \|x\| \|y\| (x | y)$$

d'où

$$\|x \|y\| - y \|x\| \|^2 = 2 (\|x\| \|y\| - (x | y)) \|x\| \|y\|$$

Si $\|x\| = 0$ alors $x = \vec{0}$ et C-S est clairement vérifié, idem si $\|y\| = 0$. Sinon on obtient

$$\|x\| \|y\| - (x | y) = \frac{\|x \|y\| - y \|x\| \|^2}{2 \|x\| \|y\|} \geq 0$$

d'où, $\forall (x, y) \in E^2$,

$$(x | y) \leq \|x\| \|y\|$$

en particulier, en remplaçant y par $-y$, on a aussi $(x | -y) = -(x | y) \leq \|x\| \|-y\| = \|x\| \|y\|$. Ainsi

$$|(x | y)| = \max((x | y), -(x | y)) \leq \|x\| \|y\|$$

ce qui prouve C-S.

Exercice de khôlle 841

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$, quelle est la valeur maximale de $(3x + 2y + z)^2$?

Solution : On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$ (c'est bien un produit scalaire).

Si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = \|u\|^2$. On détermine ensuite $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 3x + 2y + z$.

Ce qui donne

$$ax + 2by + 3cz = 3x + 2y + z$$

donc $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ convient. Un calcul simple donne $\|v\|^2 = 3^2 + 2 \times 1^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{34}{3}$. On a, avec C-S

$$\langle u | v \rangle^2 = (3x + 2y + z)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 = \frac{34}{3} \|u\|^2$$

Si $\|u\|^2 \leq 1$ on a donc $(3x + 2y + z)^2 \leq \frac{34}{3}$. Et le cas d'égalité de C-S nous dit que pour $u = \lambda v$ tel que $\|u\|^2 = 1$

(donc $\lambda^2 \times \|v\|^2 = 1$, doit $\lambda = \sqrt{\frac{3}{34}}$) on a alors $\langle u | v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 = \frac{34}{3}$.

Conclusion : la valeur maximale de $(3x + 2y + z)^2$, lorsque $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$, est $\frac{34}{3}$.

Exercice de khôlle 842

Soit E un espace euclidien et $(x, y) \in E^2$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

Solution : Sens $\implies$: Par hypothèse $(x | y) = 0$ donc, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x | \lambda y) = 0$. Avec Pythagore on obtient

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \|\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$$

Sens $\impliedby$: Par hypothèse $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$. Puisque les deux termes sont positifs, cela équivaut à

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2 \text{ ou à } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2 \geq 0$$

Mais $\|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x | y) + \lambda^2 \|y\|^2 - \|x\|^2 = 2\lambda(x | y) + \lambda^2 \|y\|^2$. Si $(x | y) \neq 0$ alors $2\lambda(x | y) + \lambda^2 \|y\|^2 \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} 2\lambda(x | y)$ qui change de signe, absurde.

Remarque : On peut aussi dire que si $(x | y) \neq 0$ alors $2\lambda(x | y) + \lambda^2 \|y\|^2$ a deux racines distinctes (à savoir $\lambda = 0$ et $\lambda = -\frac{\|y\|^2}{2(x | y)}$) donc change de signe.

24.4 Un p'tit compliqué pour la fin ?

Exercice de khôlle 843

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et soit a un vecteur unitaire de E . Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on considère l'équation, d'inconnue $x \in E$,

$$(\mathcal{E}) \quad \alpha \langle x | x \rangle + \beta \langle x | a \rangle = 1$$

- Dans cette question $\alpha = 0$. On note φ l'application définie sur E par $\varphi(x) = \langle x | a \rangle$.
 - Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ i.e. montrer que φ est une forme linéaire sur E . Que vaut $\varphi(a)$?
 - Déterminer $\ker \varphi$ puis justifier que φ est surjective.
 - Résoudre $(\mathcal{E})$.
- On revient au cas général.
 - Pour $\delta \in \mathbb{R}$, développer $\|x + \delta a\|^2$.
 - Résoudre $(\mathcal{E})$.
- Préciser quelle est, suivant α et β la solution de norme minimale.

Solution :

- Si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ alors $(\mathcal{E})$ n'a pas de solution. On suppose donc $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$.
 - On a bien φ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car un produit scalaire est un réel. Puis par linéarité à gauche du produit scalaire, si $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y | a \rangle = \lambda \langle x | a \rangle + \langle y | a \rangle = \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$. Enfin $\varphi(a) = \|a\|^2 = 1$.
 - On a $x \in \ker \varphi \iff \langle x | a \rangle = 0 \iff x \perp a \iff x \in \text{Vect}(a)^\perp$. Ainsi $\ker \varphi = \text{Vect}(a)^\perp$. Puisque $a \neq 0$, $\dim \text{Vect}(a) = 1$ donc $\dim \ker \varphi = \dim E - \dim \text{Vect}(a) = n - 1$ (c'est un hyperplan) et par la FDR, $\dim \text{Im } \varphi = 1$. Conclusion, φ est bien surjective.
 - On a donc $(\mathcal{E}) \iff \varphi(x) = \frac{1}{\beta}$. Soit x_0 un antécédant de $\frac{1}{\beta}$ alors $(\mathcal{E}) \iff \varphi(x) = \varphi(x_0) \iff \varphi(x - x_0) \in \ker \varphi$ (on retrouve le cours!) donc (solution particulière + solution de l'équation homogène)

$$x \in x_0 + \text{Vect}(a)^\perp$$

Enfin $\varphi(a) = 1$ donc $\varphi\left(\frac{a}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}\varphi(a) = \frac{1}{\beta}$ par linéarité. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc de la forme

$$x = \frac{a}{\beta} + b \text{ où } b \in \text{Vect}(a)^\perp$$

2.

(a) On a $\|x + \delta a\|^2 = \langle x + \delta a | x + \delta a \rangle = \|x\|^2 + 2\delta \langle x | a \rangle + \delta^2 \|a\|^2$ (ce n'est que l'OB de la prépa !). Conclusion

$$\|x + \delta a\|^2 = \|x\|^2 + 2\delta \langle x | a \rangle + \delta^2$$

(b) Si $\alpha \neq 0$, on peut diviser par α pour avoir

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) &\iff \|x\|^2 + \frac{\beta}{\alpha} \langle x | a \rangle - \frac{1}{\alpha} = 0 \iff \left\| x + \frac{\beta}{2\alpha} a \right\|^2 - \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = 0 \\ &\iff \left\| x + \frac{\beta}{2\alpha} a \right\|^2 = \frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2} \end{aligned}$$

On a donc trois cas :

① $\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2} < 0$: pas de solution.

② $\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2} = 0$: une seule solution (par le critère de séparation) $x = -\frac{\beta}{2\alpha} a$.

③ $\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2} > 0$: une infinité de solution de la forme

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} a + \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} u \text{ où } \|u\| = 1$$

L'ensemble des solutions est le cercle centré en $-\frac{\beta}{2\alpha} a$ et de rayon $\sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}}$.

3. Cas ① : $\alpha = 0$. La solution s'écrit $x = \frac{a}{\beta} + b$ où $b \in \text{Vect}(a)^\perp$. Avec Pythagore, on a

$$\|x\|^2 = \left\| \frac{a}{\beta} \right\|^2 + \|b\|^2 \geq \left\| \frac{a}{\beta} \right\|^2 = \frac{1}{\beta^2} \text{ avec égalité si } b = 0$$

donc la solution de norme minimale est $x = \frac{a}{\beta}$.

Cas ② : $\alpha \neq 0$. La solution s'écrit $x = -\frac{\beta}{2\alpha} a + \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} u$ où $\|u\| = 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| -\frac{\beta}{2\alpha} a + \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} u \right\|^2 = \left\| -\frac{\beta}{2\alpha} a \right\|^2 + 2 \left\langle -\frac{\beta}{2\alpha} a \mid \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} u \right\rangle + \left\| \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} u \right\|^2 \\ &= \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + 2 \times \left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right) \times \left(\sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} \right) \langle a | u \rangle + \frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha + 2\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} \langle a | u \rangle \end{aligned}$$

Par C-S, $\langle a | u \rangle \leq \|a\| \|u\| = 1$ d'où

$$\|x\|^2 \geq \frac{4\alpha + 2\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} = \left(-\frac{\beta}{2\alpha} + \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} \right)^2$$

Avec égalité si (on ne demande pas de vérifier que c'est le seul) $u = a$ donc

$$x = \left(-\frac{\beta}{2\alpha} + \sqrt{\frac{4\alpha + \beta^2}{4\alpha^2}} \right) a$$

Exercice de khôlle 844

Soit E un espace euclidien pour lequel on note $(x | y)$ le produit scalaire de x et y et $\|x\|$ la norme de x . Soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$, pour $k \in \mathbb{R}$, on définit

$$\langle x | y \rangle = (x | y) + k(x | a) \times (y | a)$$

Donner une CNS sur k pour que $\langle | \rangle$ soit un produit scalaire sur E .

Solution : Puisque $k \in \mathbb{R}$, $\langle x | y \rangle$ existe est un réel.

Linéarité à droite : Soient $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x | \lambda y + z \rangle = (x | \lambda y + z) + k(x | a) \times (\lambda y + z | a)$$

par bilinéarité de $(|)$ et distributivité de produit de réels, on a

$$\begin{aligned} \langle x | \lambda y + z \rangle &= \lambda(x | y) + (x | z) + k(x | a) \times (\lambda(y | a) + (z | a)) \\ &= \lambda((x | y) + k(x | a) \times (y | a)) + (x | z) + k(x | a) \times (z | a) \end{aligned}$$

Symétrie : par symétrie de $(|)$ et commutativité du produit des réels

$$\begin{aligned} \langle y | x \rangle &= (y | x) + k(y | a) \times (x | a) \\ &= (x | y) + k(x | a) \times (y | a) = \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

On a bien une f.b.s. Puis si $x \in E$

$$\begin{aligned} \langle x | x \rangle &= (x | x) + k(x | a) \times (x | a) \\ &= \|x\|^2 + k(x | a)^2 \end{aligned}$$

Cas ① : $k \geq 0$, c'est clairement positif.

Cas ② : $k < 0$, on veut montrer que $\langle x | x \rangle \geq 0$, c'est une histoire d'inégalité donc du C.S! Donc, par C.S.

$$(x | a)^2 \leq \|x\|^2 \|a\|^2 = \|x\|^2 \text{ car } a \text{ unitaire}$$

d'où (attention $k < 0$)

$$k(x | a)^2 \geq k\|x\|^2$$

et ainsi

$$\langle x | x \rangle \geq (1 + k)\|x\|^2$$

Si $k \geq -1$, on a bien $\langle x | x \rangle \geq 0$. Puis si $k < -1$, on se dit que cela ne doit pas fonctionner. Il faut un contre exemple! Le seul vecteur dont on dispose, c'est a . On calcule donc

$$\langle a | a \rangle = \|a\|^2 + k(a | a)^2 = (1 + k)\|a\|^2 < 0 \text{ si } k < -1$$

Au passage, si $k = -1$, on a $\langle a | a \rangle = 0$ alors que $a \neq \vec{0}$ (car $\|a\| = 1 \neq 0$). Le critère de séparation n'est pas vérifié. Donc pour avoir un produit scalaire, une CN est $k > -1$. On suppose que c'est désormais le cas. Il reste à montrer que l'on a bien une f.b.s définie positive. Soit $x \in E$ tel que $\langle x | x \rangle = 0$ alors

$$\langle x | x \rangle = 0 \geq (1 + k)\|x\|^2 \geq 0$$

donne $(1 + k)\|x\|^2 = 0$ soit $\|x\|^2 = 0$ (car $k \neq -1$) et ainsi $x = 0$.

Exercice de khôlle 845

Soit E un espace euclidien, on note $(|)$ son produit scalaire et on suppose qu'il existe $p_1, \dots, p_m$ des projecteurs de E tels que

$$Id_E = \sum_{k=1}^m p_k \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, \text{ si } i \neq j \text{ alors } p_i \circ p_j = 0$$

On définit alors $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n (p_k(x) | p_k(y))$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire de E .
2. Montrer $\forall i \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, p_i$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Im } p_i$ pour le produit scalaire φ .

Solution : Avant tout, $\varphi(x, y)$ est bien défini pour tout $(x, y) \in E^2$ et est un réel.

1. La linéarité provient de la linéarité à droite de $(|)$ et de la linéarité de p car pour $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda y + z) &= \sum_{k=1}^n (p_k(x) | p_k(\lambda y + z)) = \sum_{k=1}^n (p_k(x) | \lambda p_k(y) + p_k(z)) \text{ linéarité de } p \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n (p_k(x) | p_k(y)) + \sum_{k=1}^n (p_k(x) | p_k(z)) \text{ linéarité à droite de } (|) \\ &= \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, z) \end{aligned}$$

La symétrie est immédiate avec celle de $(|)$. Puis $\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^m \|p_k(x)\|^2 \geq 0$ et enfin si $\varphi(x, x) = 0$ alors

$\forall k \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, \|p_k(x)\|^2 = 0$ d'où $p_k(x) = 0$. Mais alors $Id_E(x) = x = \sum_{k=1}^m p_k(x) = 0$. Conclusion, on a bien défini un produit scalaire.

2. On sait que p_i est un projecteur sur $\text{Im } p_i$ de direction $\ker p_i$. Il s'agit de prouver que pour le produit scalaire φ , $\text{Im } p_i$ et $\ker p_i$ sont orthogonaux. Soient $x \in \text{Im } p_i$ et $y \in \ker p_i$ alors

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n (p_k(x) | p_k(y))$$

Mais $x \in \text{Im } p_i$ donc $x = p_i(x)$ (pour s'en convaincre, il existe $a \in E$ tel que $x = p_i(a)$ donc $p_i(x) = p_i^2(a) = p_i(a) = x$) et $y \in \ker p_i$ donc $p_i(y) = 0$, ainsi

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n (p_k \circ p_i(x) | p_k(y)) = \left(p_i \circ p_i(x) | \underbrace{p_i(y)}_{=0} \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left(\underbrace{p_k \circ p_i(x)}_{=0} | p_k(y) \right) = 0$$

d'où le résultat.

Exercice de khôlle 846

Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et G respectivement. Montrer que

$$G = F^\perp \iff (\forall x \in E, \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_G(x)\|^2)$$

Solution : Sens $\implies$: Hypothèse $G = F^\perp$ et donc $F = G^\perp$. On sait alors (projecteurs associés) que pour $x \in E$

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x)) = p_F(x) + p_{F^\perp}(x) \quad (\text{car } p_{F^\perp} = Id - p_F \text{ est le projecteur associé})$$

Puisque $p_F(x) \perp p_{F^\perp}(x)$, avec Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2 = \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_G(x)\|^2$ car $G = F^\perp$.

Sens $\impliedby$: Hypothèse : $(\forall x \in E, \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_G(x)\|^2)$.

On remplace x par $p_F(x)$ où $x \in E$, pour avoir

$$\|p_F(x)\|^2 = \|p_F(p_F(x))\|^2 + \|p_G(p_F(x))\|^2$$

Avec $p_F \circ p_F = p_F$ on a $p_F(p_F(x)) = p_F(x)$ d'où

$$\forall x \in E, \|p_G \circ p_F(x)\|^2 = 0$$

d'où $p_G \circ p_F = 0$. Mais alors $\text{Im } p_F \subset \ker p_G$ ce qui donne $F \subset G^\perp$ (exercice type $g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \ker g$).

Réciproquement si $x \in G^\perp$ alors $p_G(x) = 0$ et

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_G(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2$$

Mais on a aussi $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$ (Pythagore) donc $\|p_{F^\perp}(x)\|^2 = 0$ d'où $p_{F^\perp}(x) = 0$ et ainsi $x \in F$. On a donc $G^\perp \subset F$. Par double inclusion $G^\perp = F$.

25.1 Loi d'une variable aléatoire

Exercice de khôlle 847

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \llbracket -n ; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{(n+1) - |k|}{(n+1)^2}$$

1. Justifier que cela définit bien une loi de variable aléatoire.
2. La variable X est-elle centrée (i.e. d'espérance nulle).

Solution :

1. Si $k \in \llbracket -n ; n \rrbracket$, on a $|k| \leq n < n+1$ ainsi $\mathbb{P}([X = k]) \geq 0$. Puis

$$\sum_{k=-n}^n \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=-n}^n \frac{(n+1) - |k|}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=-n}^n |k|$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^n 1 &= 2n+1 \\ \sum_{k=-n}^n |k| &= \sum_{-n \leq k \leq -1} |k| + |0| + \sum_{1 \leq k \leq n} |k| = 2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1) \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=-n}^n \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{n(n+1)}{(n+1)^2} = 1$$

On a donc bien défini une loi de variable aléatoire.

2. Puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=-n}^n k \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=-n}^n k \frac{(n+1) - |k|}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{-n \leq k \leq -1} k \frac{(n+1) - |k|}{(n+1)^2} + 0 + \sum_{1 \leq k \leq n} k \frac{(n+1) - |k|}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{-n \leq k \leq -1} k \frac{(n+1) - (-k)}{(n+1)^2} + \sum_{1 \leq k \leq n} k \frac{(n+1) - k}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

dans la première somme, on pose $i = -k$ ainsi

$$\sum_{-n \leq k \leq -1} k \frac{(n+1) - (-k)}{(n+1)^2} = \sum_{1 \leq i \leq n} -i \frac{(n+1) - (i)}{(n+1)^2} = - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(n+1) - k}{(n+1)^2}$$

La variable est bien centrée !

Si on a un peu de temps, on calcule $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)$ (car $\mathbb{E}(X) = 0$). Par la formule du transfert :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=-n}^n k^2 \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{-n \leq k \leq -1} k^2 \frac{(n+1) - (-k)}{(n+1)^2} + \sum_{1 \leq k \leq n} k^2 \frac{(n+1) - k}{(n+1)^2}$$

mais, en posant $i = -k$, $\sum_{-n \leq k \leq -1} k^2 \frac{(n+1) - (-k)}{(n+1)^2} = \sum_{1 \leq i \leq n} i^2 \frac{(n+1) - i}{(n+1)^2}$ d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= 2 \sum_{i=1}^n i^2 \frac{(n+1) - i}{(n+1)^2} = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^3 \\ &= \frac{2}{n+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2}{(n+1)^2} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n(2n+1)}{3} - \frac{n^2}{2} = \frac{n(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 848

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \llbracket 1 ; n \rrbracket$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = \alpha k$.

1. Exprimer α en fonction de n .
2. Calculer $\mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{n}{2}\right]\right)$ et donner sa limite si n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. On sait que $([X = k])_{1 \leq k \leq n}$ est un SCE donc $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k]) = 1$. Mais $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k]) = \alpha \sum_{k=1}^n k = \alpha \times \frac{n(n+1)}{2}$
d'où $\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$.

2. On a $\mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{n}{2}\right]\right) = \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \mathbb{P}([X = k]) = \alpha \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} k = \alpha \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k$ car $k \leq \frac{n}{2} \iff k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ d'où

$$\mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{n}{2}\right]\right) = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)}{n(n+1)}$$

Puis $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ d'où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \sim \frac{n^2}{4}$ et $\mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{n}{2}\right]\right) \sim \frac{1}{4}$.

Exercice de khôlle 849

Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6. On en tire une au hasard et on note X son numéro. On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X . On tire une nouvelle boule dont le numéro est noté Y . Déterminer la loi de Y , calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$.

Solution : On a $X(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$. On détermine la loi de Y , conditionnée par X . On sait que $([X = i])_{1 \leq i \leq 6}$ est un SCE. Pour $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ on a alors

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k]) \mathbb{P}([X = i])$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k]) &= 0 \text{ si } k > i \\ \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = k]) &= \frac{1}{i} \text{ si } k \leq i \\ \mathbb{P}([X = i]) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{i=k}^6 \frac{1}{6i}$$

Si on veut (mais le veut-on ?), on calcule les différentes valeurs de $\mathbb{P}([Y = k])$ et on résume cela dans un tableau pour avoir :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}([Y = k])$	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$

Enfin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=k}^6 \frac{1}{6i} \right) = \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^i \frac{k}{6i} = \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{k=1}^i k \right) \frac{1}{6i} = \sum_{i=1}^6 \frac{i+1}{12} \\ &= \frac{1}{12} \times \sum_{i=1}^6 (i+1) = \frac{1}{12} \times \frac{9 \times 6}{2} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Exercice de khôlle 850

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On extrait les boules de cette urne au hasard, une par une sans remise jusqu'à obtenir les deux boules numérotées 1 et n . Soit X le nombre aléatoire de tirages justes nécessaires. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Solution : On a $X(\Omega) = \llbracket 2; n \rrbracket$. L'idée est de continuer le tirage jusqu'à ce que toutes les boules soient tirées. Un tirage est donc une n -liste d'éléments 2 à 2 distincts de $\llbracket 1; n \rrbracket$, i.e. une permutation de la liste $(1, 2, \dots, n)$. Le nombre de tirage est donc $n!$.

Pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, l'événement $[X \leq k]$ signifie que l'on a tiré les deux boules numérotées 1 et n avant le $k^{\text{ième}}$ tirage. Pour dénombrer le cardinal de $[X \leq k]$, on choisit, parmi $\llbracket 1; k \rrbracket$, le numéro du tirage de la boule de numéro 1 (k choix), puis celui de la boule de numéro n (soit $k-1$ choix). Ceci donne $k(k-1)$ choix possibles. Puis pour le numéro du tirage de la boule n°2 on a $n-2$ choix, puis $n-3$ pour la boule de n°3 $\dots$ Au final

$$|[X \leq k]| = k(k-1) \times (n-2)!$$

et $\mathbb{P}([X \leq k]) = \frac{k(k-1)(n-2)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ (formule encore valable si $k=1$ car $[X \leq 1] = \emptyset$). Puis $[X \leq k] = [X \leq k] \sqcup [X \leq k-1]$ (réunion disjointe) d'où

$$\mathbb{P}([X \leq k]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X \leq k-1])$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{k-1}{2n(n-1)}$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=2}^n k \times \frac{k-1}{2n(n-1)} = \sum_{k=1}^n k \times \frac{k-1}{2n(n-1)} = \frac{1}{2n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{2n(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n+1}{4(n-1)} \left(\frac{2n+1}{3} - 1 \right) = \frac{n+1}{6}\end{aligned}$$

Exercice de khôlle 851

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une boîte contient 2 boules portant le numéro 0 et pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, 2^k boules portant le numéro k .

- On tire une boule de la boîte, on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de X .
- On tire une à une, avec remise, deux boules de la boîte et on appelle Y la variable aléatoire donnant le plus grand des deux numéros tirés.
 - Déterminer $\mathbb{P}([Y = 0])$.
 - Déterminer pour $k \geq 1$, $\mathbb{P}([Y \leq k])$ et en déduire la loi de Y .

Solution :

- On a $X(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$, la probabilité est uniforme, et le nombre de boules est $N = 2 + \sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1}$

$$\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \text{ et pour } k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2^k}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1-k}}$$

- On a $Y(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$.

- Un tirage est une 2-liste de $\llbracket 0 ; n \rrbracket$, il y a donc $(n+1)^2$ tirages possibles. L'événement $[Y = 0]$ se réalise si on a tiré deux fois de suites la boule de numéro 0, il n'y a donc qu'un seul tirage qui donne $[Y = 0]$

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

- On a $[Y \leq k]$ si les deux boules tirées l'on été dans $\llbracket 0 ; k \rrbracket$, ainsi $[Y \leq k]$ est l'ensemble des 2-liste de $\llbracket 0 ; k \rrbracket$. On a donc

$$\mathbb{P}([Y \leq k]) = \frac{(k+1)^2}{(n+1)^2}$$

On constate que cette formule est encore valable si $k = 0$, en effet $[Y \leq 0] = [Y = 0]$ (si le plus grand des deux numéros est 0, c'est que les deux valent 0). Puis pour $k \geq 1$, $[Y \leq k] = [Y \leq k] \sqcup [Y \leq k-1]$ (réunion disjointe) d'où $\mathbb{P}([Y \leq k]) = \mathbb{P}([Y = k]) + \mathbb{P}([Y \leq k-1])$ et ainsi

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y \leq k]) - \mathbb{P}([Y \leq k-1])$$

Pour $k \geq 1$, on a alors

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \frac{(k+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{k^2}{(n+1)^2} = \frac{2k+1}{(n+1)^2} \text{ (encore valable si } k = 0)$$

Remarque : On a bien $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{(n+1)^2} = 1$.

Exercice de khôlle 852

N joueurs numérotés de 1 à N ($N > 3$) se lancent une balle au hasard. Au départ le joueur 1 a la balle ; il lance la balle à un autre joueur, et ainsi de suite. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit X_k le numéro du joueur qui possède la balle après k lancers.

1. Quelle est la loi de X_0 ? de X_1 ?
2. Pour $i \leq N$ fixé et $k \in \mathbb{N}$, établir une relation entre $\mathbb{P}([X_{k+1} = i])$ et $\mathbb{P}([X_k = i])$.
3. En déduire la loi de X_k pour $k \in \mathbb{N}$. (on posera $q = -\frac{1}{N-1}$)

Solution :

1. On n'a pas encore lancé la balle, donc $X_0 = 1$ est une variable aléatoire certaine ! Pour X_1 , chaque joueur, autre que le joueur 1 a la même probabilité d'avoir la balle. Ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2 ; n \rrbracket)$.
2. On utilise le SCE ($[X_j = i]_{1 \leq j \leq N}$) ainsi

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \sum_{j=1}^N \mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) \times \mathbb{P}([X_k = j])$$

$$\text{mais } \mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{N-1} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbb{P}([X_k = j])$$

Pour finir, toujours une histoire de SCE, $\sum_{j=1}^N \mathbb{P}([X_k = j]) = 1$ donc $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbb{P}([X_k = j]) = 1 - \mathbb{P}([X_k = i])$ d'où

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N-1} \mathbb{P}([X_k = i])$$

3. Si on pose $u_k = \mathbb{P}([X_k = i])$, on a $u_{k+1} = \frac{1}{N-1} - \frac{u_k}{N-1}$, on a donc une suite arithmético-géométrique. On écrit

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{N-1} - \frac{u_k}{N-1} \\ \ell &= \frac{1}{N-1} - \frac{\ell}{N-1} \end{aligned}$$

par différence, $u_{k+1} - \ell = -\frac{1}{N-1} (u_k - \ell)$ d'où

$$u_k = \ell + \left(-\frac{1}{N-1}\right)^k (u_0 - \ell)$$

Avec $u_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$ et $\ell = \frac{1}{N}$ (on s'en doute non ?) on obtient

$$\mathbb{P}([X_k = i]) = \begin{cases} \frac{1}{N} + q^k \left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} (1 - q^{k-1}) & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{N} (1 - q^k) & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

Exercice de khôlle 853

On dispose de n boules, et d'une boîte ayant trois compartiments numérotés 1, 2 et 3. On place les boules dans la boîte que l'on ferme. On la secoue et on ouvre. On note X le nombre de compartiments vides.

1. Donner la loi de X .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et sa limite.

Solution : On peut numéroter les boules de 1 à n . Ainsi, en ouvrant la boîte, on attribue à chaque boule le numéro du compartiment où elle se trouve. Cela revient donc à construire une application de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1 ; 3 \rrbracket$. Réciproquement, toute application de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1 ; 3 \rrbracket$ décrit une unique répartition des boules. Conclusion, le cardinal de Ω est 3^n (de manière naïve, pour chaque boule on a 3 choix!).

1. Puisque les boules doivent bien se ranger dans la boîte, on a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
L'événement $[X = 2]$ signifie que toutes les boules sont dans un même compartiment, il y a trois possibilités (les trois applications constantes), ainsi

$$\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

On est rassuré car pour $n = 1$, on est sûr que deux des trois compartiments seront vides!

Passons à $[X = 1]$ qui signifie que l'on a rangé toutes les boules dans deux compartiments. Cela revient à choisir le compartiment vide, soit 3 choix (ou bien les deux parmi 3 qui ne le seront pas, i.e. $\binom{3}{2} = 3$). Puis pour chaque boule, on a 2 choix soit 2^n choix. Mais attention, il faut enlever les cas où toutes les boules se rangent dans le même compartiment, soit 2 choix à enlever. Conclusion

$$|[X = 1]| = 3 \times (2^n - 2)$$

et $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{3 \times (2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$. On est rassuré car avec $n = 1$, on a un résultat nul. Vérifions pour $n = 2$ en énumérant, de manière exhaustive tous les rangements possibles. On note $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ pour indiquer que la boule 1 est dans le compartiment 2 et la boule 2 dans le compartiment 3. Les différents rangements sont (pour $[X = 1]$)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ le compartiment 3 est vide, on a enlevé } \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ le compartiment 2 est vide} \\ &\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ le compartiment 1 est vide} \end{aligned}$$

On a bien $6 = 3 \times (2^2 - 2)$ choix!

Pour finir $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$ est un SCE donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0]) &= 1 - \mathbb{P}([X = 1]) - \mathbb{P}([X = 2]) \\ &= 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

2. Enfin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \times \mathbb{P}([X = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([X = 2]) \\ &= \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}} = \frac{2^n}{3^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Heureusement, on se doute que si n est grand, aucun compartiment ne va rester vide!